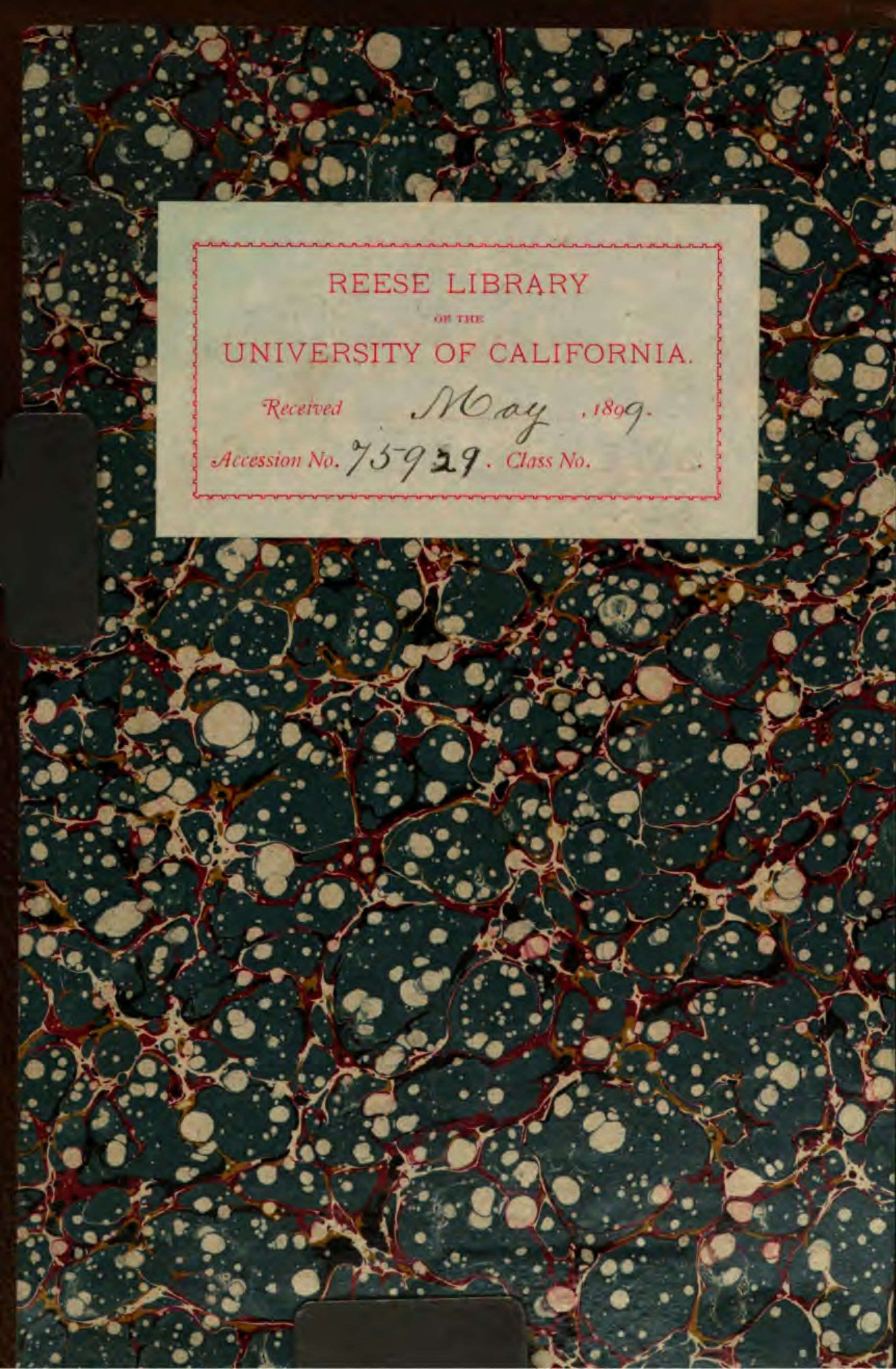
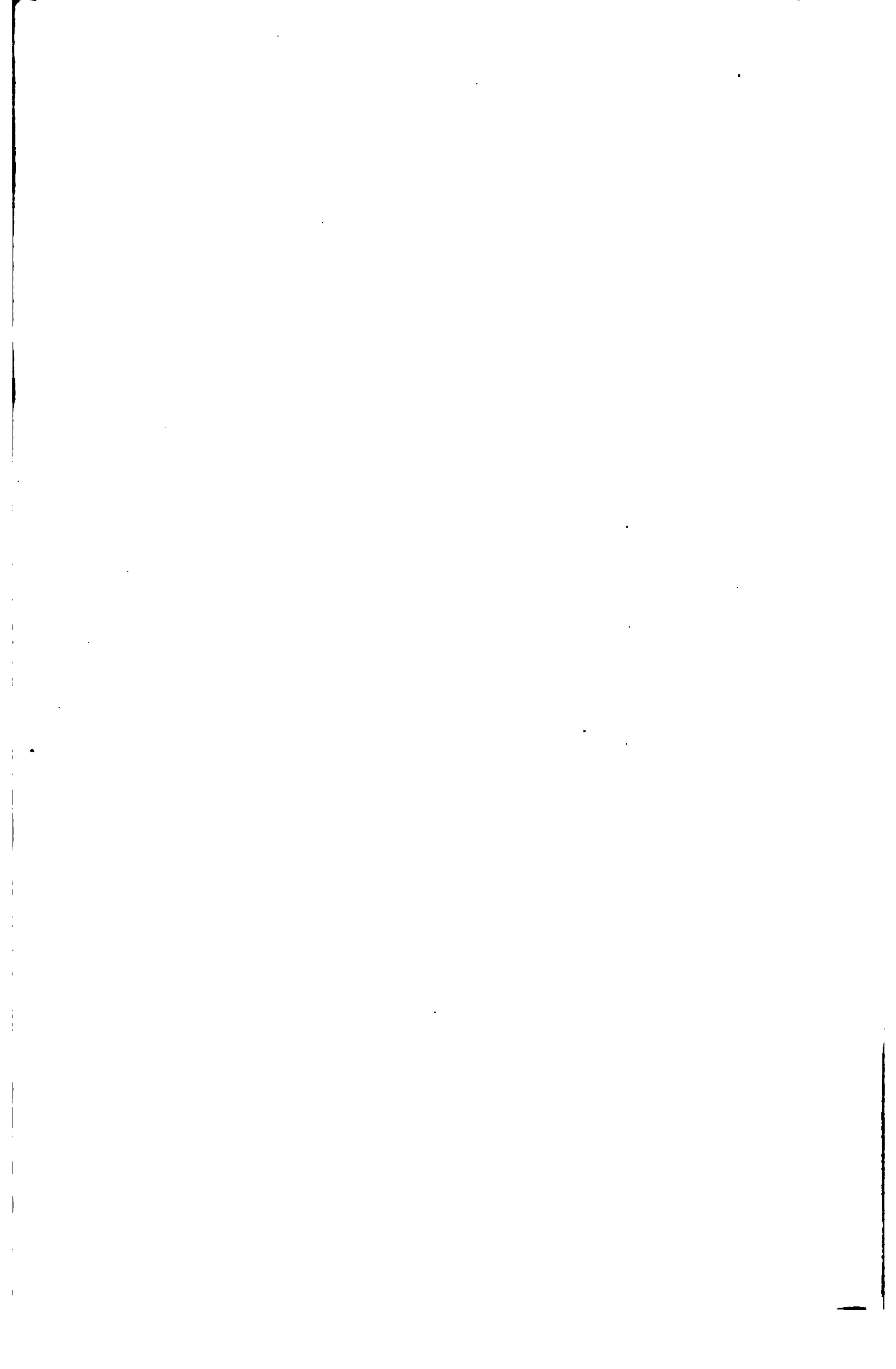








# Zeitschrift

für

# Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

**Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl**

und

**Dr. M. Cantor.**



**XXX. Jahrgang.**

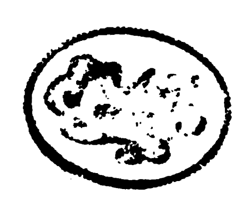
Mit 7 lithographirten Tafeln.




Leipzig,

Verlag von B. G. Teubner.

1885.



Druck von B. G. Teubner in Dresden.

# Inhalt.

## Kinematik.



## Potentialtheorie.



## Optik.



## Magnetismus.

I.

# Die Curven vierter Ordnung mit drei doppelten Inflexionsknoten.

Von

Dr. C. Beyel

in Zürich.




Hierzu Taf. I Fig. 1—8.

## 1. Erzeugung aus einer Strahleninvolution und einem Kegelschnitte.

*Satz.* Gegeben sei eine Strahleninvolution $J_1$ mit dem Scheitel $M_1$ und ein Kegelschnitt $K^2$. Construiren wir in den Schnittpunkten eines Strahles $x_1$ der Involution $J_1$ mit $K^2$ die Tangenten an diesen Kegelschnitt, so schneiden sie den Strahl $x'_1$, welcher $x_1$ in der Involution $J_1$ correspondirt, in zwei Punkten einer Curve vierter Ordnung — $C^4$.

*Beweis.** (Fig. 1.) Wir zeigen, dass auf jeder Geraden $g$ der Ebene vier Punkte des durch den Satz bestimmten Ortes liegen. Sei mit $J_{1k}$ die Involution harmonischer Polaren um $M_1$ und mit $m_1$ die Polare von $M_1$ in Bezug auf $K^2$ bezeichnet.** Dann gehört zu jeder Geraden durch $M_1$ ein Strahl der Involution $J_{1k}$ und ein Strahl der Involution $J_1$. Letztere Strahlen sind somit einander eindeutig zugeordnet und bilden eine Projectivität $P_{1k}$. Schneiden wir nun $m_1$ mit den Strahlen der Involution $J_{1k}$ und $g$ mit den entsprechenden in der Projectivität $P_{1k}$, so erhalten wir in $m_1$ und $g$ zwei projectivische Reihen $T_{1k}$ und $T_1$. Die Verbindungslinien ihrer correspondirenden Punkte sind Tangenten eines Kegelschnittes $K_g^2$. Ist dann $t$ eine gemeinsame Tangente der beiden Kegelschnitte $K^2$, $K_g^2$, so verbindet $t$ ein Punktepaar $T_{1k}\,T_1$. Berührt $t$

* Der Beweis lässt sich auch mit Hilfe des Satzes von Joncquières führen. Von diesem Gesichtspunkte aus erscheint die angegebene Erzeugungsweise als specieller Fall der von A. Ameseder entwickelten von Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten. (Sitzungsber. der kaiserl. Akad. d. Wissensch., Bd. 79 II. Abth. S. 241.) Vergl. auch: Hossfeld, Ueber Unicursalcurven vierter Ordnung. (Schlömilch, Zeitschr. f. Math. u. Phys. XXVIII, S. 296, 1883.) Desgleichen meine Dissertation: Centrische Collineation $n^{\text{ter}}$ Ordnung in der Ebene (Vierteljahrsschrift der Züricher naturf. Gesellsch., Bd. XXVI S. 297, 1881), wo die Erzeugung von $C^4$ für den Fall behandelt ist, in welchem $J_1$ eine Rechtwinkelinvolution ist.

** In Fig. 1 ist $K^2$ als Kreis angenommen. Die Involutionen um $M_1$ sind auf einen Hilfskreis $H^2$ durch $M_1$ übertragen und ihre Pole sind mit $J_1$, $J_{1k}$ bezeichnete.

den Kegelschnitt $K^2$ in $D_1$, so ist $M_1 D_1$, $M_1 T_{1k}$ ein Strahlenpaar der Involution $J_{1k}$, und weil $M_1 T_{1k}$, $M_1 T_1$ ein Paar der Projectivität $P_{1k}$ ist, so folgt, dass $M_1 D_1$, $M_1 T_1$ ein Paar der Involution $J_1$ ist. Also ist $T_1$ ein Punkt unseres Ortes. Seine Punkte auf $g$ sind mithin zugleich auf den gemeinsamen Tangenten von $K^2$ und $K_g^2$ gelegen. Da es vier solcher Tangenten giebt, so folgt, dass der in Rede stehende Ort eine Curve vierter Ordnung ist.

Wir ziehen aus dem Gesagten einige Schlüsse über die Curve $C^4$.

a) Die Punkte der $C^4$, welche auf einer beliebigen Geraden $g$ liegen, sind paarweise reell oder imaginär.

Denken wir uns durch $K^2$ die Ebene in zwei Theile zerlegt, in deren einem die Involution harmonischer Polaren um jeden Punkt herum elliptisch ist und in deren anderem sie reelle Doppelstrahlen hat, so liegen die reellen Tangenten von $K^2$ im hyperbolischen Felde der Ebene. Mithin befindet sich in demselben auch der reelle Theil unserer $C^4$. Also kann dieser $K^2$ nicht schneiden. Umgekehrt kann der imaginäre Theil der $C^4$ aus dem elliptischen Felde der Ebene nicht in das hyperbolische übertreten. Bemerken wir dann weiter, dass infolge der angegebenen Erzeugungsweise $K^2$ mit $C^4$ die vier Punkte gemeinsam hat, in denen die Doppelstrahlen $(g_1 h_1)$ der Involution $J_1$ den Kegelschnitt $K^2$ treffen, so folgt, dass $C^4$ in diesen vier Punkten von $K^2$ berührt wird.

b) Auf jeder Geraden durch $M_1$ liegen zwei Punkte von $C^4$. Also ist $M_1$ ein Doppelpunkt von $C^4$.

Sei $m_2 m_3$ das gemeinsame Paar der Involutionen $J_1 J_{1k}$ und treffe dasselbe $m_1$ in den resp. Punkten $M_3$, $M_2$, so sind auch diese Punkte Doppelpunkte von $C^4$. Mithin hat $C^4$ drei Doppelpunkte.

Ist $M_1$ reell, so muss auch $m_1$ stets reell sein. Dagegen können $m_2 m_3$ — also auch $M_3 M_2$ — imaginär werden oder zusammenfallen. Dementsprechend werden wir bei den folgenden Untersuchungen stets zuerst den Fall besprechen, in welchem $M_2 M_3$ reell sind, und dann die Modificationen angeben, welche für imaginäre Punkte $M_2 M_3$ eintreten. Das Zusammenfallen von $M_2 M_3$ wird uns weiterhin zu den degenerirten Formen der $C^4$ führen. Lassen wir $K^2$ imaginär werden, so gelangen wir zu einer neuen interessanten Form der $C^4$.

c) Durch die gegebene Erzeugungsweise sind die Punkte $(A_1 \ldots)$ des Kegelschnittes $K^2$ den Punkten $(A'_1 \ldots)$ der Curve $C^4$ eindeutig zugeordnet und diese Zuordnung wird durch die Tangenten an $K^2$ vermittelt.

Wir können dies auch so ausdrücken: Zu jedem Punkte von $C^4$ gehört die Tangente an $K^2$, auf welcher der zugeordnete Punkt von $K^2$ liegt. Ausgezeichnete Punkte dieser Zuordnung sind $M_1 M_2 M_3$. Ihnen correspondiren je die zwei Berührungspunkte der Tangenten, welche von $M_1 M_2 M_3$ aus an $K^2$ gehen.

## 2. $C^4$ als Leitcurve einer quadratischen Transformation.

Aus dem in 1 gegebenen Beweise folgt, dass zu jeder Geraden $g$ der Ebene ein Kegelschnitt $K_g^2$ gehört. Er berührt $m_1$ und $g$ — die Träger der Reihen $T_{1k} T_1$. Ferner muss er $m_2 m_3$ — die Doppelstrahlen der Projectivität $P_{1k}$ — zu Tangenten haben. Die Geraden $g$ und die Kegelschnitte $K_g^2$ stehen also in der Beziehung einer quadratischen Transformation. Dieselbe ist dadurch specialisirt, dass jede Gerade den Kegelschnitt berührt, dem sie entspricht.

Wenn ein Kegelschnitt $K_g^2$ den Kegelschnitt $K^2$ berührt, so schneidet die Tangente im Berührungspunkte aus der zu $K_g^2$ gehörenden Geraden $g$ zwei zusammenfallende Punkte von $C^4$, d. h.: $g$ ist Tangente an $C^4$. Daraus schliessen wir, dass unsere Curve vierter Ordnung die Enveloppe aller der Geraden $g$ ist, deren entsprechende Kegelschnitte den Kegelschnitt $K^2$ berühren.

Die Kegelschnitte $K_g^2$, welche in der quadratischen Transformation den Geraden eines Büschels entsprechen, dessen Scheitel $T_1$ sei, bilden eine Kegelschnittschaar; denn sie haben ausser $m_1 m_2 m_3$ noch die Tangente gemeinsam, welche $T_1$ mit dem entsprechenden Punkte $T_{1k}$ in $m_1$ verbindet. Unter den Kegelschnitten dieser Schaar heben wir diejenigen hervor, welche $K^2$ berühren. Ihre correspondirenden Geraden $g$ müssen Tangenten aus $T$ an $K^2$ sein. Nun ist bekanntlich die Zahl der Kegelschnitte einer Schaar, welche einen gegebenen Kegelschnitt berühren, gleich 6. Mithin gehen durch einen Punkt der Ebene sechs Tangenten an $C^4$, d. h.: $C^4$ ist von der sechsten Classe.

Betrachten wir speciell das Büschel von Geraden $g$, dessen Scheitel ein Punkt $A'_1$ von $C^4$ ist, so correspondirt diesem Büschel in der quadratischen Transformation eine Kegelschnittschaar, welche — ausser $m_1 m_2 m_3$ — die zu $A'_1$ gehörende Tangente $a_1$ [1c] von $K^2$ zur gemeinsamen Tangente hat. Unter den Kegelschnitten dieser Schaar ist einer, der $K^2$ in $A_1$ — dem Berührungspunkte von $a_1$ — tangirt. Diesem Kegelschnitt $K_g^2$ entspricht in der quadratischen Transformation eine Gerade — $a'_1$ —, welche in $A'_1$ die Curve $C^4$ berührt. Aus dieser Bemerkung ergiebt sich eine Construction der Tangente $a'_1$ in einem Punkte $A'_1$ von $C^4$. Wir bestimmen die zu $A'_1$ gehörende Tangente $a_1$ an $K^2$ und ihren Berührungspunkt $A_1$. Dann ist durch $m_1 m_2 m_3 a_1 A_1$ ein Kegelschnitt $K_g^2$ gegeben. An ihn geht durch $A'_1$ — ausser $a_1$ — eine zweite Tangente. Sie ist $a'_1$.

Wir erwähnen weiterhin unter den Kegelschnitten $K_g^2$ diejenigen, welche in der quadratischen Transformation den Tangenten an $K^2$ entsprechen. Sei $a_1$ eine solche Tangente und schneide sie $m_1$ in $T_{1k}$, so correspondirt dem Punkte $T_{1k}$ ein Punkt $T_1$ in $a_1$. Derselbe wird mit Hilfe der Projectivität $P_{1k}$ gefunden. Er ist der entsprechende zum

Schnittpunkte der Träger der Reihen $T_{1k}$, $T_1$; folglich muss er der Berührungspunkt von $a_1$ an den Kegelschnitt $K_g^2$ sein, welcher durch die erwähnten Reihen hervorgebracht wird und welcher $a_1$ correspondirt. Zugleich ist aber — nach Construction — $T_1$ ein Punkt der Curve $C^4$. Somit erscheint $C^4$ als der Ort derjenigen Punkte, in denen die Tangenten an $K^2$ ihre correspondirenden Kegelschnitte $K_g^2$ berühren.

### 3. Darstellung der $C^4$ von den Punkten $M_1 M_2 M_3$ aus.

Wir wenden uns zu den Kegelschnitten $K_g^2$, welche in der quadratischen Transformation den Geraden durch $M_2 M_3$ zugeordnet sind. Sei $x_2$ eine Gerade durch $M_2$, so erhalten wir den zu $x_2$ gehörenden Kegelschnitt $K_g^2$, indem wir die projectivischen Reihen $T_{1k}$, $T_1$ auf $m_1$ und $x_2$ construiren, also letztere Geraden resp. mit der Projectivität $P_{1k}$ schneiden. Da aber diese Projectivität $m_2 m_3$ zu Doppelstrahlen hat und da $M_2$ in $m_3$ liegt, so sind die Reihen $T_{1k}$, $T_1$ zu einander perspectivisch und ihr Perspectivcentrum — $S_2$ — liegt in $m_2$. Daraus folgt, dass der Kegelschnitt $K_g^2$ in die zwei Punkte $M_2$ und $S_2$ degenerirt. Ziehen wir durch $S_2$ die Tangenten an $K^2$, so sind diese $K^2$ und $K_g^2$ gemeinsam und schneiden daher $x_2$ in zwei Punkten von $C^4$. Die Berührungspunkte dieser Tangenten mit $K^2$ liegen auf einer Geraden $x'_2$ durch $M_2$, weil $S_2$ in $m_2$ — der Polaren von $M_2$ — sich befindet.

Drehen wir die Gerade $x_2$ um $M_2$, so gehört zu jeder ihrer Lagen ein Punkt $S_2$ und mithin ein Strahl $x'_2$. Folglich ist das Büschel der $x_2$ zu dem der $x'_2$ projectivisch. In beiden Büscheln entsprechen sich aber $m_1 m_3$ vertauschbar; also sind die Büschel involutorisch. Es werden daher nicht nur die Tangenten in den Schnittpunkten von $x'_2$ mit $K^2$ aus $x_2$ Punkte von $C^4$ schneiden, sondern auch die Tangenten in den Schnittpunkten von $x_2$ mit $K^2$ aus $x'_2$.

Wir erkennen hieraus, dass $C^4$ durch $K^2$ und die letzterwähnte Involution — sie sei mit $J_2$ bezeichnet — auf ganz analoge Weise hervorgebracht wird, wie durch $K^2$ und $J_1$. Stellen wir nun die analoge Ueberlegung für die Geraden durch $M_3$ an, so finden wir, dass auch die ihnen correspondirenden Kegelschnitte $K_g^2$ in je zwei Punkten degeneriren. Wir werden auf eine Involution $J_3$ geführt, welche $m_1 m_2$ zu einem Paare hat und mit deren Hilfe wir $C^4$ aus $K^2$ erzeugen können.

Wir sind somit zu zwei neuen Involutionen — $J_2$, $J_3$ — gelangt, welche in Bezug auf $K^2$ und $C^4$ dieselbe Rolle spielen wie $J_1$. Die Doppelstrahlen dieser drei Involutionen müssen sich also viermal zu dreien in den vier Punkten schneiden, in welchen $K^2$ von $C^4$ berührt wird.

Denken wir uns die eindeutige Zuordnung der Punkte von $K^2$ und $C^4$ [1 c] durch zwei dieser Involutionen — etwa durch $J_1$, $J_2$ — vermittelt, so können wir sagen: Lassen wir den Schnittpunkt zweier

Strahlen durch $M_1 M_2$ einen Kegelschnitt $K^2$ durchlaufen, so bewegt sich der Schnittpunkt der in $J_1 J_2$ entsprechenden Strahlen auf einer Curve $C^4$.

Dabei ist $J_1 J_2$ in der Weise von $K^2$ abhängig, dass der Schnittpunkt der entsprechenden Strahlen zum Verbindungsstrahl der Scheitel mit diesen ein Tripel harmonischer Pole in Bezug auf $K^2$ bildet.

Uebertragen wir die Involutionen $J_1$, $J_2$, $J_3$ auf einen Kegelschnitt $H^2$, der durch die Scheitel der drei Involutionen geht, so können wir beweisen, dass die Pole dieser Involutionen in Bezug auf $H^2$ in einer Geraden liegen. Denn sei $A_1 A'_1$ ein correspondirendes Punktepaar von $K^2$ und $C^4$, so sind die Strahlen aus $M_1 M_2 M_3$ nach $A_1 A'_1$ entsprechende Paare der Involutionen $J_1$, $J_2$, $J_3$. Sie schneiden $H^2$ in sechs Punkten $P_1 P_2 P_3$, $P'_1 P'_2 P'_3$. Verbinden wir diese in der Reihenfolge $P_1 P'_1$, $P_2 P'_2$, $P_3 P'_3$, so bilden diese Verbindungslinien ein Dreieck, welches — wie wir anderen Ortes* bewiesen — zu dem Dreieck $M_1 M_2 M_3$ perspectivisch liegt. Also schneiden sich $P_1 P'_1$ und $m_1$, $P_2 P'_2$ und $m_2$, $P_3 P'_3$ und $m_3$ in Punkten einer Geraden. Diese Schnittpunkte sind aber die Pole der resp. Involutionen $J_1$, $J_2$, $J_3$.

Nun kann eine Gerade das Dreieck $m_1 m_2 m_3$ entweder in drei Punkten schneiden, welche in Bezug auf $H^2$ hyperbolisch sind, oder in einem hyperbolischen und in zwei elliptischen Punkten. Dementsprechend sind entweder alle drei Involutionen $J_1$, $J_2$, $J_3$ hyperbolisch und ihre Doppelstrahlen schneiden sich in vier reellen Punkten von $C^4$, oder nur eine dieser Involutionen ist hyperbolisch. Auf ihren reellen Doppelstrahlen liegen die vier imaginären Punkte, in welchen die Doppelstrahlen der drei Involutionen sich schneiden und in welchen $K^2$ $C^4$ berührt.

Wenn eine Gerade $x_1$ durch $M_1$ den Kegelschnitt $K^2$ in zwei imaginären Punkten schneidet, so sind diese durch die Involution harmonischer Pole in $x_1$ gegeben. Die Tangenten in diesen Punkten an $K^2$ gehen durch den Pol von $x_1$ in Bezug auf $K^2$ und werden durch die elliptische Involution $J_t$ bestimmt, welche diesen Pol zum reellen Scheitel hat und zur Involution harmonischer Pole auf $x_1$ perspectivisch liegt. Diese Tangenten treffen $x'_1$ — den zu $x_1$ in $J_1$ gehörenden Strahl — in zwei Punkten der $C^4$. Diese sind imaginär und durch die Punktinvolution definirt, welche $x'_1$ aus der Involution $J_t$ schneidet.

Die Strahlen der Involutionen $J_2$, $J_3$, welche $M_2$ resp. $M_3$ mit den imaginären Punkten auf $K^2$ und $C^4$ verbinden, sind nach dem Gesagten bestimmt und werden paarweise imaginär. Ihre Zuordnung in den Involutionen $J_2$, $J_3$ wird durch $K^2$ und $C^4$ ebenso vermittelt, wie die von reellen Strahlen. Im Kegelschnitt $H^2$, auf den die Involutionen über-

* Vergl. Bemerkungen über perspectivische Dreiecke, XXIX. Jahrg. dieser Zeitschrift S. 250.

tragen sind, macht sich diese Zuordnung in folgender Weise bemerkbar. Sei z. B. das Strahlenpaar aus $M_2$ über den imaginären Punkten von $K^2$ in $x_1$ durch eine Involution gegeben, deren Pol $J_k$ ist, und habe das entsprechende Strahlenpaar, dessen bestimmende Involution perspectivisch zur Punktinvolution auf $x'_1$ ist, zum Pole $J_c$, so müssen $J_k J_c$ auf einer Geraden liegen, welche durch den Pol der Involution $J_2$ geht.* In gleicher Weise finden wir, dass auch die Involutionen $J_3$, $J_1$ imaginäre Paare besitzen, und wir schliessen allgemein: **Die imaginären Punkte der $C^4$ liegen paarweise auf reellen Geraden durch ein $M$ und auf imaginären Geraden durch die beiden anderen $M$.**

Wir setzen nun voraus, dass $M_2 M_3$ imaginär werde. Dann sind $J_1$, $J_{1k}$ hyperbolische Involutionen und ihre Doppelstrahlen trennen sich. Sie sind also Paare einer elliptischen Involution und diese bestimmt das imaginäre Paar $m_2 m_3$ resp. $M_3 M_2$. Haben wir dann aus $K^2$ und $J_1$ die Curve $C^4$ gezeichnet, und übertragen wir die eindeutige Zuordnung der Punkte von $K^2$ und $C^4$ auf die Involutionen $J_2$, $J_3$, so sind damit zwei Involutionen definirt, welche imaginäre Scheitel haben. Die reellen Punkte von $K^2$ und $C^4$ sind reelle Scheitel der imaginären Strahlen dieser Involutionen.

### 4. Inflexionstangenten.

Sei $g_{1k}$ ein Doppelstrahl der Involution $J_{1k}$. Ihm entspreche in der Involution $J_1$ der Strahl $i_1$. Construiren wir nun auf $i_1$ die Punkte von $C^4$ nach der in 1 gegebenen Methode, so finden wir, dass diese Punkte in $M_1$ liegen. $i_1$ hat also in $M_1$ mit $C^4$ vier Punkte gemeinsam. Folglich ist $i_1$ eine Inflexionstangente von $C^4$. Indem wir dieselben Schlüsse für alle Doppelstrahlen der Involutionen $J_{1k}$, $J_{2k}$, $J_{3k}$ und ihre entsprechenden Strahlen in den Involutionen $J_1$, $J_2$, $J_3$ ziehen, erhalten wir sechs Inflexionstangenten — entsprechend der Zahl von Inflexionstangenten, welche eine $C^4$ mit drei Doppelpunkten besitzt. Zugleich erkennen wir aber, dass diese Doppelpunkte in unserem Falle **doppelte Inflexionsknoten** sind.

Die Punkte $M_1$, $M_2$, $M_3$ bilden, wie wir gesehen, ein Tripel harmonischer Pole in Bezug auf $K^2$. Daraus folgt, dass in zweien dieser Punkte die Involutionen $J_k$ hyperbolisch sind. Dementsprechend müssen die Inflexionstangenten an $C^4$ in zwei Punkten $M$ stets reell sein. Ist $M_2 M_3$ imaginär, so muss $J_{1k}$ hyperbolisch sein und die Inflexionstangenten in $M_1$ sind reell.

Wir wollen nun den degenerirten Kegelschnitt $K_g^2$ untersuchen, welcher in der unter 2 besprochenen quadratischen Transformation einer

* Nach dem allgemeinen Satze: Construiren wir zu den Strahlen einer Involution die correspondirenden in einer zweiten, so bilden diese eine dritte Involution und die Pole dieser drei Involutionen liegen in einer Geraden.

Inflexionstangente — sagen wir $i_2$ durch $M_2$ — correspondirt. Er besteht aus $M_2$ und einem Punkte $S_2$ auf $m_2$. Von $S_2$ gehen zwei Tangenten an $K^2$, welche $i_2$ in zwei Punkten von $C^4$ treffen. Diese fallen — weil $i_2$ Inflexionstangente ist — in $M_2$ zusammen. Also müssen auch die erwähnten Tangenten aus $S_2$ sich decken. Dies ist nur dann möglich, wenn $S_2$ einer der Punkte ist, in denen $m_2$ den Kegelschnitt $K^2$ schneidet. Da es zwei solche Punkte giebt, bemerken wir, dass derjenige zu $i_2$ gehört, welcher Perspectivcentrum der Reihen ist, welche die Projectivität $P_{1k}$ aus $m_1$ resp. $i_2$ schneidet.

Bezeichnen wir nun (Fig. 2)* die Doppelstrahlen der Involution $J_{1k}$ mit $g_{1k} g_{1k}^*$, mit $S_1 S_1^*$ die Schnittpunkte von $g_{1k} g_{1k}^*$ mit $m_1$ — also auch mit $K^2$ — und seien $i_1$, $i_1^*$ die Inflexionstangenten in $M_1$, so sind $g_{1k} i_1$ und $g_{1k}^* i_1^*$ Paare der Projectivität $P_{1k}$. Bezeichnen wir weiter die Schnittpunkte von $i_2$ mit $i_1$ durch $T_{12}$ und von $i_1$ mit $i_1^*$ durch $T_{1^*2}$, so sind $S_1^* T_{12}$ und $S_1 T_{1^*2}$ Paare der perspectivischen Reihen auf $m_1$ und $i_2$. Sie haben $S_2$ zum Perspectivcentrum. Also liegen $S_1^* T_{12}$ sowohl wie $S_1 T_{1^*2}$ auf Geraden durch $S_2$.

Führen wir den analogen Gedankengang für $i_2^*$ — die zweite Inflexionstangente in $M_2$ an $C^4$ — durch, so finden wir, dass $S_1^* T_{12}^*$ und $S_1 T_{1^*2^*}$ auf Geraden durch $S_2^*$ — dem zweiten Schnittpunkt von $m_2$ mit $K^2$ — liegen. Wir schliessen daher:

Das Viereck, welches die Geraden $m_1 m_2$ aus dem Kegelschnitt $K^2$ schneiden, ist dem Viereck der Punkte umschrieben, in denen sich die Inflexionstangenten in $M_1$ und $M_2$ schneiden.

Dieselbe Figur zeigt uns noch, dass $S_2 S_2^*$ durch $M_1 m_1$ harmonisch getrennt sind, folglich auch $T_{12}$ und $T_{12^*}$. Also bilden $i_2 i_2^* m_1 m_3$ eine harmonische Gruppe. In analoger Weise folgt, dass auch $i_1 i_1^* m_2 m_3$ eine harmonische Gruppe ist. Daraus ergiebt sich weiter, dass die Punkte $T_{12} T_{1^*2^*}$ und $T_{12^*} T_{1^*2}$ auf Geraden durch $M_3$ liegen. Wir können dies kurz so ausdrücken:

Das Viereck der $S$ hat mit dem Viereck der $T$ den Diagonalpunkt $M_3$ gemein.

Wir haben bis jetzt stillschweigend vorausgesetzt, dass $M_1 M_2$ in Bezug auf $H^2$ hyperbolische Punkte seien. Dann ist $M_3$ ein elliptischer Punkt und $K^2$ wird von $m_3$ in bestimmten imaginären Punkten geschnitten. Also sind auch die Vierecke, welche $m_1 m_3$ und $m_2 m_3$ aus $K^2$ schneiden, bestimmt und ebenso die Vierecke, in welchen die Inflexionstangenten in $M_1$ und $M_2$ die in $M_3$ treffen. Auch diese Vierecke sind ein-

* In Fig. 2 sind die Involutionen auf einen Kegelschnitt $H^2$ übertragen, der durch $M_1 M_2 M_3$ geht.

ander resp. umschrieben und je einer der Punkte $M$ ist für dieselben gemeinsamer Diagonalpunkt.

Werden $M_2 M_3$ imaginär, so sind nach der oben gegebenen Interpretation von $J_2 J_3$ auch in diesem Falle die Inflexionstangenten in $M_2$ und $M_3$ definirt, wenn wir sie als die entsprechenden zu den Strahlen dieser Involutionen auffassen, welche nach den Schnittpunkten von $K^2$ mit $m_2 m_3$ gehen.

## 5. Doppeltangenten.

Einer Doppeltangente von $C^4$ correspondirt in der quadratischen Transformation 2 ein Kegelschnitt $K_g^2$, welcher $K^2$ doppelt berührt. Zahl und Construction dieser Kegelschnitte giebt uns somit Aufschluss über Zahl und Construction der Doppeltangenten von $C^4$. Nun giebt es bekanntlich vier Kegelschnitte, welche drei Gerade — $m_1$, $m_2$, $m_3$ — zu Tangenten haben und einen Kegelschnitt $K^2$ doppelt berühren. Dementsprechend hat $C^4$ vier Doppeltangenten.

Wir construiren nun bekanntlich die Kegelschnitte $(K_g^2)$, welche einen Kegelschnitt $(K^2)$ doppelt berühren und drei Gerade $(m_1, m_2, m_3)$ zu Tangenten haben, auf folgende Weise. Wir betrachten zwei der Tangenten — sagen wir $m_2$, $m_3$ — als Doppelpaar einer Involution $J_{1m}$. Eine zweite Strahleninvolution am Scheitel $M_1$ ist die Involution $J_{1k}$. Von beiden Involutionen bestimmen wir das gemeinsame Paar. Die analogen Constructionen führen wir an den Scheiteln $M_2 M_3$ durch und erhalten so drei gemeinsame Paare, welche sich viermal zu dreien in vier Punkten schneiden. Diese sind die Pole der Berührungssehnen zwischen $K^2$ und den gesuchten Kegelschnitten $K_g^2$. Somit sind letztere bestimmt.

Nun ist $M_1 M_2 M_3$ ein Tripel harmonischer Pole in Bezug auf $K^2$. Ist dasselbe reell, so muss in zweien der Punkte $M$ die Involution $J_k$ hyperbolisch sein. Die Involutionen $J_m$ sind aber sämmtlich hyperbolisch. Ihre Doppelstrahlen sind Paare der resp. Involutionen $J_k$, werden also durch die Doppelstrahlen der Involutionen $J_k$ harmonisch getrennt. Daraus folgt, dass ein gemeinsames Paar zwischen einer Involution $J_m$ und einer Involution $J_k$ nur dann reell sein kann, wenn die Involution $J_k$ elliptisch ist. Finde dies am Scheitel $M_3$ statt und sei $h_3 h_3^*$ das gemeinsame Paar, so liegen auf ihm paarweise die Pole $P$, $P^*$ der gesuchten Berührungssehnen und sind bestimmte imaginäre Punkte. Die Berührungssehnen selbst sind also bestimmte imaginäre Gerade, welche durch die reellen Pole von $h_3 h_3^*$ gehen. Da $h_3 h_3^*$ ein Paar der Involution $J_{1k}$ ist, so sind diese Pole die Schnittpunkte von $h_3 h_3^*$ mit $m_3$.

Construiren wir jetzt aus den imaginären Punkten $PP^*$ die Tangenten an $K^2$, so berühren diese $K^2$ in den Schnittpunkten dieses Kegelschnittes mit den erwähnten imaginären Berührungssehnen. Diese Tangenten müssen rein imaginäre Gerade sein; denn enthielte eine solche einen reellen

Punkt, so würde die Polare desselben reell sein und durch den Berührungspunkt der Tangente mit $K^2$ gehen. Also wäre letzterer reell, was nach dem Gesagten ausgeschlossen ist. Auf diesen rein imaginären Geraden liegen die Punkte von $C^4$, welche Berührungspunkte der Doppeltangenten sind. Also müssen letztere imaginär sein. Wir schliessen also:

Sind die doppelten Inflexionsknoten von $C^4$ reell, so werden die vier Doppeltangenten imaginär.

Wir untersuchen jetzt den Fall, in welchem $M_2$, $M_3$ imaginär sind. Wir beginnen — wie oben — die Construction von $K_g^2$ damit, dass wir das gemeinsame Paar — $h_1 h_1^*$ — der Involutionen $J_{1k}$, $J_{1m}$ bestimmen. Dasselbe ist stets reell, weil $J_{1m}$ elliptisch ist. Auf $h_1 h_1^*$ liegen die Pole der gemeinsamen Berührungssehnen zwischen den Kegelschnitten $K_g^2$ und $K^2$. Die Berührungssehnen selbst gehen durch die Pole von $h_1 h_1^*$ in Bezug auf $K^2$, d. h. durch die Punkte $H_1^* H_1$, in denen $h_1 h_1^*$ die Gerade $m_1$ schneiden. Folgender Gedankengang führt zur weiteren Bestimmung dieser Sehnen. Wir ziehen durch $H_1$ (Fig. 3) ein Geradenpaar $w_1 w'_1$, welches durch $h_1^* m_1$ harmonisch getrennt wird, also einer Involution $J_{1w}$ angehört, für welche $h_1^* m_1$ die Doppelstrahlen sind. $w_1 w'_1$ schneide $K^2$ resp. in $OP$, $O'P'$. Construiren wir dann die Kegelschnitte $K_w^2$, $K_{w'}^2$, welche $K^2$ resp. in $OP$, $O'P'$ berühren und welche $m_1$ zur Tangente haben, so sind diese zu einander centrisch collinear in einer Collineation, für welche $M_1$ das Centrum und $m_1$ die Axe ist. Folglich gehen durch $M_1$ ein Paar gemeinsamer Tangenten $t_1 t'_1$ an diese Kegelschnitte. Ferner erkennen wir, dass sowohl $K_w^2$ als $K_{w'}^2$ mit sich selbst in centrischer Involution stehen für $H_1$ als Centrum und $h_1$ als Axe. Folglich müssen die Tangenten $t_1$, $t'_1$ durch $h_1 h_1^*$ harmonisch getrennt werden.

Lassen wir nun das Paar $w_1 w'_1$ die Involution $J_{1w}$ durchlaufen und construiren wir die entsprechenden Werthe $t_1$, $t'_1$, so bilden letztere eine Involution $J_{1t}$, für welche $h_1$, $h_1^*$ die Doppelelemente sind. Die Paare der Involution $J_{1w}$ sind also denen der Involution $J_{1t}$ eindeutig zugeordnet. Zur Involution $J_{1t}$ gehört auch das Paar $m_2 m_3$, weil dieses durch $h_1 h_1^*$ harmonisch getrennt wird. Construiren wir daher zu $m_2 m_3$ das correspondirende Paar in der Involution $J_{1w}$, so bestimmt dasselbe zwei Kegelschnitte $K_w^2$, welche $K^2$ doppelt berühren und $m_1$, $m_2$, $m_3$ zu Tangenten haben. Es stellt also zwei der gesuchten Berührungsebenen vor. Die anderen zwei erhalten wir, indem wir die analoge Construction — von $H_1^*$ ausgehend — durchführen.

Wir bemerken noch, dass von diesen zwei Paaren von Berührungssehnen nur das eine reell sein kann, wenn $M_2 M_3$ imaginär sein soll; denn wären beide reell, so müssten ihre Pole reell sein, also die Verbindungslinien der letzteren sich in reellen Punkten $M_2$, $M_3$ schneiden. Nun bilden die Pole dieser Sehnen auf einer der Geraden $h$ mit den resp. Schnittpunkten der Sehnen Paare der Involution harmonischer

Pole auf $h$ in Bezug auf $K^2$. Weil aber $m_1 h_1 h_1^*$ ein Tripel harmonischer Polaren in Bezug auf $K^2$ ist und weil $m_1$ den Kegelschnitt $K^2$ in reellen Punkten schneidet, so muss auch eine — und nur eine — der Linien $h$ aus $K^2$ zwei reelle Punkte schneiden. Auf dieser Linie $h$ ist folglich die Involution harmonischer Pole hyperbolisch, auf der andern elliptisch. Nun enthält aber nur die hyperbolische Involution der Pole imaginäre Paare. Daraus folgt, dass unter den in Rede stehenden Berührungssehnen diejenigen imaginär sind, welche durch den hyperbolischen Punkt $H$ gehen. Die anderen müssen reell sein.

Gehen wir jetzt von den Berührungssehnen zu den Doppeltangenten der $C^4$ über, so schliessen wir:

Hat $C^4$ einen reellen und zwei imaginäre Inflexionsknoten, so müssen von den vier Doppeltangenten zwei reell und zwei imaginär sein.

### 6. Involutorische Lage der $C^4$.

Sei $x_1 x'_1$ ein Paar der Involution $J_1$. $x_1$ treffe $K^2$ in $A_1 B_1$. Construiren wir in diesen Punkten die Tangenten an $K^2$, so schneiden diese sich in $S_1$ auf $m_1$ und werden durch $m_1$ und $S_1 M_1$ harmonisch getrennt. $x'_1$ trifft diese Tangenten in zwei Punkten — $A'_1$, $B'_1$ — der $C^4$. Also werden auch diese durch $M_1$ resp. $m_1$ harmonisch getrennt. Das Analoge gilt für Punkte von $C^4$, welche auf Geraden durch $M_2 M_3$ liegen. Wir sagen daher:

$C^4$ ist in dreierlei Weise zu sich selbst involutorisch. Centra dieser Involutionen sind die doppelten Inflexionsknoten. Ihre Verbindungslinien sind die resp. Axen der Involutionen.

Kennen wir also von $C^4$ einen Punkt $A'_1$ und ferner $M_1 M_2 M_3$, so können wir drei weitere Punkte $B'_1$, $C'_1$, $D'_1$ bestimmen. Dieselben bilden mit $A'_1$ ein Viereck, für welches die Punkte $M$ die Diagonalpunkte sind. Wir wollen dasselbe als ein Quadrupel von Punkten der $C^4$ bezeichnen. Der duale Gedanke führt uns zu vier Tangenten $a'_1$, $b'_1$, $c'_1$, $d'_1$ — einem Quadrupel von Tangenten — der $C^4$, welche ein Vierseit bilden, das $m_1 m_2 m_3$ zu Diagonalen hat.

Im Allgemeinen hat ein Kegelschnitt mit einer Curve vierter Ordnung acht Punkte gemein. Denken wir uns nun durch ein Quadrupel von Punkten der $C^4$ einen Kegelschnitt gelegt, so ist für denselben $M_1 M_2 M_3$ ein Tripel harmonischer Pole. Sei dann $E'_1$ ein weiterer gemeinsamer Punkt dieses Kegelschnittes und der Curve $C^4$, so müssen die drei übrigen gemeinsamen Punkte $F'_1$, $G'_1$, $H'_1$ mit $E'_1$ ein Quadrupel von Punkten bilden. Wir schliessen daher:

Hat ein Kegelschnitt — $K_q^2$ — mit $C^4$ ein Quadrupel von Punkten gemeinsam, so liegt auf ihm ein zweites Quadrupel von Punkten.

$C^4$ ist von der sechsten Classe, hat also mit einem Kegelschnitte zwölf Tangenten gemeinsam. Wird dieser von einem Quadrupel von Tangenten der $C^4$ berührt, so schliessen wir — analog wie oben —, dass seine weiteren gemeinsamen Tangenten mit $C^4$ zwei Quadrupel bilden.

Construiren wir in einem Punkte $A'_1$ von $C^4$ die Tangente $a'_1$, so wird durch $A'_1 a'_1$ und die Punkte, welche mit $A'_1$ ein Quadrupel bilden, ein Kegelschnitt $K^2$ bestimmt, der $C^4$ in den Punkten dieses Quadrupels berührt. Nun liegen auf $C^4$ unendlich viele Quadrupel von Punkten. Wir sagen daher:

Die Curve $C^4$ wird von unendlich vielen Kegelschnitten $K^2$ berührt, und zwar von jedem in den Punkten eines Quadrupels.

Für den Fall, dass $M_1 M_2 M_3$ reell sind, werden die Elemente eines Quadrupels der $C^4$ entweder alle reell oder alle imaginär sein. Sind aber $M_2 M_3$ imaginär, so können von den Elementen eines Quadrupels nur zwei reell sein und diese liegen auf einer reellen Geraden aus einem $M$, resp. sie schneiden sich in einem reellen Punkte einer Geraden $m$.

### 7. Kegelschnitte $K^2$.

Wir wenden uns zu den Kegelschnitten $K^2$, welche $C^4$ in den Punkten eines Quadrupels berühren. Sei $K_x^2$ ein solcher Kegelschnitt, der das Punktquadrupel $A'_1 B'_1 C'_1 D'_1$ und das in diesen Punkten berührende Tangentenquadrupel $a'_1 b'_1 c'_1 d'_1$ enthält, so suchen wir — von $K_x^2$ ausgehend — einen Kegelschnitt $K^2$, vermittelst dessen wir nach der in 1 angegebenen Methode die Curve $C^4$ erzeugen können, welche von $K_x^2$ in $A'_1 B'_1 C'_1 D'_1$ berührt wird.

Zu diesem Zwecke knüpfen wir an die Tangentenconstruction in einem Punkte $A'_1$ von $C^4$ an, welche unter 2 entwickelt wurde. Dort bestimmten wir die Tangente $a'_1$ in $A'_1$ unter Zuhilfenahme der Tangente $a_1$ in $A_1$ an $K^2$. Jetzt suchen wir $A_1 a_1$ und kennen $A'_1 a'_1$. Nehmen wir an, es sei eine beliebig durch $A'_1$ gezogene Gerade $a_1$ die Tangente an einen Kegelschnitt $K^2$, so müssen die Linien $m_1$, $m_2$, $m_3$, $a'_1$, $a_1$ einen Kegelschnitt $K_g^2$ umhüllen. Zeichnen wir in ihm für $a_1$ den Berührungspunkt $A_1$, so wird durch $a_1 A_1$ ein Kegelschnitt $K^{*2}$ bestimmt, welcher $M_1 M_2 M_3$ zum Tripel harmonischer Pole hat. Wir können nun zeigen, dass dieser Kegelschnitt $K^{*2}$ in Bezug auf $C^4$ die Eigenschaften des gesuchten Kegelschnittes $K^2$ besitzt.

Bezeichnen wir nämlich mit $B_1 b_1$, $C_1 c_1$, $D_1 d_1$ (Fig. 4) die Punkte und Tangenten von $K^{*2}$, welche von $A_1 a_1$ durch die Punkte und Geraden $Mm$ harmonisch getrennt werden, und liege $A_1 B_1$ auf einer Geraden $x_1$ durch $M_1$, $C_1 D_1$ auf einer Geraden $y_1$ durch $M_1$, so bilden $x_1 y_1$ mit $m_2 m_3$ eine harmonische Gruppe. Seien dann $x'_1 y'_1$ die Geraden durch $M_1$, welche $A'_1 B'_1$ resp. $C'_1 D'_1$ mit einander verbinden, so sind auch diese durch $m_2 m_3$ harmo-

nisch getrennt. Daraus folgt nach einem bekannten Gesetze, dass die Paare $x_1 x'_1$, $y_1 y'_1$, $m_2 m_3$ einer und derselben Involution $J_1$ angehören. Weiter bemerken wir, dass $b_1$ zu $a_1$ und $B'_1$ zu $A'_1$ centrisch collinear liegen in einer Collineation, deren Centrum $M_1$ und deren Axe $m_1$ ist. Da wir nun vorausgesetzt haben, dass $a_1$ durch $A'_1$ geht, so muss infolge der angedeuteten Lage auch $b_1$ durch $B'_1$ gehen. In analoger Weise können wir zeigen, dass $C'_1$ in $c_1$ und $D'_1$ in $d_1$ liegt. Mithin sind die Punkte $A'_1$, $B'_1$, $C'_1$, $D'_1$ und ihre Tangenten $a'_1, \ldots d'_1$ mit Hilfe von $K^{*2}$ und $J_1$ nach der in 1 resp. 2 entwickelten Methode gefunden. Nun giebt es aber nur eine $C^4$, welche durch $M_1 M_2 M_3$ und die acht Elemente $A'_1, \ldots D'_1$, $a'_1 \ldots d'_1$ geht. Bestimmen wir also aus $K^{*2}$ und $J_1$ nach der Methode von 1 weitere Punkte einer $C^4$, so müssen diese auch auf der Curve vierter Ordnung liegen, welche in $A'_1 \ldots D'_1$ von $a'_1 \ldots d'_1$ berührt wird. Mithin fällt $K^{*2}$ mit dem gesuchten Kegelschnitt $K^2$ zusammen. Er berührt $C^4$ in den Punkten eines Quadrupels, das auf den Doppelstrahlen der Involution $J_1$ liegt.

Drehen wir jetzt $a_1$ um $A'_1$, so gehört zu jeder Lage von $a_1$ ein Kegelschnitt $K^2$ und wir gelangen so zu den unendlich vielen Kegelschnitten, welche $C^4$ in den Punkten eines Quadrupels berühren. Jeder dieser Kegelschnitte $K^2$ mit zugehöriger Involution $J_1$ kann den Kegelschnitt $K^2$ und die Involution $J_1$ in 1 ersetzen. Berücksichtigen wir, dass sich analoge Resultate für die Scheitel $M_2 M_3$ ergeben, so schliessen wir:

Aus jedem der unendlich vielen Kegelschnitte $K^2$, welche $C^4$ in den Punkten eines Quadrupels berühren, lässt sich diese Curve nach der in 1 angegebenen Methode erzeugen und zwar je mit Hilfe einer Involution $J_x$ $(x = 1, 2, 3)$, deren Doppelstrahlen die Verbindungslinien von $M_x$ mit den Quadrupelpunkten auf $K^2$ sind.

Durch jeden der jetzt gefundenen Kegelschnitte $K^2$ wird eine quadratische Transformation von der Art geleitet, wie die unter 2 betrachtete war. Construiren wir in allen diesen Transformationen die Kegelschnitte $K_g^2$, welche einer Geraden $g$ correspondiren, so bilden diese eine Schaar, welche $g$, $m_1 m_2 m_3$ zu gemeinsamen Tangenten hat. Durchläuft $g$ die Ebene, so repräsentiren sämmtliche Kegelschnitte $K_g^2$ ein Netz, für welches $m_1$, $m_2$, $m_3$ die Grundtangenten sind. Greifen wir aus diesen Kegelschnitten $K_g^2$ irgend einen heraus und sei $g$ eine seiner Tangenten, so correspondirt er $g$ in einer quadratischen Transformation, deren Leitcurve auf folgende Weise gefunden wird. Wir ziehen aus den Punkten, in welchen $g$ die Curve $C^4$ schneidet, die zweiten Tangenten an $K_g^2$. Diese müssen auch $K^2$ berühren, und da überdies die Punkte $M_1$, $M_2$, $M_3$ ein Tripel harmonischer Pole für $K^2$ sind, so ist dieser Kegelschnitt bestimmt.

Es ist also ein Kegelschnitt $K_g^2$ jeder seiner Tangenten in Bezug auf einen Kegelschnitt $K^2$ zugeordnet. Wir können dies auch so ausdrücken: Jede Tangente eines Kegelschnittes $K_g^2$ correspondirt einem Kegelschnitt $K^2$ und $C^4$ erscheint als der Ort der Schnittpunkte dieser Tangenten mit den gemeinsamen Tangenten von $K_g^2$ und den resp. Kegelschnitten $K^2$.

### 8. Zusammenhang zwischen den Kegelschnitten $K^2$ und den Involutionen $J$.

Wir untersuchen nun, in welcher Weise die Kegelschnitte $K^2$ von den Involutionen $J$ abhängen. Zuerst heben wir hervor, dass $m_2 m_3$ ein gemeinsames Paar für alle Involutionen $J_1$ und für alle Involutionen $J_{1k}$ in Bezug auf die verschiedenen Kegelschnitte $K^2$ ist. Also schneiden letztere $m_1$ in Paaren einer Involution, für welche $M_2$, $M_3$ die Doppelpunkte sind. Den Strahlen aus $M_1$ nach den Schnittpunkten von $K^2$ mit $m_1$ correspondiren in den Involutionen $J_1$ die Inflexionstangenten $i_1$, $i_1^*$ in $M_1$ an $C^4$. Sind letztere reell, so müssen also auch die Schnittpunkte der Kegelschnitte $K^2$ mit $m_1$ reell sein. Da das Analoge für die Involutionen an den Scheiteln $M_2$, $M_3$ und für die Schnittpunkte von $K^2$ mit $m_2$, $m_3$ gilt, so schliessen wir:

Eine Gerade $m$ schneidet entweder sämmtliche Kegelschnitte $K^2$ reell oder imaginär.

Das Viereck der Schnittpunkte eines Kegelschnittes $K^2$ mit zweien der Geraden $m$ ist, wie wir oben (4) gesehen, dem Viereck der Schnittpunkte der Inflexionstangenten in zwei resp. Punkten $M$ eingeschrieben. Nun ist das letztere Viereck nur von $C^4$ abhängig. Ziehen wir daher durch eine seiner Ecken — sagen wir $T_{12}$ in Fig. 2 — eine beliebige Gerade, so trifft diese $m_1$ resp. $m_2$ in zwei Punkten — $S_1$, $S_1^*$ — eines Kegelschnittes $K^2$ und derselbe ist durch diese zwei Punkte bestimmt. Zugleich erkennen wir, dass stets zwei Vierecke der $S$ gezeichnet werden können, welche dem Vierecke der $T$ eingeschrieben sind und welche sich in zwei Punkten auf einer Linie $m$ schneiden. Zu jedem dieser Vierecke gehört ein Kegelschnitt $K^2$ und es berühren sich also diese Kegelschnitte paarweise in je zwei Punkten einer Linie $m$.

Für die Involution $J_1$ ist $M_1 A_1$, $M_1 A'_1$ (Fig. 4) ein Paar. Lassen wir nun $A'_1$ fest, so hängen die verschiedenen Werthe der Involutionen $J_1$ nur vom Orte der Punkte $A_1$ ab, da wir oben gesehen, dass $m_2 m_3$ allen Involutionen $J_1$ gemeinsam ist. Wir untersuchen also den Ort der Punkte $A_1$. $A_1$ wurde gefunden als Berührungspunkt eines Kegelschnittes $K_g^2$, der $m_1$, $m_2$, $m_3$, $a_1$, $a'_1$ zu Tangenten hatte. Drehen wir nun $a_1$ um $A'_1$, so bilden sämmtliche Kegelschnitte $K_g^2$ eine Schaar, für welche $m_1$, $m_2$, $m_3$, $a'_1$ die Grundtangenten sind. Construiren wir nach dem Satze von Brianchon — Fig. 5 — auf dem Büschel der $a_1$ in den Kegel-

schnitten $K_g^2$ die Berührungspunkte $A_1$, so finden wir, dass letztere als Schnittpunkte des Büschels der $a_1$ mit einem zu ihm projectivischen erhalten werden. Der Scheitel dieses Büschels kann — entsprechend der verschiedenen Anordnung der Reihenfolge der Tangenten im Brianchon-Sechsseit — in jedem der Punkte $M$ liegen. (In Fig. 5 liegt er in $M_2$.) Daraus folgt, dass die Punkte $A_1$ sich auf einem Kegelschnitte $K_s^2$ befinden, der durch $A'_1 M_1 M_2 M_3$ geht. Liegt $a_1$ in $a'_1$, so fällt $A_1$ mit $A'_1$ zusammen, d. h. der Kegelschnitt $K_s^2$ wird in $A'_1$ von $a'_1$ berührt.

Mit Hilfe von $K_s^2$ können wir sowohl die Kegelschnitte $K^2$, wie ihre zugehörigen Involutionen $J$ zeichnen. Jede Gerade durch $A'_1$ ist Tangente eines Kegelschnittes $K^2$ und trifft $K_s^2$ zum zweiten Male in ihrem Berührungspunkte mit $K^2$. Durch Punkt und Tangente ist aber $K^2$ bestimmt, weil $M_1 M_2 M_3$ für ihn ein Tripel harmonischer Pole ist. Uebertragen wir die Involutionen $J_1$ auf den Kegelschnitt $K_s^2$, so liegen ihre Pole auf $m_1$, weil $m_2 m_3$ ein Paar aller Involutionen $J_1$ ist. Sie liegen auch jeweilen auf den Geraden $a_1$, denn jede Lage von $a_1$ trifft $K_s^2$ in Punkten $A'_1$, $A_1$, welche mit $m_1$ verbunden ein Paar einer Involution $J_1$ ergeben.

Verfolgen wir nun den analogen Gedankengang, indem wir von den Punkten $M_2$, $M_3$ ausgehen, so werden wir auf denselben Kegelschnitt $K_s^2$ geführt wie oben, und können demselben die Involutionen $J_2$, $J_3$ entnehmen. Die Pole der letzteren Involutionen liegen in den Schnittpunkten der Geraden $a_1$ mit $m_2$ resp. $m_3$.

Durch $C^4$ werden — wie wir unter 3 gesehen — einem Kegelschnitt $K^2$ drei Involutionen $J_1$, $J_2$, $J_3$ zugeordnet. Uebertragen wir diese auf einen Kegelschnitt $K_s^2$, der durch die drei Scheitel der Involutionen geht, so wird jetzt diese Zuordnung dadurch vermittelt, dass die Pole von drei Involutionen, welche zu demselben Kegelschnitt $K^2$ gehören, in einer Geraden — $a_1$ — liegen.

Geben wir nun von einer Curve $C^4$ die Punkte $M_1$, $M_2$, $M_3$ und einen weiteren Punkt $A'_1$ mit seiner Tangente $a'_1$, so können wir $C^4$ nach folgendem Gesetze construiren. Wir legen durch $M_1 M_2 M_3 A'_1 a'_1$ einen Kegelschnitt $K_s^2$. Sei dann $a_1$ eine beliebige Gerade durch $A'_1$ und schneide sie $m_1 m_2 m_3$ resp. in $T_1 T_2 T_3$, so construiren wir aus diesen Punkten die Tangenten an $K_s^2$ und verbinden ihre Berührungspunkte resp. mit $M_1 M_2 M_3$. Auf diese Weise erhalten wir sechs Gerade, welche sich viermal zu dreien in einem Quadrupel von Punkten der $C^4$ schneiden. Ziehen wir speciell die Geraden durch $A'_1$ nach den Punkten $M_1$, $M_2$, $M_3$ von $C^4$, so erhalten wir mittels der angegebenen Construction die Inflexionstangenten in $M_1 M_2 M_3$.

Benutzen wir anstatt der Pole die Polaren der Involutionen $J_1$, $J_2$, $J_3$ in Bezug auf $K_s^2$, so ergiebt sich für die Construction von $C^4$ ein Gesetz, welches dem angeführten dual gegenübersteht.

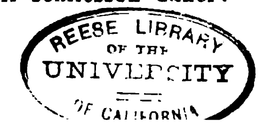
Sind $M_1 M_2 M_3$ reell, so erkennen wir leicht mit Hilfe des Kegelschnittes $K_s^2$, ob ein Kegelschnitt $K^2$ die Curve $C^4$ in einem reellen oder imaginären Quadrupel berührt. Ersteres wird eintreten, wenn die Doppelstrahlen der Involutionen $J_1$, $J_2$, $J_3$, welche zu $K^2$ gehören, alle reell sind. Dies hängt von der gegenseitigen Lage der Punkte $A_1$, $A'_1$ ab und wird immer stattfinden, wenn $A_1$ und $A'_1$ zwischen den nämlichen zweien der drei Punkte $M$ gelegen sind. Dann trifft $a_1$ die Geraden $m$ in Punkten, für welche die Involutionen harmonischer Polaren in Bezug auf $K_s^2$ hyperbolisch sind. Dementsprechend werden auch $J_1 J_2 J_3$ hyperbolisch sein.

In jedem andern Falle ist das Quadrupel imaginär, liegt aber, da eine der drei Involutionen $J_1$, $J_2$, $J_3$ stets hyperbolisch ist, auf den zwei reellen Geraden dieser hyperbolischen Involution und überdies auf einem reellen Kegelschnitt $K^2$. Daher ist es durch reelle Elemente vollkommen definirt.

Jeder Punkt $A'_1$ der Curve $C^4$ führt auf die angegebene Weise zu einem Kegelschnitt $K_s^2$. Wir können denselben als Ort aller der Punkte $A_1$ auffassen, welche dem Punkte $A'_1$ in Bezug auf sämmtliche Kegelschnitte $K^2$ zugeordnet sind. Daraus schliessen wir aber, dass jeder Kegelschnitt, der durch $M_1 M_2 M_3$ und zwei in Bezug auf einen Kegelschnitt $K^2$ einander zugeordnete Punkte $A_1$, $A'_1$ geht, ein Kegelschnitt $K_s^2$ ist und also $C^4$ in $A'_1$ berührt. Kennen wir daher $M_1 M_2 M_3 A_1 A'_1$, so können wir den Kegelschnitt $K_s^2$ benutzen, um in $A'_1$ die Tangente an $C^4$ zu construiren. Wir erhalten dann eine Construction, welche der in 2 entwickelten dual gegenübersteht.

### 9. Netz der Kegelschnitte durch $M_1 M_2 M_3$.

Wir können die Kegelschnitte $K_s^2$ einer allgemeinen Gruppe von Kegelschnitten unterordnen und gehen zu diesem Zwecke von zwei Punkten $A'_1$, $E'_1$ der $C^4$ aus. Jedem derselben entspricht in Bezug auf einen Kegelschnitt $K^2$ ein Punkt von $K^2$ — sagen wir $A'_1$ der Punkt $A_1$ und $E'_1$ der Punkt $E_1$. Dann sind $A'_1 A_1$ oder $a_1$ und $E'_1 E_1$ oder $e_1$ Tangenten an $K^2$. Lassen wir nun $K^2$ alle möglichen Werthe annehmen, so erhalten wir unendlich viele einander eindeutig zugeordnete Tangentenpaare $a_1 e_1$ durch $A'_1$ resp. $E'_1$, d. h. zwei zu einander projectivische Büschel von Tangenten. Der Ort der Schnittpunkte entsprechender Tangenten dieser Büschel muss also ein Kegelschnitt — $K_m^2$ — sein. Derselbe geht durch $A'_1 E'_1$, weil diese Punkte die Scheitel der erwähnten projectivischen Büschel sind. Er enthält $M_1 M_2 M_3$, da wir diese Punkte — resp. die Inflexionstangenten in ihnen — als degenerirte Kegelschnitte $K^2$ auffassen müssen. $K_m^2$ ist also durch $M_1 M_2 M_3 A'_1 E'_1$ bestimmt. Nun waren $A'_1 E'_1$ beliebige Punkte von $C^4$. Wir schliessen daher:



Legen wir durch zwei Punkte $A'_1$, $E'_1$ von $C^4$ und durch $M_1 M_2 M_3$ einen Kegelschnitt $K_m^2$, so sind die Geraden, welche $A'_1 E'_1$ mit einem beliebigen Punkte von $K_m^2$ verbinden, Tangenten eines Kegelschnittes $K^2$, der $C^4$ in den Punkten eines Quadrupels berührt.

Jeder Kegelschnitt durch $M_1 M_2 M_3$ enthält ausser diesen Inflexionsknoten noch zwei Punkte der $C^4$, also muss er von der Art der Kegelschnitte $K_m^2$ sein. Diese repräsentiren mithin das Netz der Kegelschnitte, welche $M_1 M_2 M_3$ zu Grundpunkten haben. Ist $A'_1$ dem $E'_1$ unendlich benachbart, so berührt der zugehörige Kegelschnitt $K_m^2$ die Curve $C^4$. Er ist von der Art der in 8 besprochenen Kegelschnitte $K_s^2$.

Geben wir nun zu den Involutionen $J_1$, $J_2$, $J_3$ über und übertragen wir dieselben auf einen Kegelschnitt $K_m^2$, so wissen wir, dass ihre Pole (3) in einer Geraden liegen. Diese Geraden gehen durch einen Punkt $T$. Denn construiren wir z. B. die Pole der Involutionen $J_1$, $J_2$, so liegen diese auf $m_1$ resp. $m_2$. Jedem Kegelschnitt $K^2$ ist ein Pol in $m_1$ und einer in $m_2$ zugeordnet. Also bilden diese Pole projectivische Reihen. In denselben entspricht sich der Punkt $M_3$ selbst; also sind diese perspectivisch und die Verbindungslinien entsprechender Punkte gehen durch einen Punkt $T$. Auf diesen Verbindungslinien liegen aber auch die Pole der Involutionen $J_3$ und unsere Behauptung ist damit bewiesen.

Wir erhalten nun $T$ durch folgende Ueberlegung. Der Strahl aus $M_1$ nach $A'_1$ ist ein Doppelstrahl einer Involution $J_1$. Diese gehört zu dem Kegelschnitt $K^2$, welcher in $A'_1$ die Curve $C^4$ berührt. Zu dem gleichen Kegelschnitt $K^2$ gehören aber auch die Involutionen $J_2$ resp. $J_3$, für welche $M_2 A'_1$ resp. $M_3 A'_1$ je ein Doppelstrahl ist. Also liegen die Pole von $J_1$, $J_2$, $J_3$ in der Tangente, welche $K_m^2$ in $A'_1$ berührt. In analoger Weise schliessen wir, dass die Involutionen, für welche $M_1 E'_1$, $M_2 E'_2$, $M_3 E'_3$ je ein Doppelstrahl ist, ihre Pole auf der Tangente haben, welche in $E'_1$ an $K_m^2$ geht. Folglich muss der Schnittpunkt der Tangenten in $A'_1$ und $E'_1$ an $K_m^2$ der gesuchte Pol sein. Wir sagen daher:

Construiren wir die Pole der zu den Kegelschnitten $K^2$ gehörigen Involutionen $J_1$, $J_2$, $J_3$ in Bezug auf einen Kegelscnitt $K_m^2$, so liegen diese Pole in den Geraden eines Büschels. Dasselbe hat zum Scheitel den Pol derjenigen Geraden, welche die Schnittpunkte $A'_1 E'_1$ von $C^4$ und $K^2$ verbindet.

Es ist durch das Gesagte jedem Kegelschnitt $K^2$ eine Tangente $a_1$ durch $A'_1$ und eine Gerade $t$ durch $T$ zugeordnet. Also bilden die Geraden $a_1$ und die Geraden $t$ zwei zu einander projective Büschel und der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen ist ein Kegelschnitt. Derselbe geht durch $A'_1 T M_1 M_2 M_3$. Er berührt in $A'_1$ die Curve $C^4$. Denn betrachten wir die Tangente in $A'_1$ an $K_m^2$ als eine Gerade des Büschels

um $T$, so gehört zu ihr ein Kegelschnitt $K^2$, der in $A'_1$ die Curve $C^4$ berührt. Also muss dieser Tangente im Büschel um $A'_1$ diejenige Gerade $a'_1$ entsprechen, welche in $A'_1$ Tangente an $C^4$ ist, d. h. $a'_1$ muss den aus den Büscheln der $t$ und $a_1$ erzeugten Kegelschnitt berühren. Dieser gehört zu den Kegelschnitten $K_s^2$. Wir ergänzen also das zuletzt Hervorgehobene dahin:

Die Kegelschnitte $K_s^2$, welche durch $T$ und $A'_1$ resp. $E'_1$ gehen, berühren in letzteren Punkten die Curve $C^4$.

### 10. Erzeugung der $C^4$ aus einem Kegelschnitt $K_m^2$. Lineare Construction von $C^4$.

Wir knüpfen an das Vorhergehende einige Anwendungen. Zuerst heben wir eine Erzeugung der $C^4$ hervor, welche eine Verallgemeinerung der in 8 angeführten ist und sich wie folgt aussprechen lässt:

Seien $M_1$, $M_2$, $M_3$ drei beliebige Punkte eines Kegelschnittes — $K_m^2$ — und $m_1$, $m_2$, $m_3$ ihre resp. Verbindungslinien. Ziehen wir dann durch einen Punkt $T$ der Ebene Gerade, so schneiden diese $m_1 m_2 m_3$ in Polen von Involutionen, deren Scheitel $M_1$, $M_2$, $M_3$ sind und deren Doppelstrahlen sich in je vier Punkten einer $C^4$ treffen. Diese schneidet $K_m^2$ in den Schnittpunkten der Polare von $T$ in Bezug auf $K^2$.

Die Geraden durch $T$ nach $M_1 M_2 M_3$ treffen resp. $m_1 m_2 m_3$ in Polen, deren Involutionen die Inflexionstangenten zu Doppelstrahlen haben. Operiren wir mit den Polaren der Involutionen anstatt mit den Polen, so erhalten wir eine Erzeugungsweise, welche zu der obigen dual ist.

Da unter den Kegelschnitten $K_m^2$ stets ein Kreis ist, so schliessen wir daraus, dass die auf angegebene Weise mit Hilfe dieses Kreises $K_m^2$ erzeugte $C^4$ die allgemeine Form dieser Curve ist. Also können wir $C^4$ stets aus einem Kreise ableiten.

Wir werden vorstehende Construction benutzen, wenn wir von der Curve vierter Ordnung die Punkte $M_1$, $M_2$, $M_3$ und $A'_1$, $E'_1$ kennen und wenn $M_1$, $M_2$, $M_3$ reell sind. Werden aber $M_2$, $M_3$ imaginär, so bestimmen wir zunächst die reellen Doppelstrahlen der Involution $J_1$ und dann auf ihnen Punkte von $C^4$ mit Hilfe der Kegelschnitte $K^2$, welche wir aus $K_m^2$ ableiten können. Dagegen lassen sich in beiden Fällen — ob $M_2 M_3$ reell oder imaginär ist — die Tangenten in $A'_1$ resp. $E'_1$ — ohne Benutzung eines Kegelschnittes $K^2$ zeichnen. Wir legen den Kegelschnitt durch $M_1 M_2 M_3 A'_1 E'_1$, bestimmen in Bezug auf ihn zur Linie $A'_1 E'_1$ den Pol $T$. Dann berührt der Kegelschnitt durch $M_1 M_2 M_3 T A'_1$ die Curve $C^4$ in $A'_1$.

Im Anschluss an diese Tangentenconstruction bemerken wir noch Folgendes. Halten wir $A'_1$ fest und durchlaufe $E'_1$ die Curve $C^4$, so

bilden alle Kegelschnitte $K_m^2$, welche durch $A'_1$ gehen, ein Büschel. Mit Hilfe jedes Kegelschnittes dieses Büschels können wir die Tangente in $A'_1$ an $C^4$ construiren und erhalten dabei stets denselben Kegelschnitt $K_s^2$. Folglich ist dieser der Ort der Pole sämmtlicher Geraden $A'_1 E'_1$ in Bezug auf die resp. Kegelschnitte $K_m^2$. Wir können daher die Punkte von $C^4$ auch nach folgendem Gesetze finden:

Wir gehen aus von einem Kegelschnittbüschel mit den Grundpunkten $M_1, M_2, M_3, A'_1$. $K_s^2$ sei ein Kegelschnitt dieses Büschels. Ziehen wir durch $A'_1$ eine Gerade und betrachten wir diese als Tangente eines Kegelschnittes — $K_m^2$ — des Büschels, so ist dieser dadurch individualisirt. Schneidet dann diese Tangente den Kegelschnitt $K_s^2$ ein zweites Mal in $T$, so trifft die Polare von $T$ in Bezug auf $K_m^2$ diesen Kegelschnitt in einem zweiten Punkte — $E'_1$ — der $C^4$. Wir können dies auch so ausdrücken:

Die Punkte des Kegelschnittes $K_s^2$ sind den übrigen Kegelschnitten $K_m^2$ des Büschels in der Weise zugeordnet, dass die Polaren dieser Punkte in Bezug auf ihre correspondirenden Kegelschnitte sich in einem Grundpunkte $A'_1$ des Büschels treffen. Dann liegen die Schnittpunkte dieser Polaren mit ihren resp. Kegelschnitten auf einer $C^4$.

Die letzterwähnten Constructionen gestatten uns, $C^4$ durch Punkte und Tangenten rein linear zu construiren, wenn wir $M_1$, $M_2$, $M_3$ und zwei weitere Punkte oder einen Punkt mit seiner Tangente kennen.

### 11. Erzeugung von $C^4$ aus Kegelschnittbüscheln und -Schaaren.

Wir gehen aus von den Kegelschnitten $K_q^2$, welche zwei Quadrupel von Punkten der $C^4$ enthalten. Ein Quadrupel — $A'_1 B'_1 C'_1 D'_1$ — liegt mit jedem andern auf einem solchen Kegelschnitte und die Gesammtheit dieser Kegelschnitte bildet ein Büschel $B^2$, das $A'_1 B'_1 C'_1 D'_1$ zu Grundpunkten hat. Das Strahlenpaar, welches von einem der Punkte $M$ — sagen wir $M_1$ — ausgeht und das einen Kegelschnitt des Büschels $B^2$ in den Punkten eines Quadrupels schneidet, wird durch $m_2 m_3$ harmonisch getrennt. Mithin bilden alle diese Strahlenpaare eine Involution — $J_{1m}$ —, für welche $m_2$, $m_3$ die Doppelstrahlen sind. Ordnen wir nun jedem Quadrupel den Kegelschnitt des Büschels $B^2$ zu, auf welchem dieses Quadrupel liegt, so ist damit auch jedem Strahlenpaare der Involution $J_{1m}$ ein Kegelschnitt des Büschels $B^2$ zugeordnet. $B^2$ und $J_{1m}$ sind zu einander projectivisch. In dieser Projectivität correspondiren den Doppelstrahlen der Involution $J_{1m}$ die Kegelschnitte des Büschels $B^2$, welche in die Geraden durch $M_2 M_3$ zerfallen. Der Kegelschnitt aber, welcher in den Grundpunkten $A'_1, \ldots D'_1$ des Büschels die Curve $C^4$ berührt, muss den Strahlen durch $M_1$ entsprechen, welche die Grundpunkte des

Büschels verbinden. Schneiden wir das Büschel $B^2$ und die Involution $J_{1m}$ mit $m_1$, so erhalten wir in dieser Geraden zwei zu einander projectivische Punktinvolutionen, für welche $M_2 M_3$ sich entsprechende Paare sind. Jedes Quadrupel von Punkten der $C^4$ führt in Bezug auf einen Punkt $M$ zu einer Projectivität der erwähnten Art.

Eine andere Projectivität erhalten wir, wenn wir irgend zwei Büschel $B^2$ durch $C^4$ aufeinander bezogen denken. Seien diese Büschel mit $B_1^2$, $B_2^2$ bezeichnet und haben sie $A'_1$, $B'_1$, $C'_1$, $D'_1$ resp. $E'_1$, $F'_1$, $G'_1$, $H'_1$ zu Grundpunkten, so schneidet jeder Kegelschnitt $K_1^2$ des Büschels $B_1^2$ die Curve $C^4$ in einem zweiten Quadrupel von Punkten. Durch dieses und die Grundpunkte des zweiten Büschels $B_2^2$ geht ein Kegelschnitt $k_2^2$. Auf diese Weise sind durch $C^4$ die Büschel $B_1^2$, $B_2^2$ zueinander projectivisch gemacht. $C^4$ ist Erzeugniss der projectivischen Büschel.

Untersuchen wir die Projectivität näher, so erkennen wir, dass den drei degenerirten Kegelschnitten des einen Büschels, welche durch $M_1$, $M_2$, $M_3$ gehen, die degenerirten Kegelschnitte des andern entsprechen. Unter den Kegelschnitten jedes Büschels ist einer, der $C^4$ in den Grundpunkten des Büschels berührt. Ihm correspondirt im andern Büschel jeder Kegelschnitt, welcher durch die Grundpunkte des ersteren Büschels geht. Wir können dies auch so ausdrücken: Dem Kegelschnitt durch die acht Grundpunkte beider Büschel entspricht in jedem Büschel der Kegelschnitt, welcher $C^4$ in den Grundpunkten dieses Büschels berührt.

Haben wir jetzt die Projectivität der Büschel $B_1^2$, $B_2^2$ durch $C^4$ vermittelt gedacht, so können wir umgekehrt $C^4$ aus zwei solchen Büscheln erzeugen und dies dahin aussprechen:

Sind zwei Kegelschnittbüschel, deren Grundpunktvierecke dieselben Diagonalpunkte $M_1$, $M_2$, $M_3$ haben, in der Weise aufeinander bezogen, dass die degenerirten Kegelschnitte durch denselben Punkt $M$ sich entsprechen, so ist der Ort der Schnittpunkte correspondirender Kegelschnitte beider Büschel seine Curve $C^4$, für welche $M_1$, $M_2$, $M_3$ doppelte Inflexionsknoten sind.

Ein dualer Gedankengang wie der jetzt durchgeführte ergiebt Erzeugungsweisen der $C^4$ aus Kegelschnittschaaren. Die Tangenten eines Quadrupels der $C^4$ sind Grundtangenten einer Schaar. Dann wird durch $C^4$ eine ein-zweideutige Projectivität zwischen den Kegelschnitten dieser Schaar und den Paaren einer Involution vermittelt, welche zwei Punkte $M$ zu Doppelpunkten hat; denn jeder Kegelschnitt der Schaar enthält ausser den Grundtangenten noch zwei Quadrupel von Tangenten der $C^4$ und diese schneiden die Geraden $m$ in den Paaren der angedeuteten Involutionen.

Weiter kann $C^4$ durch zwei Schaaren erzeugt werden, deren Grundtangentenvierseite dieselben Diagonalen haben und welche so aufeinander

bezogen sind, dass jedem Kegelschnitt der einen Schaar zwei der andern entsprechen. $C^4$ ist Enveloppe der gemeinsamen Tangenten entsprechender Kegelschnitte.

**12. Büschel der sich doppelt berührenden Kegelschnitte $K_q^2$.**

Wir wollen nun die Kegelschnitte $K_q^2$ nach einem neuen Gesichtspunkte gruppiren und schicken zu diesem Zwecke eine allgemeine Bemerkung über Kegelschnitte voraus.

Sei $K^2$ ein beliebiger Kegelschnitt und sei $M_1$, $m_1$ in Bezug auf denselben Pol und Polare. Ziehen wir dann durch $M_1$ zwei Gerade $x_1$, $x'_1$, welche $K^2$ in $A_1 B_1 E_1 F_1$ treffen sollen, so schneiden sich die Verbindungslinien dieser Punkte in einem Tripel harmonischer Pole in Bezug auf $K^2$. $M_1$ ist für dasselbe eine Ecke. Die beiden anderen — $Z$, $Z'$ — liegen in $m_1$. Construiren wir sodann die Tangenten in $A_1 B_1 E_1 F_1$ an $K^2$, so treffen diese $x'_1$ resp. $x_1$ in Punkten — $A'_1 B'_1$, $E'_1 F'_1$ —, deren Verbindungslinien ebenfalls durch die Tripelecken $M_1 Z Z'$ gehen. Mithin haben alle Kegelschnitte, welche durch die vier Punkte $A'_1$, $B'_1$, $E'_1$, $F'_1$ gehen, mit dem Kegelschnitt $K^2$ das Tripel $M_1 Z Z'$ gemeinsam.

Sei nun $K^2$ einer der Kegelschnitte, welche $C^4$ in den Punkten eines Quadrupels berühren, und sei $x_1 x'_1$ ein Paar der zu $K^2$ gehörenden Involution $J_1$, so sind $A'_1$, $B'_1$, $E'_1$, $F'_1$ vier Punkte von $C^4$. Zeichnen wir dann zu $x_1 x'_1$ die vierten harmonischen $y_1 y'_1$ in Bezug auf $m_2 m_3$, so liegen auf $y_1 y'_1$ die Punkte $C'_1 D'_1$ resp. $G'_1 H'_1$ der $C^4$, welche $A'_1 B'_1$ resp. $E'_1 F'_1$ zu zwei Quadrupeln ergänzen. Durch letztere geht ein Kegelschnitt $K_q^2$, der mit $K^2$ das Tripel $m_1 m_2 m_3$ gemeinsam hat. Da aber auf $K_q^2$ auch die Punkte $A'_1$, $B'_1$, $E'_1$, $F'_1$ liegen, so ist nach der oben gemachten Bemerkung auch $M_1 Z Z'$ ein Tripel harmonischer Pole für $K^2$ und $K_q^2$. Also ist die Involution harmonischer Polaren — $J_{1k}$ — um $M_1$ für $K^2$ und $K_q^2$ dieselbe. Mithin müssen sich $K^2$ und $K_q^2$ in zwei Punkten von $m_1$ berühren. Heben wir noch hervor, dass $y_1 y'_1$ ebenso wie $x_1 x'_1$ ein Strahlenpaar der Involution $J_1$ ist, so schliessen wir:

Zwei Strahlenpaare einer Involution $J_1$, welche durch $m_2 m_3$ harmonisch getrennt sind, enthalten zwei Quadrupel der $C^4$, die auf einem Kegelschnitte $K_q^2$ liegen, welcher den zu $J_1$ gehörenden Kegelschnitt $K^2$ in zwei Punkten von $m_1$ berührt.

Wir erhalten so ein Büschel sich doppelt berührender Kegelschnitte $K_q^2$, welche zu demselben Kegelschnitt $K^2$ resp. zu derselben Involution $J_1$ gehören. Wir können nun zeigen, dass in diesem Büschel ausser $K^2$ noch ein Kegelschnitt — $K^{*2}$ — vorkommt, der $C^4$ in den Punkten eines Quadrupels berührt. Wir construiren ihn und seine Involution $J_1^*$ nach folgender Ueberlegung. Es giebt in jeder Involution — also auch in $J_1$ — stets ein Strahlenpaar, das mit einem gegebenen — sagen wir $m_2 m_3$ —

eine harmonische Gruppe bildet. Haben wir die Involution $J_1$ auf einen Kegelschnitt $H^2$, welcher durch $M_1$ geht, übertragen (Fig. 6), so finden wir dieses Paar, indem wir $m_2 m_3$ als Doppelstrahlen einer Involution $J_{1m}$ betrachten, ihren Pol $J_{1m}$ mit dem Pole von $J_1$ verbinden und mit dieser Linie $H^2$ schneiden. Die Strahlen $g_1^*$, $h_1^*$ aus $M_1$ nach diesen Schnittpunkten repräsentiren das gesuchte Paar. Auf ihm liegen vier Punkte $A'_1$, $B'_1$, $E'_1$, $F'_1$ der $C^4$. Ergänzen wir dieselben zu zwei Quadrupeln $A'_1 \ldots D'_1$, $E'_1 \ldots H'_1$, so fallen $C'_1 D'_1$ mit $E'_1 F'_1$ und $G'_1 H'_1$ mit $A'_1 B'_1$ zusammen. Also muss der Kegelschnitt, welcher durch diese zwei sich deckenden Quadrupel geht, dem Büschel der Kegelschnitte $K_q^2$ angehören und $C^4$ in den Punkten $A'_1$, $B'_1$, $E'_1$, $F'_1$ berühren. Es ist der gesuchte Kegelschnitt $K^{*2}$ (vergl. 8).

Ueber die gegenseitigen Beziehungen von $K^2 K^{*2}$ resp. $J_1 J_1^*$ machen wir noch einige Bemerkungen. Im Hilfskegelschnitt $H^2$ bilden die Pole der Involutionen $J_1$, $J_{1m}$, $J_1^*$ ein Tripel harmonischer Pole und es werden somit $J_1$, $J_1^*$ durch $m_2 m_3$ harmonisch getrennt. Daher kann bei reellem $m_2 m_3$ nur eine der Involutionen $J_1$, $J_1^*$ reell sein; dementsprechend wird nur einer der Kegelschnitte $K^2$, $K^{*2}$ die $C^4$ in reellen Punkten eines Quadrupels berühren, wohl aber ist es möglich, dass beide Kegelschnitte mit $C^4$ imaginären Contact haben.

Ist $m_2 m_3$ imaginär, also $J_{1m}$ elliptisch, so sind die beiden Involutionen $J_1$, $J_1^*$ hyperbolisch.

Sei nun $A'_1$ ein Punkt von $C^4$ auf $x_1$, so gehört zu ihm sowohl ein Punkt $A_1$ auf $K^2$, als ein Punkt $A_1^*$ auf $K^{*2}$. $A_1$, $A_1^*$ sind Berührungspunkte von Tangenten aus $A'_1$ an $K^2$ resp. $K^{*2}$ und müssen in den Geraden $x'_1$ resp. $y'_1$ liegen, welche $x_1$ in der Involution $J_1$ resp. $J_1^*$ entsprechen. Kennen wir daher $K^2$, $J_1$ und haben wir auf angegebene Weise $J_1^*$ bestimmt, so erhalten wir einen Punkt mit Tangente von $K^{*2}$ — unabhängig davon, ob letzterer Kegelschnitt die Curve $C^4$ reell oder imaginär berührt — nach folgendem Verfahren. Wir gehen aus von $A'_1$ auf $x_1$, suchen zu $x_1$ den entsprechenden $y'_1$ in der Involution $J_1^*$ und den entsprechenden in der Involution $J_{1k}$. Letzterer trifft $m_1$ im Pole von $x_1$ in Bezug auf $K^{*2}$ und durch diesen Pol und $A'_1$ geht die Tangente, welche $K^{*2}$ in einem Punkte $A_1^*$ von $y_1$ berührt. Damit ist dieser Punkt mit seiner Tangente und also auch $K^{*2}$ gegeben.

Führen wir den analogen Gedankengang durch, indem wir von $M_2$ resp. $M_3$ ausgehen, so finden wir, dass sich die Kegelschnitte $K_q^2$ auch in Büschel gruppiren lassen, für welche die Berührungspunkte in $m_2$ resp. $m_3$ liegen. Jedes dieser Büschel enthält zwei Kegelschnitte, die $C^4$ in einem Quadrupel berühren.

Nun haben wir unter 3 gezeigt, dass eine Gerade $m$ sämmtliche Kegelschnitte $K^2$ entweder reell oder imaginär schneidet. Jeder Kegelschnitt $K^2$ wird aber von unendlich vielen Kegelschnitten $K_q^2$ in diesen

Schnittpunkten berührt. Lassen wir $K^2$ seine unendlich vielen Werthe durchlaufen, so erhalten wir ihnen entsprechend unendlich viele Büschel von Kegelschnitten $K_q^2$ und diese stellen uns die Gesammtheit der Kegelschnitte $K_q^2$ vor. Es folgt also, dass auch diese von einer Geraden $m$ entweder alle reell oder alle imaginär geschnitten werden.

Ist $M_1 M_2 M_3$ reell, so wird jeder Kegelschnitt $K^2$ von zweien der drei Linien $m$ reell geschnitten und dann repräsentiren die Kegelschnitte $K^2$, $K_q^2$ die Gesammtheit aller der Kegelschnitte, welche $M_1 M_2 M_3$ zum Tripel harmonischer Pole haben und welche dieselben zwei Linien $m$ reell schneiden. Wird $M_2 M_3$ imaginär, so können alle Kegelschnitte, welche $M_1 M_2 M_3$ zum Tripel harmonischer Pole haben und welche $m_1$ reell schneiden, als Kegelschnitte $K_q^2$ resp. $K^2$ auftreten.

## 13. Die Tangenten von $C^4$.

Wir wenden uns zu den Tangenten der $C^4$ und knüpfen an das an, was wir in 2 und 8 über dieselben sagten. Die Constructionen, welche dort aus $J_1$ und $K^2$ entwickelt wurden, lassen sich in analoger Weise mit Hilfe irgend eines der Kegelschnitte $K^2$, welche $C^4$ in den Punkten eines Quadrupels berühren, und der zugehörigen Involutionen $J_1$ resp. $J_2$, $J_3$ ausführen. Je nachdem wir dazu einen Kegelschnitt $K_q^2$ oder $K_s^2$ verwenden, bedienen wir uns des Satzes von Brianchon oder Pascal. In beiden Fällen erhalten wir folgendes Schema der Construction. Sei $A'_1$ ein Punkt von $C^4$, $A_1$ sein zugehöriger in Bezug auf einen Kegelschnitt $K^2$. Dann ist $A'_1 A_1$ oder $a_1$ die Tangente in $a_1$ an $K^2$. Nun bringen wir $M_1 A'_1$ mit $M_2 A_1$ zum Schnitte. (Fig. 7.) Den Schnittpunkt — $T_{1'2}$ — verbinden wir mit $S_2$, dem Schnitte von $a_1$ und $m_2$. Ziehen wir $S_2 T_{1'2}$, so schneide diese Gerade $m_1$ in $S'_1$. Letzterer Punkt ist der Schnittpunkt der gesuchten Tangente $a'_1$ in $A'_1$ an $C^4$ mit $m_1$. Zum nämlichen Resultat führt auch folgende Construction. Sei $T_{12'}$ der Schnittpunkt von $M_1 A_1$ mit $M_2 A'_1$, so verbinden wir diesen Punkt mit $S_1$, dem Schnitte von $m_1$ und $a_1$. Diese Verbindungslinie treffe $m_2$ in $S'_2$. Dann ist $S'_2$ ein Punkt von $a'_1$.

Setzen wir an Stelle von $M_1$ die Punkte $M_2$, $M_3$, so erhalten wir vier neue Tangentenconstructionen. Also können wir im Ganzen auf sechs verschiedene Weisen (Fig. 7) die Gerade $a'_1$ bestimmen. Je zweimal gelangen wir dabei zu einem Punkte $S'$. Nach der eingeführten Bezeichnung liegen in Geraden die Punkte $S_1$, $S'_2$, $T_{12'}$, ferner $S_1$, $S'_3$, $T_{13'}$ u. s. f. $S'_1$ können wir aber auch finden, indem wir von einem beliebigen Punkte $P_2$ auf $m_2$ ausgehen. Wir ziehen $P_2 S_1$ (Fig. 7). Diese Linie schneide $\overline{M_1 A_1}$ in $A_{1p}$. Letzteren Punkt verbinden wir mit $M_2$. $\overline{M_2 A_{1p}}$ werde von $\overline{M_1 A'_1}$ oder $\overline{M_1 T_{1'2}}$ in $P_{1'2}$ geschnitten. Dann geht die Gerade $P_2 P_{1'2}$ durch $S'_1$. Wir haben nämlich jetzt zu einer der oben gegebenen Tangentenconstruc-

tionen die centrisch-collineare gezeichnet in einer Collineation, für welche $M_1$ das Centrum und $m_1$ die Axe ist. Entsprechende Punkte in dieser Collineation sind: $S_2$ und $P_2$, $A_1$ und $A_{1p}$, $T_{1'2}$ und $P_{1'2}$. Also sind $\overline{S_2 T_{1'2}}$ und $P_2 P_{1'2}$ entsprechende Gerade und schneiden sich im Punkte $S'_1$ auf $m_1$.

Durchläuft nun der Punkt $A'_1$ die Curve $C^4$ und construiren wir sämmtliche Punkte $S'_1$ unter Benutzung des nämlichen Punktes $P_2$, so fragen wir nach dem Orte der Schnittpunkte der Geraden $P_2 S'_1$ und $M_1 A'_1$, also nach dem Orte der Punkte $P_{1'2}$. Dieser ist abhängig vom Orte der Punkte $A_{1p}$ und wir untersuchen daher zunächst letzteren. Wir erhalten die Punkte $A_{1p}$ als Schnitte der Geraden $P_2 S_1$ und $M_1 A_1$. $S_1$ ist stets Pol von $M_1 A_1$ in Bezug auf den Kegelschnitt $K^2$. Folglich sind die Strahlen durch $P_2$ nach den $S_1$ und durch $M_1$ nach den resp. $A_1$ Linien über den Paaren der Involution harmonischer Pole in $m_1$ in Bezug auf $K^2$. Also liegen die Schnittpunkte dieser resp. Linien auf einem Kegelschnitt $K_{1p}^2$, der durch $P_2$ und $M_1$ geht. Er ist der Ort der Punkte $A_{1p}$. $M_3$ ist in Bezug auf ihn Pol der Geraden $m_3$. Er enthält die Punkte, in denen $K^2$ von $m_1$ geschnitten wird. (Fig. 8.)

Ziehen wir nun aus $M_2$ nach den Punkten des Kegelschnittes $K_{1p}^2$ Gerade und schneiden wir diese mit den resp. Geraden $M_1 A'_1$, so erhalten wir Punkte $P_{1'2}$. Der Ort der letzteren wird also aus $K_{1p}^2$ mit Hilfe der Involution $J_1$ nach folgendem Gesetze abgeleitet. Wir ziehen durch $M_2$ eine beliebige Gerade $x_2$, welche $K_{1p}^2$ in zwei Punkten $x_1$, $y_1$ (Fig. 8) treffe. Ihre Verbindungslinien mit $M_1$ seien $x_1$, $y_1$, und diesen Geraden sollen in der Involution $J_1$ die Geraden $x'_1$, $y'_1$ entsprechen. Dann schneiden letztere den Strahl $x_2$ in zwei Punkten des Ortes der $P$. Drehen wir $x_2$ um $M_2$ und bestimmen wir die Strahlenpaare $x_1 y_1$, so bilden diese eine Involution $J_{1p}$, für welche $m_2$, $m_3$ die Doppelstrahlen sind. Uebertragen wir diese Involution auf den Kegelschnitt $K_{1p}^2$, so ist $M_2$ ihr Pol. Nun ist aber $m_2 m_3$ ein Paar der Involution $J_1$ und da $m_3$ den Kegelschnitt $K_{1p}^2$ in $M_1$ berührt, so liegt der Pol von $J_1$ in Bezug auf $K_{1p}^2$ in $m_2$. Wenn wir also zu $x_1 y_1$ die entsprechenden $x'_1 y'_1$ in $J_1$ bestimmen und ihre zweiten Schnittpunkte mit $K_{1p}^2$ durch $x'_1$ resp. $y'_1$ bezeichnen, so müssen sich $x_1 x'_1$ und $y_1 y'_1$ im Pole $J_1$ der Involution $J_1$, also in einem Punkte auf $m_2$ schneiden. Daraus folgt aber, dass $x'_1 y'_1$ auf einer Geraden durch $M_2$ liegen. Also sind auch die Strahlen $x'_1$, $y'_1$ ein Paar der Involution $J_{1p}$ und es ist jeder Geraden $x_2$ durch $M_1$ ein Paar der Involution $J_{1p}$ zugeordnet. Ziehen wir dagegen eine beliebige Gerade $x'_1$ durch $M_1$, so correspondirt ihr in $J_1$ ein Strahl $x_1$. Dieser trifft $K_{1p}^2$ — ausser in $M_1$ — noch in einem zweiten Punkte — $x'_1$ —, durch den ein Strahl $x_2$ geht. Also correspondirt einem Strahle $x'_1$ durch $M_1$ nur ein Strahl $x_2$ durch $M_2$.

Zwei Büschel nun, welche in der bemerkten Weise ein-zweideutig aufeinander bezogen sind, erzeugen bekanntlich eine Curve dritter Ordnung

— $C_{1'2}{}^3$ —, für welche $M_1$ ein Doppelpunkt und $M_2$ ein einfacher Punkt ist. Die Tangenten in $M_1$ und $M_2$ an $C_{1'2}{}^3$ sind die resp. correspondirenden zum Verbindungsstrahle der Scheitel $M_1$, $M_2$. Fassen wir diesen Strahl als einen solchen des Büschels um $M_2$ auf, so decken sich in unserem Falle seine beiden entsprechenden Strahlen in der Geraden $m_2$. Also fallen die Tangenten in $M_1$ an $C_{1'2}{}^3$ zusammen, d. h. $M_1$ ist Spitze für diese Curve dritter Ordnung. Gehöre aber $M_1M_2$ dem Büschel um $M_1$ an, so correspondirt diesem Strahle im Büschel um $M_2$ die Gerade $M_2P_2$. Also tangirt diese $C_{1'2}{}^3$ in $M_2$. Suchen wir ihren dritten Schnittpunkt mit $C_{1'2}{}^3$, so bemerken wir, dass $M_2P_2$ den Kegelschnitt $K_{1p}{}^2$ berührt. Also muss auch der erwähnte dritte Punkt in $M_2$ liegen. Daraus folgt, dass $M_2P_2$ eine Inflexionstangente in $M_2$ an $C_{1'2}{}^3$ ist.

Weiter erwähnen wir, dass $x'_1y'_1$ durch $m_3m_2$ harmonisch getrennt wird, und schliessen daraus, dass auch die Punkte von $C_{1'2}{}^3$, welche in diesen Geraden liegen, durch $M_2$ resp. $m_2$ harmonisch getrennt werden. Verallgemeinern wir diese Bemerkung, so folgt, dass $C_{1'2}{}^3$ zu sich selbst centrisch-involutorisch liegt in einer Involution, deren Centrum $M_2$ und deren Axe $m_2$ ist. $m_1$ trifft die Curve $C_{1'2}{}^3$ in denselben Punkten wie die Inflexionstangenten $i_1$, $i_1{}^*$ in $M_1$ an $C^4$. $K_{1p}{}^2$ schneidet $C_{1'2}{}^3$ in den Punkten, in welchen die Doppelstrahlen der Involution $J_1$ diesen Kegelschnitt treffen.

Wenn wir jetzt in analoger Weise wie oben $P_2$ mit $S'_3$ — dem Schnittpunkte der Tangente $a'_1$ und $m_3$ — verbinden und $\overline{P_2S'_3}$ mit $\overline{M_3A'_1}$ zum Schnitte bringen, so erhalten wir einen Punkt $P_{3'2}$. Der Ort dieses Punktes ist eine Curve dritter Ordnung — $C_{3'2}{}^3$ —, für welche $M_3$ eine Spitze ist. $m_2$ ist Tangente in dieser Spitze, und in $M_2$ ist eine Inflexionsstelle mit $M_2P_2$ als Tangente. Analoges gilt für die Punkte $P$ auf $m_1$ und $m_3$. Sei daher mit $P_x$ ein Punkt auf $m_x$ bezeichnet und nehme $x$ die Werthe 1, 2, 3 in der Weise an, dass $x=1$ die Werthe $y=2$ oder $y=3$ correspondiren u. s. f., so schliessen wir allgemein:

Ist $P_x$ ein Punkt auf $m_x$ und schneidet die Tangente $a'_1$ in $A'_1$ an $C^4$ die Gerade $m_y$ in $S'_y$, so treffen sich die Linien $P_xS'_y$ und $M_yA'_1$ in Punkten einer Curve dritter Ordnung $C_{y'x}{}^3$. Dieselbe hat in $M_y$ eine Spitze mit der Tangente $m_x$. Sie besitzt in $M_x$ eine Inflexionsstelle und wird in dieser von $P_xM_x$ berührt.

### 14. Büschel der Curven $C^3$.

Wir wollen jetzt die Gesammtheit der Curven dritter Ordnung zu überblicken suchen, welche nach dem obigen Satze hervorgebracht werden können, und betrachten zuerst die Curven, welche den Punkten $P_2$ auf $m_2$ in Bezug auf $M_1$ zugeordnet sind, d. h. die Curven $C_{1'2}{}^3$.

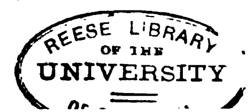
Lassen wir $P_2$ die Gerade $m_2$ durchlaufen, so gehört zu jeder Lage dieses Punktes in Bezug auf $K^2$ ein Kegelschnitt $K_{1p}^2$. Alle diese Kegelschnitte $K_{1p}^2$ werden in $M_1$ von $m_3$ berührt, schneiden sich in $m_1$ mit $K^2$ und haben $M_2 m_2$ zu Pol und Polare. Sie sind zu einander centrisch-collinear in einer Collineation, deren Centrum $M_1$ und deren Axe $m_1$ ist. Aus jedem dieser Kegelschnitte $K_{1p}^2$ leiten wir mit Hilfe von $J_1$ eine Curve $C_{1'2}^3$ ab. Alle diese Curven haben dieselbe Spitze $M_1$ mit der Tangente $m_2$ und dieselbe Inflexionsstelle $M_2$. Sie sind zu einander centrisch-collinear mit $M_1$ als Centrum, $m_1$ als Axe und schneiden sich — ausser in $M_1 M_2$ — noch in den Punkten, in welchen die Inflexionstangenten in $M_1$ an $C^4$ die Gerade $m_1$ treffen.

Durch jeden Punkt $X$ der Ebene geht eine Curve $C_{1'2}^3$. Wir erhalten sie, indem wir auf $M_1 X$ einen Punkt $A'_1$ der $C^4$ und seine Tangente $a'_1$ bestimmen. Letztere trifft $m_1$ in $S'_1$. $S'_1 X$ aber schneidet $m_2$ in $P_2$ und zu $P_2$ gehört eine Curve $C_{1'2}^3$. Wir schliessen daraus, dass die bis jetzt abgeleiteten Curven dritter Ordnung ein Büschel — $B_{1'2}^3$ — bilden. Lassen wir an Stelle eines Kegelschnittes $K^2$ den Kegelschnitt $K^{*2}$ treten, welcher $K^2$ in zwei Punkten von $m_1$ berührt, so führt uns derselbe zu den nämlichen Kegelschnitten $K_{1p}^2$ wie $K^{*2}$; denn die Kegelschnitte $K_{1p}^2$ hängen nur von $M_1$, $P_2$ und der Involution $J_{1k}$ ab, welche für $K^2$ und $K^{*2}$ dieselbe ist. Bestimmen wir dann aus diesen $K_{1p}^2$ mit Hilfe von $J_1^*$ die Curven $C_{1'2}^3$, so müssen sie mit den oben aus $K_{1p}^2$ und $J_1$ construirten zusammenfallen; denn nach ihrer Definition sind sie nur von $C^4$ abhängig. Aus demselben Grunde erhalten wir auch keine anderen Curven $C_{1'2}^3$, wenn wir von irgend einem der Kegelschnitte $K^2$ oder $K^{*2}$ ausgehen, welche $C^4$ in den Punkten eines Quadrupels berühren.

In analoger Weise können wir fünf weitere Büschel von Curven dritter Ordnung ableiten. Nach der eingeführten Bezeichnungsweise sind es die Büschel $B_{3'2}^3$, $B_{2'1}^3$, $B_{3'1}^3$, $B_{1'3}^3$, $B_{2'3}^3$. Curven der Büschel, welche denselben ungestrichenen unteren Index haben, gehören zu Punkten $P$ auf der Linie $m$, welche den gleichen Index hat. Curven der Büschel, die denselben gestrichenen unteren Index haben, sind Punkten $S'$ mit demselben Index zugeordnet.

Wir werden diese Curven $C^3$ benutzen, wenn es sich darum handelt, die Tangenten zu finden, welche sich aus einem Punkte $S'_x$ auf $m_x$ an $C^4$ legen lassen. Dabei bemerken wir, dass unter den Kegelschnitten $K_{xp}^2$ stets ein Kreis ist. Also werden wir zur Construction stets diejenigen Curven $C^3$ verwenden, welche sich aus den erwähnten Kreisen zeichnen lassen.

Zum Schlusse dieser Gedankenreihe erwähnen wir, dass die besprochenen Curven dritter Ordnung degenerirte Formen von Curven vierter Ordnung sind, welche sich in folgender Weise ergeben. Sei $P$ ein be-



liebiger Punkt der Ebene, so ziehen wir durch ihn eine beliebige Gerade $x$, welche $m_1$ in $S'_1$ schneide. Dann gehen von $S'_1$ aus sechs Tangenten an $C^4$, deren Berührungspunkte auf drei Geraden $x_1$ durch $M_1$ liegen. Es werden also auf diese Weise jeder Geraden $x$ durch $P$ drei Gerade $x_1$ durch $M_1$ zugeordnet; dagegen correspondirt jeder Geraden $x_1$ nur eine Gerade $x$; denn $x_1$ schneidet $C^4$ in zwei Punkten, deren Tangenten sich in $S'_1$ auf $m_1$ treffen. $S'_1 P$ aber ist der Strahl, der $x_1$ entspricht. Es folgt mithin, dass das Büschel der $x$ zu dem der $x_1$ in einer ein-dreideutigen Projectivität steht. Zwei solche Büschel erzeugen bekanntlich eine Curve vierter Ordnung — $C_{1'}^4$. Für dieselbe ist $P$ ein einfacher und $M_1$ ein dreifacher Punkt. Auf den Geraden $PM_2$ und $PM_3$ fallen in $M_2$ resp. $M_3$ je drei Punkte von $C_{1'}^4$ zusammen. Also ist $PM_2$ Inflexionstangente in $M_2$ an $C_{1'}^4$ und $PM_3$ in $M_3$.

Liegt nun $P$ in $m_2$, so enthält diese Gerade fünf Punkte an $C_{1'}^4$, nämlich den dreifachen Punkt $M_1$ und die Punkte $M_3$ und $P$. Also ist $m_2$ ein Theil der Curve $C_{1'}^4$, welche zu $P$ gehört, und der Rest ist eine Curve von der Art der Curven $C_{1'2}^3$. Ist $P$ in $M_3$ gelegen, so degenerirt die zu $P$ gehörende Curve in die Gerade $m_3$ und eine Curve $C_{1'3}^3$ u. s. f.

Die Curven $C_{1'}^4$ sind stets reell, wenn $P$ reell ist; dagegen werden die Curven $C_{1'2}^3$ und $C_{1'3}^3$ imaginär, wenn $M_2 M_3$ imaginär sind. Sie enthalten dann nur als reelle Punkte: $M_1$ und die Schnittpunkte von $m_1$ mit $i_1 i_1^*$. Gleichwohl sind sie nach dem Vorhergehenden definirt und bestimmt.

Analoge Betrachtungen führen uns zu Curven $C_{2'}^4$, $C_{3'}^4$. Ihre degenerirten Formen sind $C_{2'1}^3$, $C_{2'3}^3$ und $C_{3'1}^3$, $C_{3'2}^3$ und je eine der Geraden $m$.

(Schluss folgt.)

II.

# Ueber die Integration linearer, nicht homogener Differentialgleichungen.

Von

WOLD. HEYMANN

in Plauen i V.

## Vorbemerkungen.

Die vorliegende Abhandlung beschäftigt sich damit, für Gleichungen von der Form

$$1)\qquad X_n \frac{d^n y}{dx^n} + X_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + X_1 \frac{dy}{dx} + X_0 y = X,$$

in welcher $X_n$ bis $X_0$ ganze Functionen von $x$ sind, das Supplementintegral ohne die Kenntniss der partikulären Integrale der reducirten Gleichung herzuleiten. Unter dem Supplement- oder Ergänzungsintegral einer linearen, nicht homogenen Differentialgleichung verstehen wir diejenige einfachste Function, die dem Integral der reducirten Gleichung additiv beizugeben ist, damit das Integral der nicht reducirten Gleichung entsteht. Das Supplementintegral ist daher ein von willkürlichen Constanten freies partikuläres Integral der nicht homogenen Gleichung.

Wenn in Gleichung 1) die Indices der Functionen zugleich den Grad angeben und $X$ eine Function $\mu^{\text{ten}}$ Grades bedeutet, so ist

$$2)\qquad \zeta = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_\mu x^\mu$$

das Supplementintegral. Denn man erkennt leicht, dass sich die Coefficienten $\alpha$ im Allgemeinen so bestimmen lassen, dass $\zeta$ der Gleichung partikulär genügt. Natürlich lässt sich das Supplementintegral nicht immer in so einfacher Weise ableiten; doch werden die späteren Untersuchungen zeigen, dass man fast ausnahmslos für alle linearen Differentialgleichungen, die in der reducirten Form integrirt werden können, das Supplement finden kann — und zwar nach einem Verfahren, welches der im bestimmten Falle vorgelegten Differentialgleichung in einer Weise angepasst ist, wie es die Lagrange'sche Methode der Variation der Constanten ihrer Allgemeinheit wegen nie sein kann.

Wollte man das Supplement einer Differentialgleichung, deren rechte Seite eine ganze Function ist, z. B. das der Differentialgleichung der

hypergeometrischen Functionen $n^{ter}$ Ordnung nach der Lagrange'schen Methode aufstellen, so würde eine sehr complicirte Determinantenverbindung, gebildet aus bestimmten Integralen, entstehen; andererseits würde man, wie bei Gleichung 1), als Supplement

$$\zeta = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots$$

erhalten. Durch Vergleichung der Resultate würde man sonach zu merkwürdigen Integralbeziehungen gelangen, deren Existenz schwerlich auf anderem Wege erkannt und bewiesen werden dürfte. — Die Herleitung des Supplementintegrals für eine nicht homogene Differentialgleichung kann selbstverständlich nicht im Allgemeinen gezeigt werden, sondern man hat sich immer an specielle Fälle zu halten und gewisse Gruppen von Gleichungen zu untersuchen. Nicht selten gelingt es, die Methode, welche bei Integration der reducirten Gleichung in Anwendung kommt, so zu modificiren oder zu erweitern, dass ein Integral für die complete Gleichung gewonnen wird.

Die Abhandlung zerfällt in drei Theile. Sie behandelt

I. Supplementintegrale linearer, nicht homogener Differentialgleichungen, deren zweiter Theil eine ganze Function ist;
II. Supplementintegrale linearer, nicht homogener Differentialgleichungen, deren zweiter Theil eine beliebige Function ist;
III. Supplementintegrale linearer, nicht homogener simultaner Differentialgleichungen.

---

## § 1. Supplementintegral von

$$X_n y^{(n)} + X_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + X_1 y' + X_0 y = X_\mu, \tag{1}$$

**worin**

$$X_k = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \ldots + k_k x^k.$$

Wir setzen voraus, dass der Grad einer jeden Function durch ihren Index angegeben ist, und führen nun auf der linken Seite als Ergänzungsintegral die ganze Function*

* Da $(\mu+1)$ Potenzen zu identificiren sind, so müssen im Ergänzungsintegral $(\mu+1)$ verfügbare Coefficienten vorkommen; $\zeta$ muss also mindestens vom $\mu^{ten}$ Grade sein. — Dass diese Function nicht von höherem Grade zu sein braucht, ist unmittelbar klar. Denn wäre sie vom $(\mu+1)^{ten}$ Grade, so würde sich der Grad auf der linken Seite im Allgemeinen auch bis zum $(\mu+1)^{ten}$ erheben Nun hätte man aber zuerst den Coefficienten von $x^{\mu+1}$ zum Verschwinden zu bringen, und da dieser proportional dem Coefficienten $\alpha_{\mu+1}$ in

$$\zeta = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_\mu x^\mu + \alpha_{\mu+1} x^{\mu+1}$$

sein muss, so ist $\alpha_{\mu+1} = 0$, falls nicht unter den Coefficienten der vorgelegten Gleichung Beziehungen stattfinden, was nicht vorausgesetzt werden soll.

$$\zeta = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_\mu x^\mu$$

ein. Da vorausgesetztermassen

$$X_\mu = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_\mu x^\mu$$

ist, so entsteht durch Gleichsetzung der Coefficienten gleicher Potenzen von $x$ folgendes Gleichungssystem zur Berechnung der Zahlen $\alpha_0$ bis $\alpha_\mu$:

$$\begin{array}{l}
J_\mu^\mu \alpha_\mu = A_\mu, \\
J_{\mu-1}^{\mu-1} \alpha_{\mu-1} + J_{\mu-1}^{\mu} \alpha_\mu = A_{\mu-1}, \\
J_{\mu-2}^{\mu-2} \alpha_{\mu-2} + J_{\mu-2}^{\mu-1} \alpha_{\mu-1} + J_{\mu-2}^{\mu} \alpha_\mu = A_{\mu-2}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
J_{\mu-n}^{\mu-n} \alpha_{\mu-n} + J_{\mu-n}^{\mu-n+1} \alpha_{\mu-n+1} + \ldots + J_{\mu-n}^{\mu-1} \alpha_{\mu-1} + J_{\mu-n}^{\mu} \alpha_\mu = A_{\mu-n} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
J_k^k \alpha_k + J_k^{k+1} \alpha_{k+1} + \ldots + J_k^{k+n-1} \alpha_{k+n-1} + J_k^{k+n} \alpha_{k+n} = A_k, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
J_h^h \alpha_h + J_h^{h+1} \alpha_{h+1} + \ldots + J_h^{h+n-1} \alpha_{h+n-1} + J_h^{h+n} \alpha_{h+n} = A_h, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
J_1^1 \alpha_1 + J_1^2 \alpha_2 + \ldots + J_1^n \alpha_n + J_1^{n+1} \alpha_{n+1} = A_1, \\
J_0^0 \alpha_0 + J_0^1 \alpha_1 + \ldots + J_0^{n-1} \alpha_{n-1} + J_0^n \alpha_n = A_0.
\end{array}$$

Die $J$ enthalten nur linear die Coefficienten der Functionen $X_n$ bis $X_0$ und gewisse aus den Zahlen $n$ und $\mu$ gebildete Facultätenverbindungen. Das Gleichungssystem soll zeigen, in welcher Weise die $\alpha$ unter einander verbunden sind: In die Gleichungen tritt der Reihe nach immer eine Unbekannte mehr ein, so dass die Auflösung besonders einfach wird. Von der $(n+1)^{\text{ten}}$ Gleichung bis zur $(\mu+1)^{\text{ten}}$ (letzten Gleichung) finden sich im Allgemeinen in jeder Gleichung $(n+1)$ Unbekannte, in den vorhergehenden aber weniger. Bei der Auflösung des Systems können besondere Fälle eintreten.

Verschwindet nämlich einer der Coefficienten von $\alpha$ in der ersten Verticalreihe, etwa $J_k^k$, so lässt sich $\alpha_k$ aus der $k^{\text{ten}}$ Gleichung* nicht bestimmen und diese Gleichung ist überhaupt nicht zu befriedigen, da $\alpha_\mu$ bis $\alpha_{k+1}$ als bestimmt gelten.

In diesem Falle bleibt $\alpha_k$ unbestimmt, und es ist einleuchtend, dass der reducirten Differentialgleichung eine ganze Function $k^{\text{ten}}$ Grades partikulär genügen muss. Denn stellt man die Forderung, es soll

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_k x^k$$

ein partikuläres Integral der gegebenen Gleichung (ohne zweiten Theil) sein, so wird man bei Bestimmung der $\beta$ offenbar auf ein Gleichungssystem von der Form

* Wir bezeichnen von dieser Stelle ab die Gleichungen nach dem Index, welchen das $A$ der rechten Seite trägt.

$$\begin{aligned}
&J_k^k \quad \beta_k &&= 0,\\
&J_{k-1}^{k-1}\beta_{k-1} + J_{k-1}^k \beta_k &&= 0,\\
&J_{k-2}^{k-2}\beta_{k-2} + J_{k-2}^{k-1}\beta_{k-1} + J_{k-2}^k \beta_k &&= 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

geführt, in welchem die $J$ dieselbe Bedeutung haben wie vorhin. Da $\beta_k \gtrless 0$, so muss $J_k^k = 0$ sein.

Verschwindet noch ein Coefficient von $\alpha$ in der ersten Verticalreihe, vielleicht $J_h^h$, wobei $h < k$, so lässt sich $\alpha_h$ aus der $h^{\text{ten}}$ Gleichung nicht bestimmen. Indessen lässt sich diese Gleichung im Allgemeinen doch befriedigen und zwar mit Hilfe des früher unbestimmt gebliebenen $\alpha_k$, welches durch die Grössen $\alpha_{h+1}$ bis $\alpha_{h+n}$ in die $h^{\text{te}}$ Gleichung linear eingeführt wird. Verschwindet aber der Factor von $\alpha_k$ auch in der $h^{\text{ten}}$ Gleichung, so bleibt diese unerfüllbar, und der reducirten Differentialgleichung genügt partikulär eine ganze Function $h^{\text{ten}}$ Grades.

Verschwindet weiter $J_f^f$, $f < h$, so lässt sich die $f^{\text{te}}$ Gleichung durch das früher unbestimmt gelassene $\alpha_h$ befriedigen, falls nicht der Factor von $\alpha_h$ Null wird. Im letzten Falle aber würde der Differentialgleichung ein drittes partikuläres Integral in Form einer Function $f^{\text{ten}}$ Grades genügen. Dieser Vorgang kann sich $n$-mal wiederholen, weil $J_r^r$, welches die Gestalt hat:

$$J_r^r = p_n r(r-1)(r-2)\dots(r-\overline{n-1}) + p_{n-1} r(r-1)(r-2)\dots(r-\overline{n-2}) + \dots$$
$$\dots + p_2 r(r-1) + p_1 r + p_0,$$

nur für $n$ Werthe des $r$ verschwinden kann.

In einem solchen Falle würde die reducirte Gleichung $n$ partikuläre Integrale besitzen, welche sammt und sonders ganze Functionen wären.

Angenommen nun, es lassen sich $q$ Coefficienten $\alpha_k, \alpha_h, \dots \alpha_f$ nicht bestimmen*, so bleibt nichts Anderes übrig, als die Integration einer Gleichung

$$2)\quad X_n z^{(n)} + X_{n-1} z^{(n-1)} + \dots + X_1 z' + X_0 z = B_k x^k + B_h x^h + \dots + B_f x^f$$

zu versuchen. Dieselbe lässt sich jedoch, da $q$ partikuläre Integrale der reducirten Gleichung bekannt sind, auf die $(n-q)^{\text{te}}$ Ordnung bringen Das vollständige Integral der Gleichung 1) lautet nun

---

* Die Unbestimmtheit gewisser Coefficienten $\alpha$ findet auch in der Form des Integrals ihre Bestätigung. Da nämlich, falls $\alpha_k = 0$, eines der partikulären Integrale, etwa $y_1$, die Gestalt

$$y_1 = \beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_k x^k$$

hat, so lautet das allgemeine Integral

$$y = C_1(\beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_k x^k) + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n^{(n)} + (\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_\mu x^\mu).$$

Wegen der Willkürlichkeit des $C_1$ kann nun immer vom ersten partikulären Integral $y_1$ ein Theil wie $C'(\beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_k x^k)$ abgelöst und in das Ergänzungsintegral $\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_\mu x^\mu$ aufgenommen werden, wodurch sich die Unbestimmtheit erklärt.

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_\mu x^\mu + z,$$

unter $z$ das complete Integral der Gleichung 2) verstanden.

Ein passendes Beispiel zu den Untersuchungen dieses Paragraphen liefert die Gleichung

$$X_n y^{(n)} + X_{n-1} y^{(n-1)} = X_\mu,$$

für welche sich die Integration vollständig ausführen lässt. Da dieser Gleichung $(n-1)$ ganze Functionen, nämlich

$$y_1 = C_0, \quad y_2 = C_1 x, \quad y_3 = C_2 x^2, \quad \ldots \quad y_{n-1} = C_{n-2} x^{n-2}$$

genügen, so tritt hier gerade der Ausnahmefall auf, in welchem das Ergänzungsintegral keine vollständige Function $\mu^{\text{ten}}$ Grades ist. — Denkt man sich $X_n$ in Factoren aufgelöst

$$X_n = \varkappa (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2) \ldots (x - \varepsilon_n),$$

und setzt der Einfachheit halber $X_{n-1} = 0$, so lautet das Integral der reducirten Gleichung

$$y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_{n-1} x^{n-1}$$

und das Ergänzungsintegral

$$\zeta = \alpha_0 (x - \varepsilon_1)^{n-1} l(x - \varepsilon_1) + \alpha_1 (x - \varepsilon_2)^{n-1} l(x - \varepsilon_2) + \ldots$$
$$\ldots + \alpha_{n-1} (x - \varepsilon_n)^{n-1} l(x - \varepsilon_n) + \alpha_n x^n + \alpha_{n+1} x^{n+1} + \ldots + \alpha_\mu x^\mu,$$
$$(\mu > n).$$

## § 2.

### Vollständiges Integral von

$$1) \quad (a_2 + b_2 x + c_2 x^2) y'' + (a_1 + b_1 x) y' + a_0 y = A_0 + A_1 \frac{x}{1!} + A_2 \frac{x^2}{2!} + \ldots + A_\mu \frac{x^\mu}{\mu!}.$$

Es soll die Rechnung, welche im vorigen Paragraphen nur schematisch angedeutet werden konnte, an diesem Beispiel *in extenso* ausgeführt werden und zwar mit Berücksichtigung aller Ausnahmefälle, welche bei der Bestimmung der Coefficienten des Ergänzungsintegrals eintreten können.

Aus Bequemlichkeitsrücksichten nehmen wir $a_2 = 0$, was immer erlaubt ist, sobald nicht vorliegt

$$a_2 y'' + (a_1 + b_1 x) y' + a_0 y = A_0 + A_1 \frac{x}{1!} + \ldots,$$

welche Gleichung nachträglich betrachtet wird.

Das Ergänzungsintegral sei

$$\zeta = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{x}{1!} + \alpha_2 \frac{x^2}{2!} + \ldots + \alpha_\mu \frac{x^\mu}{\mu!},$$

und wir setzen der Kürze halber

$$a_0 + b_1 k + c_2 (k-1) k = M_k, \quad a_1 + b_2 k = N_k;$$

dann lauten die Bestimmungsgleichungen für die $\alpha$ folgendermassen:

$$\begin{array}{llllll}
M_\mu & \alpha_\mu & & & = A_\mu, \\
M_{\mu-1} & \alpha_{\mu-1} & + N_{\mu-1} & \alpha_\mu & = A_{\mu-1}, \\
M_{\mu-2} & \alpha_{\mu-2} & + N_{\mu-2} & \alpha_{\mu-1} & = A_{\mu-2}, \\
M_{\mu-3} & \alpha_{\mu-3} & + N_{\mu-3} & \alpha_{\mu-2} & = A_{\mu-3}, \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
M_k & \alpha_k & + N_k & \alpha_{k+1} & = A_k, \\
M_{k-1} & \alpha_{k-1} & + N_{k-1} & \alpha_k & = A_{k-1}, \\
M_{k-2} & \alpha_{k-2} & + N_{k-2} & \alpha_{k-1} & = A_{k-2}, \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
M_h & \alpha_h & + N_h & \alpha_{h+1} & = A_h, \\
M_{h-1} & \alpha_{h-1} & + N_{h-1} & \alpha_h & = A_{h-1}, \\
M_{h-2} & \alpha_{h-2} & + N_{h-2} & \alpha_{h-1} & = A_{h-2}, \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
M_1 & \alpha_1 & + N_1 & \alpha_2 & = A_1, \\
M_0 & \alpha_0 & + N_0 & \alpha_1 & = A_0.
\end{array}$$

a) Sollte $M_k = 0$ sein, so lässt sich $\alpha_k$ aus der $k^{\text{ten}}$ Gleichung nicht bestimmen, und diese Gleichung kann überhaupt nicht befriedigt werden, da $\alpha_\mu$ bis $\alpha_{k+1}$ als bestimmt gelten. Man berechne nun weiter aus der $(k-1)^{\text{ten}}$ bis nullten Gleichung die Coefficienten $\alpha_k$ bis $\alpha_0$. Von diesen bleibt einer unbestimmt.

b) Ist auch $M_h = 0$, so lässt sich $\alpha_h$ aus der Gleichung $(h)$ nicht bestimmen. Man führe die Rechnung jetzt folgendermassen. Aus Gleichung $(k-1)$ berechne man $\alpha_{k-1}$; man findet

$$\alpha_{k-1} = m_{k-1} + n_{k-1}\alpha_k,$$

wobei $m_{k-1}$ und $n_{k-1}$ bekannte Grössen sind. Aus Gleichung $(h+1)$ ergiebt sich unter Benutzung aller früheren Gleichungen

$$\alpha_{h+1} = m_{h+1} + n_{h+1}\alpha_k,$$

und dieses giebt, in die Gleichung $(h)$ eingesetzt, in welcher also $M_h = 0$ ist, Folgendes:

$$N_h.(m_{h+1} + n_{h+1}\alpha_k) = A_h.$$

Lässt sich hieraus $\alpha_k$ bestimmen, so hat die weitere Rechnung keine Schwierigkeiten. Es folgen nämlich aus den Gleichungen $(h-1)$ bis $0$ die Coefficienten $\alpha_h$ bis $\alpha_0$, doch bleibt von diesen einer unbestimmt.

c) Es lässt sich $\alpha_k$ nicht bestimmen, wenn $N_h$ oder $n_{h+1}$ verschwinden. Dies letztere hat den Werth

$$n_{h+1} = (-1)^{k-h+1}\frac{N_{k-1}N_{k-2}\ldots N_{h+1}}{M_{k-1}M_{k-2}\ldots M_{h+1}},$$

und da die Grössen $M_{k-1}$ bis $M_{h+1}$ sicher nicht verschwinden können, weil schon $M_k = 0$ und $M_h = 0$, so kann $\alpha_k$ nur dadurch unbestimmbar werden, dass eine der Grössen $N_{k-1}$ bis $N_h$ verschwindet. Wird aber eine dieser Grössen null (und es kann höchstens eine derselben verschwinden, wenn nicht etwa $a_1 = b_2 = 0$), so kann die $h^{\text{te}}$ Gleichung nicht befriedigt werden. Aus der $(h-1)^{\text{ten}}$ bis nullten Gleichung findet

man, wie bei Fall b), die Coefficienten $\alpha_h$ bis $\alpha_0$, von denen einer unbestimmt bleibt. Ausserdem ist jetzt auch, falls $N_{k-q}$ verschwindet, wo $q$ eine der Zahlen 1 bis $k-h$ ist, einer der Coefficienten $\alpha_k$ bis $\alpha_{k-q+1}$ nicht bestimmt.

Bilden wir nun die Integrale der vollständigen Differentialgleichung.

1. Lassen sich sämmtliche Coefficienten des Ergänzungsintegrals bestimmen, so genügt der Gleichung

$$(b_2 x + c_2 x^2) y'' + (a_1 + b_1 x) y' + a_0 y = A_0 + A_1 \frac{x}{1!} + \ldots + A_\mu \frac{x^\mu}{1!}$$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \zeta,$$

wobei

$$\zeta = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{x}{1!} + \ldots + \alpha_\mu \frac{x^\mu}{1!}$$

und $y_1$ und $y_2$ die partikulären Integrale der reducirten Gleichung sind.

2. Treten die Ausnahmefälle ein, so gilt Folgendes.

a) Es möge im Gleichungssystem der $\alpha$ $M_k = 0$ sein; dann genügt der reducirten Gleichung partikulär

$$y_1 = \beta_0 + \beta_1 \frac{x}{1!} + \ldots + \beta_k \frac{x^k}{k!}.$$

Denn führt man dieses in die reducirte Gleichung ein, so entsteht

$$\begin{array}{ll}
M_k\ \beta_k & = 0, \\
M_{k-1}\beta_{k-1} + N_{k-1}\beta_k & = 0, \\
M_{k-2}\beta_{k-2} + N_{k-2}\beta_{k-1} & = 0, \\
\cdots\cdots\cdots & \\
M_{k-q}\beta_{k-q} + N_{k-q}\beta_{k-q+1} & = 0, \\
\cdots\cdots\cdots & \\
M_h\ \beta_h + N_h\ \beta_{h+1} & = 0, \\
M_{h-1}\beta_{h-1} + N_{h-1}\beta_h & = 0, \\
M_{h-2}\beta_{h-2} + N_{h-2}\beta_{h-1} & = 0, \\
\cdots\cdots\cdots & \\
M_1\ \beta_1 + N_1\ \beta_2 & = 0, \\
M_0\ \beta_0 + N_0\ \beta_1 & = 0.
\end{array}$$

Dieses System erfordert $M_k = 0$, und nun ergiebt sich der Reihe nach

$$\begin{array}{lll}
\beta_{k-1} = n_{k-1}\beta_k, & \ldots\ldots & \\
\beta_{k-2} = n_{k-2}\beta_k, & \beta_2 = n_2\beta_k, & (\beta_k \text{ unbestimmt}), \\
\ldots\ldots\ldots & \beta_1 = n_1\beta_k, & \\
\beta_{k-q} = n_{k-q}\beta_k, & \beta_0 = n_0\beta_k, &
\end{array}$$

wobei, wie früher,

$$n_{k-q} = \frac{N_{k-1} N_{k-2} \ldots N_{k-q}}{M_{k-1} M_{k-2} \ldots M_{k-q}} (-1)^q.$$

Der reducirten Gleichung genügt also partikulär

$$y_1 = \beta_k \left\{ n_0 + n_1 \frac{x}{1!} + \ldots + n_{k-1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{x^k}{k!} \right\}.$$

Um das allgemeine Integral der vollständigen Gleichung zu bilden, führe man in selbige ein

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{x}{1!} + \ldots + \alpha_\mu \frac{x^\mu}{\mu!} + z,$$

bestimme die $\alpha$ aus dem früher aufgestellten Gleichungssystem ohne Berücksichtigung der $k^{\text{ten}}$ Gleichung, so dass zurückbleibt

$$(b_2 x + c_2 x^2) z'' + (a_1 + b_1 x) z' + a_0 z = B_k \frac{x^k}{k!},$$

wobei

$$B_k = A_k - N_k \alpha_{k+1}.$$

Die letzte Differentialgleichung integrire man mit Hilfe der Variation der Constanten unter Beachtung, dass

$$z_1 = n_0 + n_1 \frac{x}{1!} + \ldots + n_{k-1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{x^k}{k!}$$

ein partikuläres Integral der reducirten Gleichung ist.

Man findet allgemein aus einer Gleichung

$$X_2 z'' + X_1 z' + X_0 z = X,$$

falls $z_1$ der reducirten genügt,

$$z = z_1 \left\{ \int \frac{1}{z_1^2} e^{-\int \frac{X_1}{X_2} dx} \left[ C_1 + \int \frac{X}{X_2} z_1 e^{\int \frac{X_1}{X_2} dx} dx \right] dx + C_2 \right\}.$$

b) Es möge ausser $M_k = 0$ auch $M_h = 0$, $(k > h)$ sein.

Ist dann in Gleichung $(h)$ $\quad N_h \gtrless 0$, so muss $\beta_{h+1} = 0$*,
„ auch „ „ $(h+1)$ $N_{h+1} \gtrless 0$, „ „ $\beta_{h+2} = 0$,
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
ist auch in Gleichung $(k-1)$ $N_{k-1} \gtrless 0$, so muss $\beta_k = 0$ sein.

Dagegen ergiebt sich aus Gleichung $(h-1)$ bis $(0)$

$$\beta_{h-1} = n_{h-1} \beta_h, \quad \beta_{h-2} = n_{h-2} \beta_h, \quad \ldots \quad \beta_0 = n_0 \beta_h.$$

Sonach genügt der reducirten Differentialgleichung jetzt partikulär

$$y_1 = \beta_h \left\{ n_0 + n_1 \frac{x}{1!} + \ldots + n_{h-1} \frac{x^{h-1}}{(h-1)!} + \frac{x^h}{h!} \right\}.$$

Von dieser Stelle ab verläuft die Rechnung wie bei Fall a).

c) Verschwindet endlich $M_k$, $M_h$ und auch $N_{k-q}$, wo $q$ eine der Zahlen 1 bis $k-h$ bedeutet und $k > h$, so entnehme man der $(k-1)^{\text{ten}}$ bis $(k-q+1)^{\text{ten}}$ Gleichung

$$\beta_{k-1} = n_{k-1} \beta_k, \quad \beta_{k-2} = n_{k-2} \beta_k, \quad \ldots \quad \beta_{k-q+1} = n_{k-q+1} \beta_k.$$

Die $(k-q)^{\text{te}}$ Gleichung verlangt, dass $\beta_{k-q} = 0$, und infolge dessen muss auch $\beta_{k-q-1}$ bis $\beta_{h+1}$ gleich Null sein. Die $h^{\text{te}}$ Gleichung ist von selbst erfüllt und nun ergiebt sich aus der $(h-1)^{\text{ten}}$ bis nullten Gleichung

* Wir bezeichnen die Gleichungen zur Bestimmung der $\beta$ nach dem Index des $M$.

$$\beta_{h-1} = n_{h-1}\beta_h, \; \dots \; \beta_0 = n_0 \beta_h.$$

Sonach genügen jetzt der reducirten Gleichung

$$y_1 = \beta_h \left\{ n_0 + n_1 \frac{x}{1!} + \dots + n_{h-1} \frac{x^{h-1}}{(h-1)!} + \frac{x^h}{h!} \right\},$$

$$y_2 = \beta_k \left\{ n_{k-q+1} \frac{x^{k-q+1}}{(k-q+1)!} + \dots + n_{k-1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{x^k}{k!} \right\}.$$

Um das allgemeine Integral der vollständigen Gleichung aufzustellen, substituire man in die vorgelegte Differentialgleichung

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{x}{1!} + \dots + \alpha_\mu \frac{x^\mu}{\mu!} + z,$$

so bleibt zurück

$$(b_2 x + c_2 x^2) z'' + (a_1 + b_1 x) z' + a_0 z = B_h \frac{x^h}{h!} + B_k \frac{x^k}{k!},$$

wobei

$$B_h = A_h - N_h \alpha_{h+1}, \quad B_k = A_k - N_k \alpha_{k+1}.$$

Da nun von der letzten Differentialgleichung, ohne zweites Glied gedacht, zwei partikuläre Integrale $z_1$ und $z_2$ bekannt sind, so erledigt sich die vollständige Integration leicht. Man bildet nach Lagrange und Abel für eine Gleichung

$$X_2 z'' + X_1 z' + X_0 z = X$$

aus den partikulären Integralen folgendes complete Integral:

$$z = z_1 \left\{ \varkappa \int z_2 \frac{X}{X_2} e^{\int \frac{X_1}{X_2} dx} dx + C_1 \right\} + z_2 \left\{ \varkappa \int z_1 \frac{X}{X_2} e^{\int \frac{X_1}{X_2} dx} dx + C_2 \right\}.$$

Im vorliegenden Falle hat $\varkappa$ den Werth

$$\varkappa = -\frac{(k-q)!}{n_0 n_{k-q+1}} b_2^{q+h-1}, \quad b_2 \gtrless 0,$$

was aus der Identität

$$z_1' z_2 - z_2' z_1 = \frac{1}{\varkappa} e^{-\int \frac{X_1}{X_2} dx}$$

für $x = 0$ leicht abgeleitet wird.

### Anmerkung 1.

Betrachten wir auch kurz den Fall, bei welchem der Grad des Ergänzungsintegrals höher angenommen werden darf als der Grad des zweiten Theiles der Differentialgleichung. Am bequemsten ist es, wenn wir das Ergänzungsintegral wie vorher in der Form

$$\zeta = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{x}{1!} + \dots + \alpha_\mu \frac{x^\mu}{\mu!}$$

voraussetzen, dagegen in $X_\mu$ den Grad durch Nullsetzen von $A_\mu$ bis $A_{k+1}$ auf den $k^{\text{ten}}$ herabbringen $(k < \mu)$; denn dann können wir den jetzigen Fall als Specialfall des früheren auffassen. Da jetzt nothwendig $M_\mu = 0$ sein muss, so genügt der reducirten Differentialgleichung partikulär eine ganze Function $\mu^{\text{ten}}$ Grades

$$y_1 = \beta_0 + \beta_1 \frac{x}{1!} + \cdots + \beta_\mu \frac{x^\mu}{\mu!}$$

und umgekehrt: Nur dann, wenn der reducirten Gleichung eine ganze Function genügt, deren Grad höher ist, als der Grad des zweiten Theiles der Gleichung, hat es Sinn, für das Ergänzungsintegral eine ganze Function anzunehmen, deren Grad höher ist, als der zweite Theil der Gleichung, nämlich so hoch, als der Grad des partikulären Integrals der reducirten Gleichung.

a) Man überzeugt sich nun leicht, dass die Annahme des $\mu^{\text{ten}}$ Grades statt des $k^{\text{ten}}$ Grades im Ergänzungsintegral im Allgemeinen keinen Vortheil gewährt. Wird das complete Integral aufgestellt, so zeigt sich, dass der überflüssige Theil des Ergänzungsintegrals

$$\alpha_{k+1} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} + \cdots + \alpha_\mu \frac{x^\mu}{\mu!}$$

von dem partikulären Integral $y_1$ verschluckt wird.*

b) Ist jedoch ausser $M_\mu = 0$ auch $M_k = 0$, so ist es vortheilhaft, $\zeta$ vom $\mu^{\text{ten}}$ Grade anzunehmen. Denn da wegen $M_k = 0$ die $k^{\text{te}}$ Gleichung nicht mit Hilfe von $\alpha_k$ befriedigt werden kann, so findet hierzu der noch unbestimmte Coefficient $\alpha_\mu$ Verwendung. Stellt man das complete Integral der Differentialgleichung auf, so erscheint auch kein Theil des Ergänzungsintegrals als überflüssig, weil das partikuläre Integral $y_1$ sich jetzt auf den $k^{\text{ten}}$ Grad zusammengezogen hat und keinen Theil des Ergänzungsintegrals in sich aufnehmen kann.

c) Wird die Bestimmung von $\alpha_\mu$ im Falle b) dadurch illusorisch, dass der Factor von $\alpha_\mu$ in der $k^{\text{ten}}$ Gleichung verschwindet, so genügt der reducirten Differentialgleichung ausser einer Function $\mu^{\text{ten}}$ Grades auch eine $k^{\text{ten}}$ Grades, und es ist [wie bei Fall a)] nur nöthig, das Ergänzungsintegral vom $k^{\text{ten}}$ Grade vorauszusetzen.

### Anmerkung 2.

Wir haben im Anfang unserer Betrachtungen den Fall

$$a_2 y'' + (a_1 + b_1 x) y' + a_0 y = A_0 + A_1 \frac{x}{1!} + \cdots + A_\mu \frac{x^\mu}{\mu!}$$

ausgeschlossen. Führt man in diese Differentialgleichung für $y$

$$\zeta = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{x}{1!} + \cdots + \alpha_\mu \frac{x^\mu}{\mu!}$$

ein, so bestimmen sich die $\alpha$ aus folgendem Gleichungssystem:

* Man beachte nur, dass nach der früheren Bezeichnung

$$\begin{array}{ll} \alpha_0 = m_0 + n_0 \; \alpha_\mu, & \beta_0 = n_0 \; \beta_\mu, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \alpha_{\mu-1} = m_{\mu-1} + n_{\mu-1} \; \alpha_\mu, & \beta_{\mu-1} = n_{\mu-1} \; \beta_\mu, \end{array}$$

und dass

$m_{k+1}$ bis $m_\mu$ verschwinden,
$\alpha_\mu$ und $\beta_\mu$ willkürlich sind.

$$\begin{array}{llll}
(a_0+b_1\mu)\alpha_\mu & & & =A_\mu,\\
(a_0+b_1\overline{\mu-1})\,\alpha_{\mu-1}+a_1\alpha_\mu & & & =A_{\mu-1},\\
(a_0+b_1\overline{\mu-2})\,\alpha_{\mu-2}+a_1\alpha_{\mu-1}+a_2\alpha_\mu & & & =A_{\mu-2},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\
(a_0+b_1k)\quad \alpha_k & +a_1\alpha_{k+1} & +a_2\alpha_{k+2} & =A_k,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\
(a_0+b_1)\quad \alpha_1 & +a_1\alpha_2 & +a_2\alpha_3 & =A_1,\\
\quad a_0\alpha_0 & +a_1\alpha_1 & +a_2\alpha_2 & =A_0.
\end{array}$$

Hier kann nur der Ausnahmefall in Betracht kommen, wo

$$a_0+b_1k=0.$$

Dann ist es nicht möglich, die $k^{te}$ Gleichung mittels des Coefficienten $\alpha_k$ zu befriedigen, und die reducirte Differentialgleichung besitzt das partikuläre Integral

$$y_1=\beta_0+\beta_1\frac{x}{1!}+\ldots+\beta_k\frac{x^k}{k!}.$$

Der vollständigen Gleichung genügt nun

$$y=\zeta+z,$$

wobei im Ausnahmefalle $z$ aus der Gleichung

$$a_2z''+(a_1+b_1x)z'+a_0z=B_k\frac{x^k}{k!}$$

unter Benutzung der bekannten partikulären Lösung zu berechnen ist. $B_k$ hat folgenden Werth:

$$B_k=A_k-\{a_1\alpha_{k+1}+a_2\alpha_{k+2}\}.$$

## § 3.

### Vollständiges Integral von

$$1)\quad a_n(a+bx)^n y^{(n)}+a_{n-1}(a+bx)^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_1(a+bx)y'+a_0y=X_\mu,$$

$$X_\mu=A_0+A_1\frac{x}{1!}+A_2\frac{x^2}{2!}+\ldots+A_\mu\frac{x^\mu}{\mu!}.$$

1. Schliessen wir zuerst den Fall, in welchem $b=0$ ist, aus, so lässt sich diese Differentialgleichung dadurch, dass man für $a+bx$ eine neue Variabele, etwa wieder $x$ setzt, auf die einfachere Form

$$b_nx^ny^{(n)}+b_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+b_1xy'+b_0y=X_\mu$$

bringen, wobei $X_\mu$ wiederum die frühere Form hat.

Sei

$$\zeta=\alpha_0+\alpha_1\frac{x}{1!}+\ldots+\alpha_\mu\frac{x^\mu}{\mu!}$$

das Ergänzungsintegral und $\varphi$ eine Function von folgender Beschaffenheit:

$$\varphi_{(k)}=k!\left\{\frac{b_0}{k!}+\frac{b_1}{(k-1)!}+\ldots+\frac{b_{k-1}}{(k-\overline{n-1})!}+\frac{b_k}{(k-n)!}\right\},$$

dann bestimmen sich die $\alpha$ aus folgenden Gleichungen:

$$\varphi(\mu)\alpha_\mu = A_\mu, \quad \varphi(\mu-1)\alpha_{\mu-1} = A_{\mu-1}, \quad \ldots\ldots,$$
$$\varphi(k)\alpha_k = A_k, \quad \ldots \varphi(1)\alpha_1 = A_1, \quad \varphi(0)\alpha_0 = A_0.$$

Das allgemeine Integral der vollständigen Gleichung lautet

$$y = C_1 x^{\lambda_1} + C_2 x^{\lambda_2} + \ldots + C_n x^{\lambda_n} + \zeta,$$

wobei $\lambda_1$ bis $\lambda_n$ die Wurzeln der Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades

$$\varphi(\lambda) = 0$$

sind.*

Auch hier können sich bei Bestimmung der $\alpha$ Ausnahmefälle ereignen.

a) Es verschwinde der Factor von $\alpha_k$, es sei also $\varphi(k) = 0$. Dann wird eine der Wurzeln der Gleichung $\varphi(\lambda) = 0$, etwa die Wurzel $\lambda_k$, gleich der ganzen positiven Zahl $k$, und sonach genügt der reducirten Differentialgleichung partikulär die Potenz $y_k = x^k$. In dem Ergänzungsintegral wird hingegen der Coefficient $\alpha_k$ von $x^k$ unendlich gross. Durch eine Grenzbetrachtung lässt sich nun zeigen, dass in $\zeta$ an Stelle von $x^k$ der Ausdruck $x^k lx$ zu treten hat.

Sei im Augenblicke $\lambda_k$ noch von $k$ verschieden, $\lambda_k = k + \delta$, und man greife aus dem vollständigen Integral der Differentialgleichung die in Frage kommenden Glieder, nämlich

$$C_k x^{\lambda_k} + \alpha_k \frac{x^k}{k!} = T,$$

heraus. Nun ist

$$\alpha_k = \frac{A_k}{\varphi(k)}, \quad \varphi(k) = \varphi(\lambda_k - \delta) = \varphi(\lambda_k) - \frac{\delta}{1!}\varphi'(\lambda_k) + \frac{\delta^2}{2!}\varphi''(\lambda_k) - \ldots,$$

oder weil $\varphi(\lambda_k) = 0$, so ist

$$\alpha_k = -\frac{A_k}{\delta\left\{\varphi'(\lambda_k) - \frac{\delta}{2!}\varphi''(\lambda_k) + \ldots\right\}}.$$

Bei Veränderung der Constanten $C_k$ kann man aber schreiben

$$T = C'_k x^{k+\delta} + \frac{A_k x^k}{k!\left\{\varphi'(\lambda_k) - \frac{\delta}{2!}\varphi''(\lambda_k) + \ldots\right\}} \cdot \frac{x^\delta - 1}{\delta},$$

oder für $\delta = 0$

$$T = C'_k x^k + \alpha'_k \frac{x^k}{k!} lx, \quad \text{wobei} \quad \alpha'_k = \frac{A_k}{\varphi'(k)}.$$

Verschwinden noch andere Factoren, etwa die von $\alpha_h, \alpha_k, \ldots \alpha_q$, so tritt im Ergänzungsintegral an Stelle von

$$\alpha_h \frac{x^h}{h!} + \alpha_k \frac{x_k}{k!} + \ldots + \alpha_q \frac{x^q}{q!}$$

der Ausdruck

---

* Eine gleiche Behandlungsweise ist anzuwenden, wenn der zweite Theil der Gleichung allgemeiner die Form $X_\mu = A_0 x^{\nu_0} + A_1 x^{\nu_1} + \ldots$ hat. Das Ergänzungsintegral lautet dementsprechend $\zeta = \alpha_0 x^{\nu_0} + \alpha_1 x^{\nu_1} + \ldots$.

$$\left(\alpha'_h \frac{x^h}{h!} + \alpha'_k \frac{x^k}{k!} + \ldots + \alpha'_q \frac{x^q}{q!}\right) lx.$$

Uebrigens kann dieser Fall höchstens $n$-mal eintreten, weil die vorgelegte Differentialgleichung $n^{\text{ter}}$ Ordnung nur $n$ von einander wesentlich verschiedene partikuläre Integrale besitzt, oder auch weil $\varphi(\lambda)$ nur für $n$ Werthe von $\lambda$ verschwinden kann. Die Gleichung, in welcher dies stattfindet, ist

$$x^n y^{(n)} = A_0 + A_1 \frac{x}{1!} + \ldots + A_\mu \frac{x^\mu}{\mu!}$$

und ihr vollständiges Integral

$$y = \left\{\begin{array}{l} C_0 + C_1 x + \ldots + C_{n-1} x^{n-1} \\ + \left(\alpha'_0 + \alpha'_1 \frac{x}{1!} + \ldots + \alpha'_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right) lx \\ + \alpha_n \frac{x^n}{n!} + \alpha_{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots + \alpha_\mu \frac{x^\mu}{\mu!} \end{array}\right\}, \quad (\mu > n).$$

b) Die Bestimmung von $\alpha'_k$ im Falle a) ist unmöglich, wenn $\varphi'(k) = 0$, d. h. wenn $\varphi(\lambda)$ eine mehrfache Wurzel besitzt. Wir beginnen mit dem Falle einer Doppelwurzel; die gleichen Wurzeln mögen $\lambda_k$ und $\lambda_{k+1}$ sein. So lange diese noch von $k$ verschieden sind, lautet das vollständige Integral bekanntlich

$$y = C_1 x^{\lambda_1} + C_2 x^{\lambda_2} + \ldots + x^{\lambda_k}(C_k + C_{k+1} lx) + \ldots + C_n x^{\lambda_n} + \zeta,$$

unter $\zeta$ eine reine ganze Function $\mu^{\text{ten}}$ Grades verstanden.

Um nun den Fall $\lambda_k = \lambda_{k+1} = k$ zu erledigen, setze man, wie früher, $\lambda_k = k + \delta$ und greife aus dem vollständigen Integral die Glieder heraus, welche alterirt werden. Man erhält

$$x^{k+\delta}(C_k + C_{k+1} lx) + \frac{A_k}{\varphi(k)} \frac{x^k}{k!} = T,$$

oder weil

$$\varphi(k) = \varphi(\lambda_k - \delta) = \varphi(\lambda_k) - \frac{\delta}{1!}\varphi'(\lambda_k) + \frac{\delta^2}{2!}\varphi''(\lambda_k) - \frac{\delta^3}{3!}\varphi'''(\lambda_k) + \ldots$$

und

$$\varphi(\lambda_k) = 0, \quad \varphi'(\lambda_k) = 0,$$

so ist

$$T = x^{k+\delta}\left\{C_k + C_{k+1}\left[\frac{x^\delta - 1}{\delta}\right]_{\delta=0}\right\} + \frac{A_k}{\delta^2\left\{\frac{\varphi''(\lambda_k)}{2!} - \delta\frac{\varphi'''(\lambda_k)}{3!} + \ldots\right\}} \cdot \frac{x^k}{k!}$$

oder, bei Veränderung der Constanten und für $\delta = 0$,

$$T = \left[x^{k+\delta}\left\{C'_k + C'_{k+1}\frac{x^\delta - 1}{\delta}\right\} + \frac{A_k}{\frac{\varphi''(\lambda_k)}{2!} - \delta\frac{\varphi'''(\lambda_k)}{3!} + \ldots} \cdot \frac{x^k}{k!}\left[\frac{x^\delta - 1}{\delta}\right]^2\right]_{\delta=0}$$

$$= x^k\{C'_k + C'_{k+1} lx\} + \frac{2!\,A_k}{\varphi''(k)} \cdot \frac{x^k}{k!} l^2 x$$

oder

$$T = x^k \{C'_k + C'_{k+1}\, lx\} + \alpha''_k \frac{x^k}{k!} l^2 x, \quad \alpha''_k = \frac{2!\, A_k}{\varphi''(k)}.$$

Wie man sich zu verhalten hat, wenn die Gleichung $\varphi(\lambda) = 0$ eine vielfache Wurzel besitzt, ist jetzt unmittelbar klar. Besitzt sie etwa $s$ gleiche Wurzeln und sind diese gleich der ganzen positiven Zahl $k$

$$\lambda_k = \lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_{k+s-1} = k,$$

so lautet das vollständige Integral der Differentialgleichung

$$y = C_1 x^{\lambda_1} + C_2 x^{\lambda_2} + \ldots + x^k (C_k + C_{k+1}\, lx + C_{k+2}\, l^2 x + \ldots + C_{k+s-1}\, l^{s-1} x) + \ldots$$
$$\ldots + C_{n-1} x^{\lambda_{n-1}} + C_n x^{\lambda_n} + \zeta,$$

$$\zeta = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{x}{1!} + \ldots + \alpha_k^{(s)} \frac{x^k}{k!} l^s x + \alpha_{k+1} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} + \ldots + \alpha_\mu \frac{x^\mu}{\mu!},$$

wobei jedoch $\alpha'_k$ den besondern Werth

$$\alpha_k^{(s)} = \frac{s!\, A_k}{\varphi_{(k)}^{(s)}}$$

hat.

2. Ist in der Gleichung 1) $b = 0$, so schreibe man $ax$ für $x$; dann liegt vor

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = A_0 + A_1 \frac{x}{1!} + \ldots + A_\mu \frac{x^\mu}{\mu!}.$$

Die Coefficienten des Ergänzungsintegrals

$$\zeta = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{x}{1!} + \ldots + \alpha^\mu \frac{x^\mu}{\mu!}$$

bestimmen sich aus folgendem Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll}
a_0 \alpha_\mu & = A_\mu, \\
a_0 \alpha_{\mu-1} + a_1 \alpha_\mu & = A_{\mu-1}, \\
a_0 \alpha_{\mu-2} + a_1 \alpha_{\mu-1} + a_2 \alpha_\mu & = A_{\mu-2}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
a_0 \alpha_0 \quad + a_1 \alpha_1 \quad + \ldots + a_{n-1} \alpha_{n-1} + a_n \alpha_n & = A_0.
\end{array}$$

Das vollständige Integral der Differentialgleichung lautet

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x} + \zeta,$$

unter $\lambda_1$ bis $\lambda_n$ die Wurzeln der Gleichung

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

verstanden.*

Die Coefficienten $\alpha$ lassen sich nicht bestimmen, falls $a_0 = 0$, oder $a_0 = a_1 = 0$, oder $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ etc. Verschwinden etwa sämmtliche Factoren von $a_0$ bis $a_{\varrho-1}$, so setze man

$$\frac{d^\varrho y}{dx^\varrho} = \eta,$$

dann geht die Gleichung

---

* Eine ähnliche Behandlungsweise gestattet die Differentialgleichung, wenn ihr zweiter Theil die Form $A_0 e^{\nu_0 x} + A_1 e^{\nu_1 x} + \ldots$ hat. Das Ergänzungsintegral lautet dementsprechend $\zeta = \alpha_0 e^{\nu_0 x} + \alpha_1 e^{\nu_1 x} + \ldots$.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_\varrho y^{(\varrho)} = X_\mu$$

über in

$$a_n \eta^{(n-\varrho)} + a_{n-1} \eta^{(n-\varrho-1)} + \ldots + a_{\varrho+1} \eta' + a_\varrho \eta = X_\mu,$$

und dieser letzten genügt

$$\eta = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_{n-\varrho} e^{\lambda_{n-\varrho} x} + \alpha_0 + \alpha_1 \frac{x}{1!} + \ldots + \alpha_\mu \frac{x^\mu}{\mu!}.$$

Integrirt man jetzt $\varrho$-mal hinter einander, so entsteht

$$y = C'_1 e^{\lambda_1 x} + C'_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C'_{n-\varrho} e^{\lambda_{n-\varrho} x} + C_{n-\varrho+1} + C_{n-\varrho+2} x + \ldots$$

$$\ldots + C_n x^{\varrho-1} + \alpha_0 \frac{x^\varrho}{\varrho!} + \alpha_1 \frac{x^{\varrho+1}}{(\varrho+1)!} + \ldots + \alpha_\mu \frac{x^{\varrho+\mu}}{(\varrho+\mu)!}.$$

Dieses ist das vollständige Integral der vorgelegten Differentialgleichung für den erwähnten Ausnahmefall. Es sei noch bemerkt, dass sich die Annahme eines Supplementintegrals in Form einer ganzen Function für die linearen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten bereits in französischen Lehrbüchern vorfindet. Eine Discussion des Integrals wird aber daselbst nicht gegeben; auch sind meines Wissens andere Gleichungen in dieser Weise nicht behandelt worden. Man vergleiche Moigno, Leçons de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral. Paris 1844. T. 2 p. 626; — Sturm, Cours d'Analyse de l'École Polytechnique. Paris 1873. T. 2 p. 133.

## § 4.

Bei den bisher betrachteten Differentialgleichungen genügte es im Allgemeinen, dem Integral der reducirten Gleichung eine ganze Function additiv beizugeben, um das Integral der completen Gleichung herzustellen.

In den Fällen, welche nun zu betrachten sind, gestaltet sich die Sache weniger einfach. Es sei vorgelegt

$$X_n y^{(n)} + X_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + X_1 y' + X_0 y = X_\mu,$$

unter $X_n$ bis $X_0$ ganze Functionen beliebigen Grades, unter $X_\mu$ eine ganze Function $\mu^{\text{ten}}$ Grades verstanden.

Uebersteigt der Grad der Functionen $X_n$ bis $X_0$ die Ordnung der mit ihnen multiplicirten Differentialquotienten im Maximum um die Zahl $h$, und ist $h \leq \mu$, so besteht das Supplementintegral aus einer ganzen Function $(\mu-h)^{\text{ten}}$ Grades und aus einem additiven Bestandtheile $z$, welcher partikuläre Lösung der Gleichung

$$X_n z^{(n)} + X_{n-1} z^{(n-1)} + \ldots + X_1 z' + X_0 z = X_{h-1}$$

ist, wo $X_{h-1}$ eine Function vom höchstens $(h-1)^{\text{ten}}$ Grade bedeutet.*

Die Bestimmung von $z$ für gewisse Klassen von Differentialgleichungen bildet den Gegenstand dieses und der nächsten Paragraphen.

* Hierbei ist jedoch vorausgesetzt — und das genügt für unsere späteren Untersuchungen —, dass bereits $X_0$ den $h^{\text{ten}}$ Grad besitzt.

Sei vorgelegt die Riccati'sche Gleichung

$$1)\qquad \frac{d^m y}{dx^m} + a x^n y = A_0 + A_1 \frac{x}{1!} + A_2 \frac{x^2}{2!} + \dots + A_\mu \frac{x^\mu}{\mu!},$$

unter $m$ und $n$ ganze positive Zahlen gedacht.

Man setze, falls $\mu \geqq n$,

$$y = z + \zeta, \quad \zeta = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{x}{1!} + \dots + \alpha_{\mu-n} \frac{x^{\mu-n}}{(\mu-n)!}$$

und wähle die $\alpha$ so, dass Gleichung 1) übergeht in

$$2)\qquad \frac{d^m z}{dx^m} + a x^n z = B_0 + B_1 \frac{x}{1!} + \dots + B_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

Eine Bestimmung der $\alpha$ ist immer möglich, und zwar schon aus dem Grunde, als der reducirten Differentialgleichung bei positivem $n$ nie eine Potenz partikulär genügen kann. — Unbestimmtheiten bei Ermittelung der Coefficienten des Ergänzungsintegrals treten nämlich nur dann auf, wenn in dem letzteren gewisse additive Bestandtheile vorkommen, welche sich schon in dem Integrale der reducirten Differentialgleichung finden. In den bisher betrachteten Gleichungen waren diese Bestandtheile Potenzen.

Der Gleichung 2) genügt, falls die $B$ Null sind, wie Kummer im XIX. Bd. von Crelle's Journal gezeigt hat, folgendes $n$-fache Integral:

$$\left.\begin{aligned} z &= {}_n\!\int_0^\infty e^{-\frac{u_1^\nu + \dots + u_n^\nu}{\nu}} u_2 u_3^2 u_4^3 \dots u_n^{n-1} . S\, du_1 \dots du_n \\ S &= C_1 e^{\varepsilon_1 u_1 \dots u_n x} + \dots + C_\nu e^{\varepsilon_\nu u_1 \dots u_n x} \end{aligned}\right\},$$

worin $\nu = m + n$, und $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots \varepsilon_\nu$ die Wurzeln der Gleichung

$$\varepsilon^\nu + a = 0$$

bedeuten. $C_1$ bis $C_\nu$ sind $(m+n)$ Constante, von denen jedoch nur $m$ willkürlich sind; es unterliegen daher die Constanten noch $n$ Bedingungsgleichungen, welche sofort erhalten werden, wenn man bedenkt, dass für $x = 0$

$$z^{(m)} = 0, \quad z^{(m+1)} = 0, \quad \dots \quad z^{(m+n-1)} = 0.$$

Es ist nun einleuchtend, dass das oben aufgeschriebene Integral der Gleichung 2) auch dann genügen wird, wenn die rechte Seite derselben nicht verschwindet, sondern der Ausdruck

$$B_0 + B_1 \frac{x}{1!} + \dots + B_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

ist. Man hat nämlich die letzten Bedingungen dahin abzuändern, dass für $x = 0$

$$z^{(m)} = B_0, \quad z^{(m+1)} = B_1, \quad \dots \quad z^{(m+n-1)} = B_{n-1}.$$

Da nun

$$\left.\begin{array}{l} z^{(k)}_{x=0} = {}_n\int\limits_0^\infty e^{-\frac{u_1^\nu+\ldots+u_n^\nu}{\nu}} u_2 u_3^2 \ldots u_n^{n-1} . S^{(k)}_{x=0}\, du_1 \ldots du_n \\ S^{(k)}_{x=0} = \{C_1 \varepsilon_1^k + C_2 \varepsilon_2^k + \ldots + C_\nu \varepsilon_\nu^k\} . (u_1 u_2 \ldots u_n)^k \end{array}\right\},$$

so hat man zur Bestimmung der $n$ überflüssigen Constanten $n$ Gleichungen von der Gestalt

$${}_n\int\limits_0^\infty e^{-\frac{u_1^\nu+\ldots+u_n^\nu}{\nu}} u_1^k u_2^{k+1} \ldots u_n^{k+n-1} \{C_1 \varepsilon_1^k + C_2 \varepsilon_2^k + \ldots + C_\nu \varepsilon_\nu^k\} du_1 \ldots du_n = B_{k-m},$$

worin für $k$ der Reihe nach

$$m,\ m+1,\ m+2,\ \ldots\ m+n-1$$

zu setzen ist.

Gebraucht man folgende Abkürzung:

$${}_n\int\limits_0^\infty e^{-\frac{u_1^\nu+\ldots+u_n^\nu}{\nu}} u_1^k u_2^{k+1} \ldots u_n^{k+n-1} du_1\, du_2 \ldots du_n = \vartheta(k),$$

so lautet die letzte Gleichung einfacher

$$C_1 \varepsilon_1^k + C_2 \varepsilon_2^k + \ldots + C_\nu \varepsilon_\nu^k = B_{k-m} : \vartheta(k).$$

Das Integral $\vartheta(k)$ kann durch ein Product von Gammafunctionen ausgedrückt werden, denn es ist für $\frac{u^\nu}{\nu} = \xi$

$$\int\limits_0^\infty e^{-\frac{u^\nu}{\nu}} u^\varkappa du = \nu^{\frac{\varkappa+1}{\nu}-1} \int\limits_0^\infty e^{-\xi} \xi^{\frac{\varkappa+1}{\nu}-1} d\xi = \nu^{\frac{\varkappa+1}{\nu}-1}\, \Gamma\left(\frac{\varkappa+1}{\nu}\right),$$

$$\varkappa+1>0;$$

mithin erhält man durch Multiplication für alle ganzen Zahlen $\varkappa$ von $k$ bis $k+n-1$

$$\vartheta(k) = \nu^\omega \Gamma\left(\frac{k+1}{\nu}\right) \Gamma\left(\frac{k+2}{\nu}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{k+n}{\nu}\right), \quad \omega = \frac{n}{2\nu}[n+1-2(\nu-k)].$$

Diese Formel benutzt man zur Berechnung der $n$ Ausdrücke $\vartheta(m)$ bis $\vartheta(m+n-1)$; übrigens bedient man sich hierbei noch zweckmässig der Relation

$$\vartheta(k+1) = \nu^{\frac{n}{\nu}} \frac{\Gamma\left(\frac{k+n+1}{\nu}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{\nu}\right)} \cdot \vartheta(k),$$

deren Richtigkeit unmittelbar einleuchtet.

Beispiel.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + ax^2 y = A_0 + A_1 \frac{x}{1!} + \ldots + A_\mu \frac{x^\mu}{\mu!}.$$

Diese Gleichung kann mittels

$$y = z + \alpha_0 + \alpha_1 \frac{x}{1!} + \ldots + \alpha_{\mu-2} \frac{x^{\mu-2}}{(\mu-2)!}$$

vereinfacht werden zu

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + a x^2 z = B_0 + B_1 \frac{x}{1!},$$

und weil hier

$$m = 2, \quad n = 2, \quad \nu = 4,$$

so genügt der letzten Differentialgleichung

$$z = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u_1^4 + u_2^4}{4}} u_2 \{ C_1 e^{\varepsilon_1 u_1 u_2 x} + C_2 e^{\varepsilon_2 u_1 u_2 x} + C_3 e^{\varepsilon_3 u_1 u_2 x} + C_4 e^{\varepsilon_4 u_1 u_2 x} \} \, du_1 \, du_2.$$

Für $k = 2$ und $k = 3$ erhält man die beiden Bedingungsgleichungen für die willkürlichen Constanten, nämlich

$$\left. \begin{array}{l} C_1 \varepsilon_1^2 + C_2 \varepsilon_2^2 + C_3 \varepsilon_3^2 + C_4 \varepsilon_4^2 = B_0 : \vartheta(2) \\ C_1 \varepsilon_1^3 + C_2 \varepsilon_2^3 + C_3 \varepsilon_3^3 + C_4 \varepsilon_4^3 = B_1 : \vartheta(3) \end{array} \right\}, \quad \varepsilon^4 + a = 0,$$

und hier ist

$$\vartheta(2) = \tfrac{1}{2} \sqrt{2}\, \Gamma(\tfrac{3}{4}), \quad \vartheta(3) = \tfrac{1}{4} \sqrt{2}\, \Gamma(\tfrac{1}{4}).$$

Bei denjenigen Integralen, mit welchen Kummer die Riccatischen Gleichungen integrirt, tritt also der eigenthümliche Umstand ein, dass diese Integralformen gewissermassen eine grössere Capacität besitzen, als man ursprünglich von ihnen gefordert hat. Diese Erscheinung erklärt sich in dem Ueberfluss der willkürlichen Constanten, von denen eine bestimmte Anzahl zweckmässig verwendet werden kann.

Uebrigens sind es nicht nur die Riccati'schen Gleichungen, welche sich in der vorgetragenen Weise behandeln lassen. Betrachten wir z. B. die Differentialgleichung*

$$3) \quad \begin{array}{l} (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3) \dfrac{d^2 y}{dx^2} + \left\{ \begin{array}{l} (b_2+b_3)(x-a_2)(x-a_3) \\ + (b_3+b_1)(x-a_3)(x-a_1) \\ + (b_1+b_2)(x-a_1)(x-a_2) \end{array} \right\} \dfrac{dy}{dx} \\ \qquad - \lambda \left\{ \begin{array}{l} b_1(x-a_1) \\ + b_2(x-a_2) \\ + b_3(x-a_3) \end{array} \right\} = X, \end{array}$$

in welcher

$$1 - (b_1 + b_2 + b_3) = \lambda$$

und $X$ eine ganze Function ist. Mittels der Substitution

$$y = z + \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots$$

bringt man es dahin, dass sich die rechte Seite der Gleichung auf eine Constante $B$ reducirt; es sei daher von Anfang an $X = B$. Für diesen Fall genügt der Gleichung 3), wenn die Zahlen $b_1$, $b_2$ und $b_3$ positiv gedacht werden, folgender Ausdruck:

---

* Diese Gleichung hat Verfasser in einer Arbeit „Ueber Differentialgleichungen, welche durch hypergeometrische Functionen integrirt werden können" aufgestellt; Zeitschrift für Mathematik und Physik, XXIX. Jahrg. 3. Heft.

$$y = C_1 \int_{a_1}^{\infty} R\,du + C_2 \int_{a_2}^{\infty} R\,du + C_3 \int_{a_3}^{\infty} R\,du,$$

wobei

$$R = (u - a_1)^{b_1 - 1} (u - a_2)^{b_2 - 1} (u - a_3)^{b_3 - 1}$$

und die Integrationsconstanten an die Bedingung

$$C_1 + C_2 + C_3 = B : \lambda$$

gebunden sind.

Denn führt man die Werthe von $y$, $y'$ und $y''$ in die Differentialgleichung ein, so entsteht

$$\lambda \sum_{k=1}^{k=3} [C_k \{(u-a_1)^{b_1} (u-a_2)^{b_2} (u-a_3)^{b_3} (u-x)^{\lambda-1}\}]_{a_k}^{\infty} = B$$

oder, da

$$b_1 + b_2 + b_3 + \lambda - 1 = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{k=3} \left[C_k \left\{\left(1-\frac{a_1}{u}\right)^{b_1} \left(1-\frac{a_2}{u}\right)^{b_2} \left(1-\frac{a_3}{u}\right)^{b_3} \left(1-\frac{x}{u}\right)^{\lambda-1}\right\}\right]_{a_k}^{\infty} = B : \lambda,$$

und nach Einführung der Grenzen

$$C_1 + C_2 + C_3 = B : \lambda.$$

## § 5.

### Supplementintegral der Laplace'schen Gleichung

$$1)\quad (a_n + b_n x) y^{(n)} + (a_{n-1} + b_{n-1} x) y^{(n-1)} + \ldots + (a_0 + b_0 x) y = X_\mu,$$

$$X_\mu = A_0 + A_1 \frac{x}{1!} + A_2 \frac{x^2}{2!} + \ldots + A_\mu \frac{x^\mu}{\mu!}.$$

Man hat nach dem Früheren das Supplement in der Form

$$\zeta = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{x}{1!} + \ldots + \alpha_{\mu-1} \frac{x^{\mu-1}}{(\mu-1)!} + z$$

vorauszusetzen, dann ergeben sich die $\alpha$ nach folgendem Schema:

$$\left.\begin{array}{ll} a_0 \alpha_h & + b_0 h \alpha_{h-1} \\ + a_1 \alpha_{h+1} & + b_1 h \alpha_h \\ + a_2 \alpha_{h+2} & + b_2 h \alpha_{h+1} \\ \ldots & \ldots \\ + a_n \alpha_{h+n} & + b_n h \alpha_{h+n-1} \end{array}\right\} = A_h,$$

d. h. man hat

$$b_0 \mu \alpha_{\mu-1} = A_\mu, \quad \left.\begin{array}{l} a_1 \alpha_{\mu-1} + b_0(\mu-1) \alpha_{\mu-2} \\ \qquad + b_1(\mu-1) \alpha_{\mu-1} \end{array}\right\} = A_{\mu-1} \text{ etc.}$$

und die Bestimmung ist, da $b_0 \gtrless 0$ vorausgesetzt werden darf, immer möglich.

Der zweite Bestandtheil $z$ des Supplements ist partikuläre Lösung der vereinfachten Gleichung

$$2)\quad (a_n + b_n x) z^{(n)} + (a_{n-1} + b_{n-1} x) z^{(n-1)} + \ldots + (a_0 + b_0 x) z = B,$$

wo $B$ eine Constante ist, deren Werth sich nach Ermittelung der $\alpha$ von selbst ergiebt, nämlich

$$B = A_0 - \sum_{k=0}^{k=n} a_k \alpha_k.$$

Um die Gleichung 2) zu integriren, schlagen wir denselben Weg ein, den Laplace bei der Integration der reducirten Gleichung nahm. Wir setzen nach dessen Vorgang

$$z = \int_{u_1}^{u_2} e^{ux} V\, du,$$

dann geht die Gleichung 2) über in

$$\int_{u_1}^{u_2} e^{ux}(U_0 + U_1 x)\, V\, du = B$$

oder, nach geringer Reduction, in

$$\left[e^{ux} U_1 V\right]_{u_1}^{u_2} + \int_{u_1}^{u_2} e^{ux}\left[U_0 V - \frac{d}{du}(U_1 V)\right] du = B.$$

Hierbei bedeuten

$$U_0 = a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} + \ldots + a_1 u + a_0,$$
$$U_1 = b_n u^n + b_{n-1} u^{n-1} + \ldots + b_1 u + b_0.$$

Wählt man $V$ so, dass

$$U_0 V - \frac{d}{du}(U_1 V) = 0,$$

und die Grenzen so, dass

$$\left[e^{ux} U_1 V\right]_{u_1}^{u_2} = B,$$

so ergiebt sich

$$V = \frac{\gamma}{U_1} e^{\int \frac{U_0}{U_1} du}, \quad \gamma = const.,$$

und die Gleichung zur Bestimmung der Grenzen erlangt infolge dessen die Gestalt

$$\gamma \left[e^{ux + \int \frac{U_0}{U_1} du}\right]_{u_1}^{u_2} = B.$$

Nun ist im Allgemeinen

$$\frac{U_0}{U_1} = m + \frac{\beta_1}{u - \alpha_1} + \frac{\beta_2}{u - \alpha_2} + \ldots + \frac{\beta_n}{u - \alpha_n};$$

sonach hat man, wenn $b_n = 1$ genommen wird,*

$$z = \gamma \int_{u_1}^{u_2} e^{u(m+x)} (u - \alpha_1)^{\beta_1 - 1} (u - \alpha_2)^{\beta_2 - 1} \ldots (u - \alpha_n)^{\beta_n - 1}\, du$$

und für die Integrationsgrenzen

* Die Grössen $\alpha$ haben in diesem Paragraphen eine doppelte Bedeutung, doch kann dies hier nicht zu Verwechslungen führen.

$$\gamma\left[e^{u(m+x)}(u-\alpha_1)^{\beta_1}(u-\alpha_2)^{\beta_2}\dots(u-\alpha_n)^{\beta_n}\right]_{u_1}^{u_2}=B.$$

Wir haben jetzt zwei Fälle zu unterscheiden.

Es sei $\alpha_k$ kleiner als alle anderen $\alpha$ und

a) $\beta_k$ resp. sein reeller Bestandtheil positiv.

Dann wähle man $u_1=0$ und $u_2=\alpha_k$, wodurch die Gleichung für die Grenzen übergeht in

$$-\gamma(-\alpha_1)^{\beta_1}(-\alpha_2)^{\beta_2}\dots(-\alpha_n)^{\beta_n}=B$$

und sich die bisher unbestimmte Constante $\gamma$ ergiebt. Man findet

$$\gamma=(-1)^{\beta+1}B.\alpha_1^{-\beta_1}\alpha_2^{-\beta_2}\dots\alpha_n^{-\beta_n},\ \text{wobei}\ \beta=\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_n;$$

auch sei bemerkt, dass sämmtliche $\alpha$ von Null verschieden sind, weil $b_0 \gtrless 0$.

b) $\beta_k$ resp. sein reeller Bestandtheil sei negativ.

Dann setze man zunächst

$$z=z_1e^{\alpha_k x}$$

und es entsteht

$$z_1=\gamma\int_{u_1}^{u_2}e^{mu+x(u-\alpha_k)}(u-\alpha_k)^{\beta_k-1}U_k\,du,$$

unter $U_k$ das Product

$$(u-\alpha_1)^{\beta_1-1}(u-\alpha_2)^{\beta_2-1}\dots(u-\alpha_n)^{\beta_n-1}$$

verstanden, wenn in selbigem der Factor $(u-\alpha_k)^{\beta_k-1}$ fehlt. Eine $\nu$-malige Differentiation von $z_1$ nach $x$ liefert

$$z_1^{(\nu)}=\gamma\int_{u_1}^{u_2}e^{mu+x(u-\alpha_k)}(u-\alpha_k)^{\beta_k+\nu-1}U_k\,du,$$

und für

$$z_1^{(\nu)}=z_2e^{-\alpha_k x}$$

folgt endlich

$$z_2=\gamma\int_{u_1}^{u_2}e^{u(m+x)}(u-\alpha_k)^{\beta_k+\nu-1}U_k\,du.$$

Wählt man für $\nu$ diejenige ganze positive Zahl, deren Werth unmittelbar dem absolut genommenen $\beta_k$ folgt, so dürfen dem letzten Integral wieder die Grenzen $u_1=0$ und $u_2=\alpha_k$ ertheilt werden. Rückwärts ergiebt sich jetzt für das Integral der in Rede stehenden Differentialgleichung

$$z=e^{\alpha_k x}\frac{d^{-\nu}}{dx^{-\nu}}\{e^{-\alpha_k x}z_2\},$$

d. h.

$$z=\gamma e^{\alpha_k x}\,{}_{\nu}\!\int dx^{\nu}.e^{-\alpha_k x}\int_0^{\alpha_k}e^{u(m+x)}(u-\alpha_k)^{\beta_k+\nu-1}U\,du.$$

Der Factor $\gamma$ bestimmt sich durch

$$e^{a_k x}\,{}_\nu\!\int dx^\nu . e^{-a_k x} . \gamma(-1)^{\beta+\nu+1}\,\alpha_1^{\beta_1}\alpha_2^{\beta_2}\ldots\alpha_k^{\beta_k+\nu}\ldots\alpha_n^{\beta_n} = B$$

oder

$$\gamma(-1)^{\beta+1} . \alpha_1^{\beta_1}\alpha_2^{\beta_2}\ldots\alpha_k^{\beta_k}\ldots\alpha_n^{\beta_n} = B;$$

er hat also, wie früher, den Werth

$$\gamma = (-1)^{\beta+1} . B . \alpha_1^{-\beta_1}\alpha_2^{-\beta_2}\ldots\alpha_n^{-\beta_n}.$$

Obwohl nun das Supplementintegral für den allgemeinen Fall aufgestellt ist, so bleiben doch noch viele specielle Fälle zur Discussion übrig, welche auftreten, wenn die Gleichung $U_1 = 0$ mehrfache oder unendlich grosse Wurzeln besitzt. Wir führen nur einen dieser Specialfälle an und zwar den einfachsten. Es sei vorgelegt

$$3)\qquad a_n z^{(n)} + a_{n-1} z^{(n-1)} + \ldots + a_1 z' + (a_0 + b_0 x) z = B.$$

Dann ist, wenn $b_0 = 1$ genommen wird,

$$U_0 = a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} + \ldots + a_1 u + a_0, \quad U_1 = 1,$$

mithin

$$V = e^{a_n \frac{u^{n+1}}{n+1} + a_{n-1}\frac{u^n}{n} + \ldots + a_1 \frac{u^2}{2} + a_0 u}.$$

Der Ausdruck zur Bestimmung der Grenzen

$$e^{ux + a_n \frac{u^{n+1}}{n+1} + \ldots + a_0 u}$$

kann in $(n+1)$-facher Weise zum Verschwinden gebracht werden, nämlich für Werthe von $u$, welche der Gleichung

$$a_n u^{n+1} = -\infty$$

entnommen sind.

Denken wir uns in die Gleichung 3) die Summe

$$z = C_1 \int_0^{\varepsilon_1 \infty} e^{ux} V du + C_2 \int_0^{\varepsilon_2 \infty} e^{ux} V du + \ldots + C_{n+1} \int_0^{\varepsilon_{n+1} \infty} e^{ux} V du$$

eingeführt, wo $\varepsilon_1$ bis $\varepsilon_{n+1}$ die Wurzeln von

$$a_n \varepsilon^{n+1} = -1$$

bedeuten, so muss sich Folgendes ergeben:

$$\sum_{k=1}^{k=n+1} \left\{ C_k\, e^{ux + a_n \frac{u^{n+1}}{n+1} + \ldots + a_0 u} \right\}_0^{\varepsilon_k \infty} = B,$$

oder nach Einsetzen der Grenzen

$$C_1 + C_2 + \ldots + C_{n+1} = -B.$$

Da $n$ Constante willkürlich bleiben, so stellt der vorige Ausdruck für $z$ das complete Integral der gegebenen Differentialgleichung dar. Um diesen Ausdruck noch etwas zu vereinfachen, schreibe man in den $(n+1)$ Quadraturen der Reihe nach

$$\varepsilon_1 u, \ \varepsilon_2 u, \ \ldots \ \varepsilon_{n+1} u$$

statt $u$. Dann erlangen sämmtliche Integrale als obere Grenze den Werth $\infty$, und setzt man noch abkürzend

$$\varepsilon_k e^{\varepsilon_k u x + a_{n-1}\frac{\varepsilon_k^n u^n}{n} + \dots + a_1 \frac{\varepsilon_k^2 u^2}{2}} + a_0 \varepsilon_k u = W_k,$$

so gestattet das Integral der Gleichung 3) folgende Schreibweise:

$$z = \int_0^\infty e^{-\frac{u^{n+1}}{n+1}} \{C_1 W_1 + C_2 W_2 + \dots + C_{n+1} W_{n+1}\} du.$$

## § 6.

### Supplementintegral von

$$1) \quad \begin{aligned}(a_n + b_n x + c_n x^2) y^{(n)} + (a_{n-1} + b_{n-1} x + c_{n-1} x^2) y^{(n-1)} + \dots \\ \dots + (a_0 + b_0 x + c_0 x^2) y = X_\mu,\end{aligned}$$

$$X_\mu = A_0 + A_1 \frac{x}{1!} + A_2 \frac{x^2}{2!} + \dots + A_\mu \frac{x^\mu}{\mu!}.$$

Da in dieser Gleichung der Coefficient des $y$ vom zweiten Grade ist, so kann der algebraische Theil des Ergänzungsintegrals im Allgemeinen höchstens den $(\mu-2)^{\text{ten}}$ Grad erreichen, und es wird sich daher der zweite Theil der Gleichung nur auf eine lineare Function $B_0 + B_1 x$ reduciren lassen. Die weitere Integration unterliegt deshalb grösseren Schwierigkeiten, als dies bei den früher betrachteten Gleichungen der Fall war, wie dies schon das einfache Beispiel

$$a_2 y'' + (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x + c_0 x^2) y = X_\mu$$

zeigen wird.

Setzen wir also das Ergänzungsintegral in der Form

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{x}{1!} + \alpha_2 \frac{x^2}{2!} + \dots + \alpha_{\mu-2} \frac{x^{\mu-2}}{(\mu-2)!} + z$$

voraus und bestimmen die $\alpha$ nach dem Schema

$$\left.\begin{array}{lll} a_0 \alpha_h & + b_0 h \alpha_{h-1} & + c_0 h(h-1) \alpha_{h-2} \\ + a_1 \alpha_{h+1} & + b_1 h \alpha_h & + c_1 h(h-1) \alpha_{h-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ + a_n \alpha_{h+n} & + b_n h \alpha_{h+n-1} & + c_n h(h-1) \alpha_{h+n-2} \end{array}\right\} = A_h,$$

was immer möglich ist, wenn $c_0 \gtrless 0$ vorausgesetzt wird, so ist der andere Theil $z$ des Ergänzungsintegrals partikuläre Lösung der vereinfachten Gleichung

$$1\text{a}) \quad (a_n + b_n x + c_n x^2) z^{(n)} + \dots + (a_0 + b_0 x + c_0 x^2) z = B_0 + B_1 x,$$

in welcher $B_0$ und $B_1$ bestimmte Zahlen sind, die sich nach Ermittelung der $\alpha$ von selbst ergeben.

Führt man in die Gleichung 1a) das Integral

$$z = \int_{u_1}^{u_2} e^{ux} V du$$

ein, so entsteht

$$\int_{u_1}^{u_2} e^{ux} V \{U_0 + U_1 x + U_2 x^2\} du = B_0 + B_1 x,$$

wobei

$$\left.\begin{array}{l} U_0 = a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} + \ldots + a_1 u + a_0 \\ U_1 = b_n u^n + b_{n-1} u^{n-1} + \ldots + b_1 u + b_0 \\ U_2 = c_n u^n + c_{n-1} u^{n-1} + \ldots + c_1 u + c_0 \end{array}\right\}.$$

Nach einiger Reduction findet man weiter

$$\left.\begin{array}{l} \left[e^{ux}\left\{x U_2 V + U_1 V - \frac{d}{du}(U_2 V)\right\}\right]_{u_1}^{u_2} \\ + \int_{u_1}^{u_2} e^{ux}\left\{U_0 V - \frac{d}{du}(U_1 V) + \frac{d^2}{du^2}(U_2 V)\right\} du \end{array}\right\} = B_0 + B_1 x$$

oder, wenn aus naheliegenden Gründen die Substitution

$$U_2 V = W e^{\int \frac{U_1}{U_2} du}$$

gebraucht wird,

$$\left.\begin{array}{l} \left[e^{ux + \int \frac{U_1}{U_2} du}\left\{x W - \frac{dW}{du}\right\}\right]_{u_1}^{u_2} \\ + \int_{u_1}^{u_2} e^{ux + \int \frac{U_1}{U_2} du} \frac{1}{U_2}\left\{U_2 \frac{d^2 W}{du^2} + U_1 \frac{dW}{du} + U_0 W\right\} du \end{array}\right\} = B_0 + B_1 x.$$

Man suche nun $W$ so zu bestimmen, dass

$$U_2 \frac{d^2 W}{du^2} + U_1 \frac{dW}{du} + U_0 W = 0,$$

dann ergiebt sich, falls die letzte Differentialgleichung überhaupt vollständig integrirt werden kann,

$$W = \gamma_1 f_1(u) + \gamma_2 f_2(u),$$

worin $\gamma_1$ und $\gamma_2$ noch unbestimmte Constanten sind. Die vorhergehende Gleichung aber zerfällt in die beiden anderen

$$\left[e^{ux + \int \frac{U_1}{U_2} du} W'\right]_{u_1}^{u_2} = -B_0, \quad \left[e^{ux + \int \frac{U_1}{U_2} du} W\right]_{u_1}^{u_2} = B_1.$$

Gelingt es, für $u_1$ und $u_2$ gewisse constante Zahlen ausfindig zu machen, so dass diese Gleichungen von $x$ unabhängig werden, dann lassen sie sich mit Hilfe der noch unbestimmten Grössen $\gamma_1$ und $\gamma_2$ identisch erfüllen.

Wählt man $u_1 = 0$ und wenn möglich $u_2$ so, dass die linken Seiten der enannten Gleichungen verschwinden, so hat man

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_1 f'_1(u) + \gamma_2 f'_2(u) = B_0 e^{-\int \frac{U_1}{U_2} du} \\ \gamma_1 f_1(u) + \gamma_2 f_2(u) = -B_1 e^{-\int \frac{U_1}{U_2} du} \end{array}\right\} \quad (u = 0),$$

und hieraus folgt

$$\left.\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{B_0 f_2(u) + B_1 f'_2(u)}{f'_1(u) f_2(u) - f'_2(u) f_1(u)} e^{-\int \frac{U_1}{U_2} du} \\ \gamma_2 &= -\frac{B_0 f_1(u) + B_1 f'_1(u)}{f'_1(u) f_2(u) - f'_2(u) f_1(u)} e^{-\int \frac{U_1}{U_2} du}\end{aligned}\right\} \quad (u = 0).$$

Nun besteht aber nach **Abel** zwischen den partikulären Integralen einer linearen Differentialgleichung

$$U_2 f'' + U_1 f' + U_0 f = 0$$

folgende Relation:

$$f'_1(u) f_2(u) - f'_2(u) f_1(u) = \frac{1}{\varkappa} e^{-\int \frac{U_1}{U_2} du},$$

wobei $\varkappa$ eine gewisse Constante ist, die sich durch Specialisirung des $u$ ergiebt; sonach hat man einfacher

$$\gamma_1 = \varkappa \{ B_0 f_2(0) + B_1 f'_2(0) \}, \quad \gamma_2 = -\varkappa \{ B_0 f_1(0) + B_1 f'_1(0) \}.$$

Nach diesen Bestimmungen lautet das Ergänzungsintegral der Gleichung 1a) folgendermassen:

$$z = \int_{u_1}^{u_2} e^{ux} V \, du = \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{U_2} e^{ux + \int \frac{U_1}{U_2} du} \{ \gamma_1 f_1(u) + \gamma_2 f_2(u) \} \, du,$$

vorausgesetzt, dass dieser Ausdruck für die ermittelten Grenzen einen Sinn hat.

Im Allgemeinen ist

$$\frac{U_1}{U_2} = m + \frac{\beta_1}{u - \alpha_1} + \frac{\beta_2}{u - \alpha_2} + \ldots + \frac{\beta_n}{n - \alpha_n},$$

also

$$e^{ux + \int \frac{U_1}{U_2} du} = e^{u(m+x)} (u - \alpha_1)^{\beta_1} (u - \alpha_2)^{\beta_2} \ldots (u - \alpha_n)^{\beta_n},$$

und nennt man $\alpha_k$ das kleinste aller $\alpha$, so hat man, falls $\beta_k$ positiv ist, für $u_1 = 0$ und $u_2 = \alpha_k$ das Integral

$$z = \frac{1}{c_2} \int_0^{\alpha_k} e^{u(m+x)} (u - \alpha_1)^{\beta_1 - 1} \ldots (u - \alpha_n)^{\beta_n - 1} \{ \gamma_1 f_1(u) + \gamma_2 f_2(u) \} \, du.$$

Ist $\beta_k$ negativ, so kommt man mit Hilfe von vielfachen Integralen zum Ziele; ist $\beta_k$ complex, so bezieht sich die Vorzeichenbestimmung auf den reellen Theil. (Vergl. § 5.)

(Schluss folgt.)

# Kleinere Mittheilungen.

---

## I. Construction der von einem beliebigen Punkte der Ebene ausgehenden Normalen einer Ellipse.

(Hierzu Taf. II Fig. 1.)

### I.

In der Abhandlung „Ueber die Normalen der Ellipse" (diese Zeitschrift XXVI, 6) gelangte ich mit Hilfe des Satzes:

„Werden unter $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ die excentrischen Winkel der Fusspunkte der Normalen verstanden, welche von einem Punkte der Ebene aus auf eine Ellipse gefällt werden können, dann ist die Summe derselben eine constante Grösse und zwar gleich 180°"

zu einer einfachen Lösung des Joachimsthal'schen Problems: von einem Punkte der Normale einer Ellipse die noch übrigen drei möglichen Normalen auf diese Curve zu fällen.

Ich erlaube mir, im Nachfolgenden den allgemeinen Fall dieses Problems in Betracht zu ziehen, für welchen der Ausgangspunkt der Normalen irgend ein beliebiger Punkt der Ebene ist, seine Lage also nicht durch die Bedingung beschränkt erscheint, er soll einer schon construirten Normale angehören.

1. Wenn wir die Gleichung der Ellipse in der Form

$$1)\qquad b^2\xi^2 + a^2\eta^2 = a^2b^2$$

annehmen, so gehören die Fusspunkte aller Normalen, welche von einem Punkte aus, z. B. $P(g, h)$ (Fig. 1) auf die Ellipse $\Sigma$ gefällt werden können, einer gleichseitigen Hyperbel an, deren Gleichung

$$2)\qquad a^2gy - b^2hx = c^2xy, \quad a^2 - b^2 = c^2$$

ist. Mit der Construction dieser Hyperbel wäre im Grunde genommen die Lösung unserer Aufgabe schon herbeigeführt.

Es lässt sich jedoch zeigen, dass man auch ohne Benützung derselben und zwar mit Hilfe eines Kreises die Normalenconstruction durchzuführen vermag, welche Lösung des Problems überdies die Vortheile grösserer Genauigkeit und Eleganz für sich in Anspruch nimmt.

Betrachten wir nämlich die oben citirte Relation

$$3)\qquad \alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^0$$

in Verbindung mit der von Joachimsthal angegebenen Gleichung

$$4)\qquad \alpha'+\beta'+\gamma'+\delta'=2K.180^0,$$

welche den Zusammenhang von vier Kreispunkten der Ellipse zum Ausdruck bringt und besagt, dass die Summe der excentrischen Winkel dieser Punkte ein gerades Vielfaches von $180^0$ sein muss, so erkennen wir, dass es jederzeit möglich ist, durch geeignete Transformation der Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ Systeme von Kreispunkten $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, $\delta'$ auf der Ellipse zu bilden, in der Weise, dass ein jeder Punkt eines solchen Systems mit einem bestimmten Normalenfusspunkte correspondirt.

Wir haben zu diesem Zwecke nur nothwendig, den excentrischen Winkeln der Normalenfusspunkte derartige Zuwächse zu ertheilen, dass die Gesammtsumme derselben ein ungerades Vielfaches von $180^0$ beträgt; denn dann werden die den neuen Winkeln entsprechenden Punkte wirklich Punkte ein und desselben Kreises sein, da sie ja die Bedingung 4) erfüllen müssen.

Die nachfolgenden Formen a) und b), in welchen für $m$ und $n$ entweder Null oder jede beliebige ganze Zahl gesetzt werden kann, können als der allgemeine Ausdruck dieser Transformation angesehen werden.

a)

$$\begin{aligned}\alpha'&=(2m+1)\alpha+(2n+1)\,45^0,\\ \beta'&=(2m+1)\beta+(2n+1)\,45^0,\\ \gamma'&=(2m+1)\gamma+(2n+1)\,45^0,\\ \delta'&=(2m+1)\delta+(2n+1)\,45^0.\end{aligned}$$

Der Werth des excentrischen Winkels nach der Transformation setzt sich zusammen aus einem ungeraden Vielfachen des Winkelwerthes in der ursprünglichen Lage, mehr einem ungeraden Vielfachen von $45^0$.

b)

$$\begin{aligned}\alpha'&=2(m+1)\alpha+2n.45^0,\\ \beta'&=2(m+1)\beta+2n.45^0,\\ \gamma'&=2(m+1)\gamma+2n.45^0,\\ \delta'&=2(m+1)\delta+2n.45^0.\end{aligned}$$

Der Werth des excentrischen Winkels nach der Transformation setzt sich zusammen aus einem geraden Vielfachen des Winkelwerthes in der ursprünglichen Lage, mehr einem geraden Vielfachen von $45^0$.

In beiden Fällen ergiebt die Addition der Gleichungen

$$\alpha'+\beta'+\gamma'+\delta'=2(m+n+1)180^0,$$

was der Bedingung für Kreispunkte gleichkommt.

Denken wir uns nun einen Kreis construirt, welcher den Anforderungen einer der beiden Transformationen genügt, dann haben wir in den Schnittpunkten desselben mit der Ellipse ein Mittel, um zu den Normalenfusspunkten zu gelangen, ohne von der erwähnten gleichseitigen

Hyperbel Gebrauch machen zu müssen. Und dies ist auch der Weg, den wir zunächst einschlagen werden.

2. Wir nehmen an, dass

$$x = a\cos\varphi, \quad y = b\sin\varphi$$

die Coordinatensymbole für die Fusspunkte der von $P(g, h)$ ausgehenden Normalen sind.

Unter Anwendung der Transformation $a$ mit den speciellen Werthen $m = n = 0$ ergeben sich Coordinatensymbole für die Kreispunkte mit

$$\xi = a\cos(45 + \varphi), \quad \eta = b\sin(45 + \varphi)$$

oder

$$\xi = \frac{a(\cos\varphi - \sin\varphi)}{\sqrt{2}}, \quad \eta = \frac{b(\cos\varphi + \sin\varphi)}{\sqrt{2}},$$

die dann auch in der Form

$$5) \qquad \sqrt{2}\,\frac{\xi}{a} = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}, \quad \sqrt{2}\,\frac{\eta}{b} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$$

geschrieben werden können. Aus diesen Gleichungen folgen nun wieder für $x$ und $y$ die Werthe

$$\sqrt{2}\,\frac{x}{a} = \frac{\eta}{b} + \frac{\xi}{a}, \quad \sqrt{2}\,\frac{y}{b} = \frac{\eta}{b} - \frac{\xi}{a},$$

und wenn wir dieselben in 2) substituiren, so gelangen wir schliesslich zu einer Gleichung zweiten Grades zwischen $\xi$ und $\eta$ von der Form

$$c^2\left(\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}\right) = \sqrt{2}\,ag\left(\frac{\xi}{a} - \frac{\eta}{b}\right) + \sqrt{2}\,bh\left(\frac{\xi}{a} + \frac{\eta}{b}\right)$$

welche natürlich nur einen Kegelschnitt darstellen kann, der durch die vier Kreispunkte geht.

Allgemein wird also, wenn $\Theta$ einen constanten Factor bedeutet,

$$\Theta c^2\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1\right) + c^2\left(\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2}\right) = \sqrt{2}\,ag\left(\frac{\xi}{a} - \frac{\eta}{b}\right) + \sqrt{2}\,bh\left(\frac{\xi}{a} + \frac{\eta}{b}\right)$$

die Gleichung des Büschels der Kegelschnitte sein, welche die vier Kreispunkte der Ellipse gemeinschaftlich haben.

Aus dieser Gleichung gewinnen wir durch die Substitution

$$\Theta c^2 = a^2 + b^2,$$

durch welche die Coefficienten der höchsten Potenzen gleiche Werthe erhalten, die Gleichung des gesuchten Kreises

$$6) \quad (K) \quad 2\left(\xi^2 + \eta^2 - \frac{a^2 + b^2}{2}\right) = \sqrt{2}\,ag\left(\frac{\xi}{a} - \frac{\eta}{b}\right) + \sqrt{2}\,bh\left(\frac{\xi}{a} + \frac{\eta}{b}\right).$$

Um diesen Kreis zu construiren, beachten wir, dass derselbe, wie aus seiner Gleichung hervorgeht, die Mittelpunktssehne

$$(ss_1) \quad ag\left(\frac{\xi}{a} - \frac{\eta}{b}\right) + bh\left(\frac{\xi}{a} + \frac{\eta}{b}\right) = 0$$

in denselben zwei Punkten trifft, in welchen sie auch von dem Kreise

$$7) \qquad (K_1)\ \xi^2+\eta^2=\frac{a^2+b^2}{2}$$

geschnitten wird.

Die Construction des Kreises $K_1$ unterliegt keinen Schwierigkeiten; denn bekanntlich hat derselbe mit der Ellipse das Paar conjugirter Durchmesser gemeinschaftlich, welches zu den Verbindungsgeraden der Ellipsenscheitelpunkte parallel läuft. Aber auch die Sehne $ss_1$ kann leicht bestimmt werden, wie aus nachfolgender Betrachtung hervorgeht.

Durch partielle Differentiation nach $\zeta$ und $\eta$ ergeben sich aus 6) die Coordinaten des Kreismittelpunktes $m$ in der Form

$$8) \qquad 2\sqrt{2}\,a\zeta_0=bh+ag, \quad 2\sqrt{2}\,b\eta_0=bh-ag.$$

Dividiren wir diese Gleichungen durch einander, so erhalten wir in

$$9) \qquad (bh-ag)a\zeta_0-(bh+ag)b\eta_0=0$$

die Gleichung der Geraden, welche den Mittelpunkt $m$ des Kreises $K$ mit $O$ verbindet.

Offenbar werden wir an der Bedeutung der Gleichung 9) auch nicht das Geringste ändern, wenn wir derselben durch gleichzeitige Addition und Subtraction des Productes $abgh$ die Gestalt

$$10) \qquad bh(a\zeta_0-b\eta_0-ag)-ag(a\zeta_0+b\eta_0-bh)=0$$

geben.

Es ist also 10) ebenso wie 9) die Gleichung der die Punkte $m$ und $O$ verbindenden Geraden; aber in der neuen Gestalt giebt sie uns Anhaltspunkte zu einer einfachen Construction.

Wir bemerken nämlich, dass die erwähnte Gerade auch den Schnittpunkt der durch die Gleichungen

$$11) \qquad a\zeta_0-b\eta_0-ag=0,$$

$$12) \qquad a\zeta_0+b\eta_0-bh=0$$

repräsentirten Geraden in sich enthält, da die Coordinaten

$$13) \qquad 2a\xi_1=bh+ag, \quad 2b\eta_1=bh-ag$$

desselben die Gleichungen 9) und 10) identisch auf Null führen.

Schreibt man 11) und 12) in der Form

$$\eta_0=\frac{a}{b}(\zeta_0-g), \quad \eta_0-h=-\frac{a}{b}\xi_0,$$

so lässt sich Folgendes aus denselben herauslesen:

Die Gerade 11) geht durch die Horizontalprojection $p_2$ des Normalenausgangspunktes $P$ und steht senkrecht auf der Verbindungslinie der Ellipsenscheitelpunkte $\alpha$, $\beta_1$; die Gerade 12) geht durch die Verticalprojection $p_1$ von $P$ und steht senkrecht auf der Verbindungsgeraden der Ellipsenscheitelpunkte $\alpha_1$, $\beta_1$.

Die beiden Geraden sind demnach leicht zu construiren.

Verbindet man nun den Schnittpunkt $p$ dieser Geraden mit dem Mittelpunkte $O$ der Ellipse, so ist die in $O$ auf $op$ errichtete Senkrechte

die Sehne $ss_1$ und ihre Schnittpunkte mit $K_1$ sind zwei Punkte des Kreises $K$.

Es erübrigt uns noch die Construction des Mittelpunktes $m$ von $K$. Aus den Gleichungen 8) erfolgt durch Quadrirung und nachherige Addition

$$2\,\overline{om}^2 = \frac{(bh+ag)^2}{4a^2} + \frac{(bh-ag)^2}{4b^2};$$

ebenso ergiebt sich aus den Gleichungen 13)

$$op^2 = \frac{(bh+ag)^2}{4a^2} + \frac{(bh-ag)^2}{4b^2},$$

woraus schliesslich

$$2\,\overline{om}^2 = \overline{op}^2$$

folgt.

Die Entfernung des Mittelpunktes $m$ von $O$ ist sonach der Seite eines Quadrates gleich, dessen Diagonale $op$ ist.

Nun sind wir in der Lage, den Kreis $K$ zu construiren, und unsere Aufgabe besteht weiter darin, von den Schnittpunkten $A$, $B$, $C$, $D$ desselben mit der Ellipse — von welchen ein jeder, wie wir gesehen haben, einem Normalenfusspunkte eindeutig entspricht — zu den letzteren überzugehen.

Zu diesem Ende dividiren wir die in 5) angeführten Gleichungen durch einander und geben der dadurch erhaltenen neuen Gleichung durch Addition und Subtraction des Productes $ab\zeta\eta$ die Gestalt

$$14)\qquad a\eta(bx-ay-b\zeta)-b\zeta(bx+ay-a\eta)=0.$$

Sonach repräsentirt 14) die Gleichungen der Geraden, welche die Normalenfusspunkte mit dem Mittelpunkte der Ellipse verbinden. Durch ganz ähnliche Schlussfolgerungen, wie wir sie bei der Construction der Sehne $ss_1$ angestellt haben, gelangen wir auch hier wieder zu einem Hilfspunkte, dargestellt durch den Schnitt der Geraden

$$15)\qquad y = \frac{b}{a}(x-\xi),$$

$$16)\qquad y-\eta = -\frac{b}{a}x,$$

welcher, wie aus den Gleichungen 15) und 16) erschlossen werden kann, sich folgendermassen finden lässt:

Durch die Horizontalprojection des Kreispunktes führe man eine Gerade parallel zu $\alpha_1$, $\beta_1$ und bringe dieselbe mit einer zweiten Geraden zum Schnitte, welche parallel zu $\alpha$, $\beta_1$ ist und durch die Verticalprojection des erwähnten Punktes geht.

Nun hat man, um zu dem Normalenfusspunkte zu gelangen, den Hilfspunkt mit dem Mittelpunkte der Ellipse zu verbinden und diese Verbindungslinie in jenem Quadranten mit der Curve zum Schnitte zu bringen, in welchem sich der Hilfspunkt befindet.

Fassen wir die gewonnenen Resultate noch einmal in kurzen Worten zusammen, so erledigt sich die Aufgabe, von $P$ (Fig. 1) die Normalen auf die Ellipse zu fällen, durch folgende einfache Construction.

Man fälle die Perpendikel $Pp_1$, $Pp_2$ von $P$ aus auf die Axen und bestimme den Punkt $p$ als Schnitt zweier Geraden, von denen die eine durch $p_1$ geht und normal zu $\alpha_1\beta_1$ ist, die andere durch $p_2$ geht und auf $\alpha\beta_1$ senkrecht steht. Nun verbinde man $p$ mit $o$ und errichte in $O$ auf $op$ die Senkrechte, welche den Kreis $K_1$ in $s$, $s_1$ schneidet.

Macht man ferner $om$ gleich der Seite eines Quadrates, dessen Diagonale $op$ ist, und beschreibt von $m$ aus mit dem Halbmesser $ms = ms_1$ den Kreis $K$, der die Ellipse in den Punkten $A$, $B$, $C$, $D$ schneidet, so gelangt man von einem derselben — z. B. $A$ — zu dem ihm entsprechenden Normalenfusspunkte I durch folgende Construction:

$$a_2 a // \alpha_1\beta_1, \quad a_1 a // \alpha\beta_1.$$

Die Verbindungsgerade $oa$ schneidet $\Sigma$ in I.

KARL LAUERMANN.

---

## II. Reciproke Maxima und Minima.

„Sind

$$u = F(x, y), \quad v = f(x, y) \tag{1}$$

Functionen von der Beschaffenheit, dass bei constantem $x$ einer Zu- oder Abnahme von $u$ auch eine Zu- oder Abnahme von $v$ entspricht, so tritt bei constantem $v$ ein Maximum oder Minimum von $u$ unter derselben Bedingung ein, als bei constantem $u$ ein Minimum oder Maximum von $v$."

Beweis. Eliminirt man $y$ aus den Gleichungen 1) und differentiirt die erhaltene Gleichung

$$\varphi(u, v, x) = 0, \tag{2}$$

so ergiebt sich unter Voraussetzung eines constanten $x$

$$\frac{\partial v}{\partial u} = -\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}}.$$

Dieser Differentialquotient muss wegen des gleichzeitigen Wachsens oder Abnehmens von $u$ und $v$ positiv sein, daher $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ das entgegengesetzte Vorzeichen haben wie $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$. —

Setzt man $v = constant$, so erreicht $u$ einen Culminationswerth für jene Werthe von $x$, welche der Gleichung genügen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0. \tag{3}$$

$u$ wird ein Maximum oder Minimum, je nachdem für diese Werthe

$$4)\qquad -\frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}}$$

negativ oder positiv ausfällt.

Setzt man jedoch $u = constant$, so erhält man die Werthe von $x$, welche $v$ zu einem Maximum oder Minimum machen, aus derselben Gleichung 3) und es entscheidet das Vorzeichen des Ausdrucks

$$5)\qquad -\frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial v}}$$

darüber, ob ein Maximum oder ein Minimum eintritt. Dieses Vorzeichen ist aber nach der eingangsgemachten Bemerkung das entgegengesetzte von dem des Ausdrucks 4). Daraus geht hervor:

1. dass die eine der Grössen $u$, $v$ bei constantem Werthe der andern unter derselben Bedingung 3) einen Culminationswerth erreicht als die andere, und
2. dass diese Culminationswerthe stets entgegengesetzter Art sind, so dass also einem Minimum von $u$ ein Minimum von $v$ und umgekehrt entspricht.

Der Beweis lässt sich auch auf elementarem Wege erbringen, wie folgt.

Es sei

$$6)\qquad u = \psi(v, x)$$

die Auflösung der Gleichung 2) und $X$ ein Werth von $x$, der bei constantem $v$ $u$ zu einem Maximum $= U$ macht; dann besteht für beliebig kleine positive $\delta$ und $\delta_1$ die Ungleichung

$$7)\qquad \psi(v, X-\delta) < \psi(v, X) > \psi(v, X+\delta_1).$$

Denken wir uns nun $v$ variabel, so können wir diese Ungleichung in eine Gleichung überführen, indem wir ohne Aenderung der Werthe von $x$ $v$ vergrössern, da hierdurch nach der Voraussetzung auch eine Vergrösserung von $u$ erzielt wird. Ist hiernach

$$8)\qquad \psi(v+\varepsilon, X-\delta) = \psi(v, X) = \psi(v+\varepsilon_1, X+\delta_1) = U,$$

so ist ersichtlich, dass unter den benachbarten Werthen $v+\varepsilon$, $v$, $v+\varepsilon_1$ der mittlere der kleinste, somit ein Minimum ist und ferner, dass dieses Minimum bei constantem $u = U$ für jenen Werth $X$ eintritt, der bei constantem $v = v$ $u$ zu einem Maximum $= U$ macht.

Dieser Satz begründet die Reciprocität der Sätze über die Figuren grössten Inhalts und kleinsten Umfangs, und ermöglicht es, aus einem dieser Sätze einen reciproken direct abzuleiten, z. B.:

1. „Unter allen isoperimetrischen Dreiecken über derselben Basis hat das gleichschenklige die grösste Fläche.“

Nun sind Fläche wie Umfang eines Dreiecks von gegebener Basis Functionen der beiden Winkel $A$ und $B$ an der Basis.

Bei constantem Winkel $A$ nehmen Fläche und Umfang gleichzeitig zu oder ab, daher gilt auch der reciproke Satz:

„Unter allen Dreiecken über derselben Basis und von gleichem Inhalte hat das gleichschenklige den kleinsten Umfang."

2. „Unter allen gleichseitigen $n$-Ecken mit gleichem Umfange hat das regelmässige $n$-Eck den grössten Inhalt."

Fläche und Umfang eines gleichseitigen $n$-Ecks nehmen bei gleicher Gestalt gleichzeitig zu oder ab; daher der Satz:

„Unter allen gleichseitigen $n$-Ecken mit gleichem Inhalte hat das regelmässige den kleinsten Umfang."

3. „Unter allen isoperimetrischen Figuren hat der Kreis den grössten Inhalt."

Fläche und Umfang einer Figur nehmen bei unveränderter Gestalt, somit gleichen Krümmungsverhältnissen gleichzeitig zu oder ab. Daraus folgt:

„Unter allen Figuren gleichen Inhalts hat der Kreis den kleinsten Umfang."

Trautenau, 22. Mai 1884. F. HALUSCHKA.

---

## III. Zur Gleichung von Kegel und Cylinder.

Sind die Gleichungen zweier Ebenen

$$u_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0, \quad u_2 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$

und sind die Coefficienten beider Gleichungen constant, so schneiden sich die Ebenen in einer Geraden der Richtung $(bc)|(ca)|(ab)$ und der Stellung $(ad)|(bd)|(cd)$ (vergl. diese Zeitschrift, Jahrg. 1883 S. 315). Im orthogonalen System ist dann, wenn $z's$ die durch $s$ parallel $z$ gelegte Projectionsebene ist,

$$tg\, z's^\wedge yz = -(bc):(ca), \quad tg\, x's^\wedge zx = -(ca):(ab), \quad tg\, y's^\wedge xy = -(ab):(bc)$$

oder

$$tg\, y's^\wedge yz : tg\, x's^\wedge tg\, xz : -1 = (bc):(ca):(ab).$$

Ist aber ein Coefficient, z. B. $a_1$, ein veränderlicher Parameter, so stellt die erste Gleichung ein Ebenenbüschel, d. h. eine einfache Ebenenserie, welche durch eine Gerade geht, dar. Die feste Gerade erhalten wir, wenn wir die Ebene dem Einfluss des veränderlichen $a_1$ entziehen und $x = 0$ setzen. Diese Ebene $x = 0$ enthält von der Ebene $a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$ die Gerade $b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$, welches die gemeinschaftliche Gerade des Büschels ist. Auf der zweiten Ebene wird durch dies Büschel von Ebenen ein Strahlenbüschel erzeugt mit dem Centrum $0 \left| \frac{(cd)}{(bc)} \right| \frac{-(bd)}{(bc)}$ und so

entsprechend, wenn $b_1$ und $c_1$ variabel sind. Ist $d_1$ variabel, so entsteht ein Bündel paralleler Ebenen, deren unendlich ferne Gerade die der Ebene $a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0$ ist. Dies Bündel erzeugt auf der zweiten Ebene ein Strahlenbündel mit unendlich fernem Centrum; die Strahlen haben die Richtung $(bc):(ca):(ab)$.

Sind zwei Coefficienten einer Gleichung veränderlich, so erhalten wir eine Doppelserie von Ebenen, vorausgesetzt, dass die beiden Coefficienten von einander unabhängig sind. Das Centrum der Doppelserie wäre z. B. $0 \Big| 0 \Big| -\frac{d_1}{c_1}$, wenn $a_1$ und $b_1$ die Veränderlichen sind.

Ist jedoch je ein Coefficient jeder Gleichung, z. B. $a_1$ und $b_2$, veränderlich, so entsteht als Schnitt beider Ebenenserien eine Doppelserie von Geraden, und, sind beide Coefficienten durch eine Gleichung an einander gebunden, eine einfache Serie von Geraden, eine geradlinige Fläche [Regelfläche]. Diese Regelfläche wird nun zu einem Kegel, wenn alle Geraden durch einen Punkt gehen, zu einem Cylinder, wenn sie parallel sind, d. h. ein unendlich fernes Centrum haben.

Es werde demnach zunächst vorausgesetzt, dass die Coefficienten Einer Gleichung unter einander unabhängig sind, und zwar constant, wenn nicht das Gegentheil durch eine weitere Gleichung hervorgehoben wird; ferner sei $f$ eine Function $n^{\text{ten}}$ Grades. Dann stellt

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad f(a_1, a_2) = 0$$

stets einen Kegel $n^{\text{ter}}$ Ordnung dar mit dem Centrum $0 \Big| \frac{(cd)}{(bc)} \Big| \frac{-(bd)}{(bc)}$.

Denn zu jedem willkürlich gewählten $a_1$ gehören $n$ bestimmte $a_2$; zu jeder Ebene $u_1 = 0$ gehören demnach $n$ Ebenen $u_2 = 0$, welche auf $u_1$ eine besondere Linie $n^{\text{ter}}$ Ordnung, bestehend aus $n$ Geraden eines Punktes, erzeugen. Das beweist, dass die Regelfläche, welche entsteht, jedenfalls $n^{\text{ter}}$ Ordnung ist. Von den Geraden der Ebenen sind nun unabhängig von den Veränderungen von $a_1$ resp. $a_2$ die Geraden

$$x = 0 \,|\, b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \quad \text{und} \quad x = 0 \,|\, b_2 y + c_2 z + d_2 = 0;$$

dieselben liegen beide auf einer Ebene, haben also einen Punkt gemein, und dieser muss auf allen Ebenen, also auch auf allen Geraden der Serie liegen.

Entsprechend stellt

$u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ f(b_1 b_2) = 0$ einen Kegel mit dem Centrum $\frac{-(cd)}{(ca)} \Big| 0 \Big| \frac{(ad)}{(ca)}$

und

$u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ f(c_1 c_2) = 0$ einen Kegel mit dem Centrum $\frac{(bd)}{(ab)} \Big| \frac{-(ad)}{(ab)} \Big| 0$

dar. Endlich wird

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad f(d_1 d_2) = 0$$

einen Cylinder repräsentiren. Denn die unendlich ferne Gerade der Ebenen wird die Axe der Serie sein und beide haben einen Schnitt-

punkt bestimmter Richtung, welcher zugleich die Richtung der Axe des Cylinders ist, nämlich

$$(bc):(ca):(ab).$$

Ist nun aber die Regelfläche

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad f(a_1 b_2) = 0$$

gegeben, so ist dieselbe nicht nothwendig ein Kegel. Die Axen der Serien

$$x = 0 \,|\, b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \quad \text{und} \quad y = 0 \,|\, a_2 x + c_2 z + d_2 = 0$$

haben nämlich nicht unbedingt einen Punkt gemein, sondern nur unter der Bedingung $(cd) = 0$; das Centrum muss auf $x = 0$ und $y = 0$ liegen, d. h. auf der $z$-Axe. Dieselbe wird von der ersten Geraden in $-d_1 : c_1$, von der zweiten in $-d_2 : c_2$ geschnitten, welche Punkte unter der Bedingung $(cd) = 0$ zusammenfallen und das Centrum liefern. Dementsprechend stellt das System

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad f(b_1 c_2) = 0, \quad (ad) = 0$$

einen Kegel dar mit dem Centrum $-\frac{d_1}{a_1} \Big| 0 \Big| 0$.

Ebenso wird nun

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad f(a_1 d_2) = 0, \quad (bc) = 0$$

einen Cylinder darstellen; denn die Axe der ersten Serie $x = 0 \,|\, b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$ hat mit der Axe der zweiten Serie $t = 0 \,|\, a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0$ dann und nur dann einen Punkt gemein, wenn der unendlich ferne Punkt beider auf der Ebene $x = 0$ liegt und derselbe ist, d. h. $b_1 y + c_1 z = 0$ und $b_2 y + c_2 z = 0$ gleichzeitig richtig sind. Die Richtung der Axe ist dann in der $yz$-Ebene $-\frac{c_1}{b_1} = -\frac{c_2}{b_2}$.

Sind nun aber die Coefficienten Einer Gleichung nicht unabhängig von einander, so lassen sich einzelne Fälle auf die vorigen zurückführen.

Es sei $d_1 = \delta_1 - \alpha_1 a_1$ und entsprechend $d_2 = \delta_2 - \alpha_2 a_2$, dann lauten die Gleichungen

$$a_1(x_1 - \alpha_1) + b_1 y + c_1 z + \delta_1 = 0, \quad a_2(x - \alpha_2) + b_2 y + c_2 z + \delta_2 = 0.$$

Sind $\alpha_1$ und $\alpha_2$ verschieden, so kann $f(a_1 a_2)$ offenbar keinen oder nur einen Kegel mit unendlich fernem Centrum erzeugen, d. h. einen Cylinder unter der Bedingung $(bc) = 0$, ein Fall, der schon früher behandelt wurde.

Ist entsprechend z. B. $b_1 = q_1 - p_1 a_1$, $b_2 = q_2 - p_2 a_2$, $p_1 \gtrless p_2$, so stellen die Gleichungen

$$a_1(x - p_1 y) + q_1 y + c_1 z + d_1 = 0, \quad a_2(x - p_2 y) + q_2 y + c_2 z + d_2 = 0,$$
$$f(a_1 a_2) = 0$$

einen Kegel dar unter der Bedingung $(cd) = 0$; das Centrum liegt auf der gemeinschaftlichen Geraden von $x - p_1 y = 0$ und $x - p_2 y = 0$, d. i.,

da $p_1$ und $p_2$ von einander verschieden sind, die $z$-Axe, ein Fall, der oben erledigt ist. Entsprechend ist z. B.

$u_1=0,\quad u_2=0,\quad f(c_1c_2)=0,\quad b_1=q_1-r_1c_1,\quad b_2=q_2-r_2c_2,\quad (ad)=0$

das Gleichungssystem eines Kegels mit dem Centrum $-\frac{a_1}{d_1}\Big|0\Big|0$.

Es sei nun $d_1=\delta_1-\alpha a_1$ und $d_2=\delta_2-\alpha a_2$, dann erscheinen die Gleichungen $u_1=0$ und $u_2=0$ in der Form

$$a_1(x-\alpha)+b_1y+c_1z+\delta_1=0,\quad a_2(x-\alpha)+b_2y+c_2z+\delta_2=0$$

und die Zusatzgleichung $f(a_1a_2)=0$ stellt wiederum unbedingt einen Kegel dar mit dem Centrum $\alpha\Big|\frac{(c\delta)}{(bc)}\Big|\frac{-(b\delta)}{(bc)}$. Die Zusatzgleichung $f(a_1b_2)=0$ erfordert noch die Bedingung $(c\delta)=0$ und liefert dann das Centrum $\alpha\Big|0\Big|-\frac{\delta_1}{c_1}$; und die Gleichung $f(a_1\delta_2)=0$ liefert einen Cylinder unter der Bedingung $(bc)=0$.

Die Analogien für $d_1=\delta_1-\beta b_1$ u. s. w. sind leicht zu bilden.

Ist $b_1=\beta_1-\alpha a_1$ und $b_2=\beta_2-\alpha a_2$, so stellt

$$a_1(x-\alpha y)+\beta_1y+c_1z+d_1=0,\quad a_2(x-\alpha y)+\beta_2y+c_2z+d_2=0,$$
$$f(a_1a_2)=0$$

wiederum unbedingt einen Kegel dar mit dem Centrum $\alpha\frac{(cd)}{(\beta c)}\Big|\frac{(cd)}{(\beta c)}\Big|\frac{-(\beta d)}{(\beta c)}$. $f(a_1b_2)=0$ oder $f(a_1\beta_2)=0$ führt auf die Bedingung $(cd)=0$ und das Centrum $0\Big|0\Big|-\frac{d_1}{c_1}$. $f(a_1c_2)=0$ verlangt die Bedingung $(\beta d)=0$; das Centrum ist $-\alpha\frac{d_1}{\beta_1}\Big|\frac{-d_1}{\beta_1}\Big|0$. $f(a_1d_2)=0$ erzeugt einen Cylinder unter der Bedingung $(\beta c)=0$, dessen Axe parallel der Geraden $x-dy=0\,|\,\beta_1y+c_1z=0$, d. h. $\frac{x}{y}=\alpha$, $\frac{z}{y}=\frac{-\beta_1}{c_1}$.

Die weiteren Zwischenfälle bieten nichts, das sich nicht auf das Vorhergehende reduciren oder auf die folgenden allgemeinen Fälle bringen lässt. Es sei $d_1$ linear abhängig von $a_1b_1c_1$, $d_2$ von $a_2b_2c_2$, so werden sich einfache Resultate nur ergeben, wenn die Abhängigkeit durch dieselbe lineare Gleichung $d=\delta-\alpha a-\beta b-\gamma c$ dargestellt wird. Unsere Ebenen haben dann die Gleichung

$$a_1(x-\alpha)+b_1(y-\beta)+c_1(z-\gamma)+\delta_1=0,$$
$$a_2(x-\alpha)+b_2(y-\beta)+c_2(z-\gamma)+\delta_2=0,$$

und auf diese Form wird man sie auch bringen, wenn z. B. neben $f(a_1b_2)=0$ nur gegeben $d_1=\delta'_1-\alpha a_1$ und $d_2=\delta'_2-\beta b_2$, indem $\delta_1$ und $\delta_2$ so gewählt werden, dass $\delta'_1=\delta_1-\beta b_1-\gamma c_1$, $\delta'_2=\delta_2-\alpha a_2-\gamma c_2$, was möglich ist und für $\gamma$ sogar die Wahl noch frei lässt.

Tritt zu diesen zwei Gleichungen die dirigirende $f(a_1 a_2) = 0$, so entsteht unbedingt ein Kegel mit dem Centrum $\alpha \left| \beta + \frac{(b\delta)}{(bc)} \right| \gamma - \frac{(c\delta)}{(bc)}$, entsprechend bei $f(b_1 b_2) = 0$, $f(c_1 c_2) = 0$.

$f(\delta_1 \delta_2) = 0$ liefert einen Cylinder, dessen Axe die Richtung $(bc):(ca):(ab)$ hat. Ist nun aber $f(a_1 b_2) = 0$, so erfordert der Kegel die Bedingung $(c\delta) = 0$ und das Centrum ist $\alpha \left| \beta \right| \gamma - \frac{\delta_1}{c_1}$.

Der Cylinder mit $f(a_1 \delta_2) = 0$ als Directrix und $(bc) = 0$ als Bedingungsgleichung hat die Axenrichtung $x = 0 \,|\, b_1 y + c_1 z = 0$.

Da, wie oben bewiesen, $\gamma$ willkürlich gewählt werden kann, wenn nur $a_1$ und $b_2$ und nur dadurch $d_1$ und $d_2$ veränderlich sind, kann man bei geeigneter Wahl von $c_1$ und $c_2$ stets die Gleichungen in die Form

$$a_1(x-\alpha) + b_1(y-\beta) + c_1(z-\gamma) = 0,$$
$$a_2(x-\alpha) + b_2(y-\beta) + c_2(z-\gamma) = 0$$

bringen, vorausgesetzt eben, dass nicht mehr wie je ein Coefficient jeder Gleichung veränderlich ist.

Damit ist nun ziemlich der Anschluss an die übliche Form erreicht [Schlömilch, Anal. Geom., Cap. VI; Baltzer, Anal. Geom., § 53]. Man braucht nur die zwei Ebenen durch diejenigen ihres Büschels zu ersetzen, welche den Axen parallel laufen und deren zwei schon unser System darstellen

$$(bc)(z-\gamma) = (ab)(x-\alpha), \quad (ca)(x-\alpha) = (bc)(y-\beta),$$
$$(ab)(y-\beta) = (ca)(z-\gamma).$$

Da $\delta = 0$ ist, sind die eventuellen Bedingungen $(a\delta) = 0$, $(b\delta) = 0$, $(c\delta) = 0$ von vornherein erfüllt, eine Gleichung zwischen zwei Coefficienten stellt unbedingt einen Kegel dar mit dem Centrum $\alpha | \beta | \gamma$. Die Directrixgleichungen $f(a_1 b_2) = 0$ etc. können nun ersetzt werden durch $f((ca), (ab)) = 0$ oder besser durch homogene Gleichungen $F((bc), (ca), (ab)) = 0$ [vergl. Briot-Bouquet, Géom. anal., Nr. 462; Salmon-Fiedler, Raumcurven, Art. 174].

Die Formel $a_1(x-\alpha) + b_1(y-\beta) + c_1(z-\gamma) = 0$ konnte nicht gewählt werden, wenn $\delta'_1$ selbst noch variabel, und es ist hier schon die allgemeinste Form die folgende:

$$a_1(x-\alpha) + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0, \quad a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0, \quad f(a_1 d_2) = 0;$$

diese erforderte die Bedingung $(bc) = 0$ und stellte dann einen Cylinder dar, dessen Axenrichtung $x = 0 \,|\, b_1 y + c_1 z = 0$ war.

Um auch für den Cylinder den Anschluss an die übliche Form zu gewinnen, benutzen wir die Hauptebenen der Geraden $u_1 = 0 \,|\, u_2 = 0$, d. i.

$$(bc)z = (ab)x - (bd), \quad (ca)x = (bc)y - (cd), \quad (ab)y = (ca)z - (ad).$$

Zwei dieser Gleichungen, in Verbindung mit einer Gleichung für ihre dritten Glieder, z. B. $f((bd), (cd)) = 0$, liefern unbedingt einen Cylinder

mit der Axenrichtung $(bc):(ca):(ab)$, woraus ersichtlich ist, dass $b$ und $c$ in der Gleichung $f=0$ nur als Constante auftreten dürfen. [Vergl. Schlömilch a. a. O. Cap. V.]

Hiermit ist der Fall erledigt, dass von den Constanten der Gleichungen $u_1=0$, $u_2=0$ vier in der Weise variabel waren, dass zwei aus verschiedenen Gleichungen durch eine Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades, je zwei aus derselben Gleichung durch eine lineare Gleichung verknüpft sind. Letztere Bedingung gestattet eine Erweiterung, deren allgemeiner Ausdruck in den Gleichungen

$$a_1(\alpha'_1 x+\beta'_1 y+\gamma'_1 z+\delta'_1)+b_1(\alpha'_2 x+\beta'_2 y+\gamma'_2 z+\delta'_2)$$
$$+c_1(\alpha'_3 x+\beta'_3 y+\gamma'_3 z+\delta'_3)+d_1(\alpha'_4 x+\beta'_4 y+\gamma'_4 z+\delta'_4)=0,$$
$$a_2(\alpha''_1 x+\beta''_1 y+\gamma''_1 z+\delta''_1)+b_2(\alpha''_2 x+\beta''_2 y+\gamma''_2 z+\delta''_2)$$
$$+c_2(\alpha''_3 x+\beta''_3 y+\gamma''_3 z+\delta''_3)+d_2(\alpha''_4 x+\beta''_4 y+\gamma''_4 z+\delta''_4)=0$$

enthalten ist, für welche die hier befolgte Behandlungsweise zu umständlich wird. [Vergl. Joachimsthal, Anwend. d. Diff.-Rechn., S. 102; Sturm, Cours d'Analyse, Nr. 667.]

Berlin, April 1884. A. Thaer.

---

# III.

## Die Curven vierter Ordnung mit drei doppelten Inflexionsknoten.


Von

Dr. C. Beyel

in Zürich.





(Schluss.)

Hierzu Taf. III u. IV Fig. 9—24.

### 15. Eintheilung der $C^4$ und Darstellung der Hauptformen.

Wir erhalten eine Uebersicht über die verschiedenen Formen der $C^4$, indem wir von den einfachsten derselben ausgehen. Für diese liegt entweder $m_1$ oder $M_1$ unendlich ferne und $K^2$ ist ein Kreis oder eine gleichseitige Hyperbel. Aus diesen speciellen Formen können wir die allgemeinen durch eine centrische Collineation erster Ordnung ableiten.

Ist $m_1$ unendlich fern, so halbirt $M_1$ die Strecken, welche zwischen zwei Punkten der $C^4$ liegen, die sich auf Geraden durch $M_1$ befinden. $C^4$ hat in $M_1$ einen Mittelpunkt. Sämmtliche Kegelschnitte $K_g^2$ sind Parabeln (1), und die quadratischen Transformationen (2), welche durch $C^4$ geleitet werden, zeichnen sich dadurch aus, dass jeder Geraden eine Parabel entspricht.

Ist $M_1$ unendlich fern, so halbirt $m_1$ die Strecken zwischen Punkten der $C^4$, welche auf Geraden von der Richtung $M_1$ liegen. $C^4$ ist zu sich selbst symmetrisch mit $m_1$ als Axe und $M_1 \infty$ als Richtung der Symmetrie.

In Taf. III Fig. 9—16 sind nun dem Gesagten entsprechend die einfachsten Typen der $C^4$ zusammengestellt. Fig. 9—12 zeigen Mittelpunktscurven, Fig. 13—16 Curven, welche zu $m_1$ orthogonal symmetrisch liegen. In Fig. 9, 10, 13, 14, 15 sind $M_1$, $M_2$, $M_3$ reell, in Fig. 11, 12, 16 sind $M_2$, $M_3$ imaginär. Wir fügen den Figuren einige Bemerkungen bei.

Fig. 9 ist so disponirt, dass $M_1$ ein isolirter Punkt von $C^4$ ist. Also muss die Involution $J_{1k}$ um $M_1$ elliptisch sein. Daher ist $K^2$ ein im Endlichen geschlossener Kegelschnitt, in unserem Falle ein Kreis. $J_{1k}$ ist also eine Rechtwinkelinvolution und folglich sind $m_2$, $m_3$ zu einander normal. $C^4$ ist zu diesen Geraden orthogonal symmetrisch. Ist $J_1$ durch $g_1 h_1$ gegeben, so schneiden diese Doppelstrahlen $K^2$ in einem Quadrupel von $C^4$.

Die weiteren Verbindungslinien dieser Quadrupelpunkte sind die resp. Doppelstrahlen $g_2 h_2$, $g_3 h_3$ der Involutionen $J_2$, $J_3$. Aus ihnen und den Doppelstrahlen der Involutionen $J_{2k}$, $J_{3k}$ bestimmen wir die Inflexionstangenten $i_2 i_2^*$, $i_3 i_3^*$. In unserem Falle sind diese zugleich die Asymptoten der $C^4$. Sie schneiden sich paarweise in Punkten $T$ der Sehnen, welche die Schnittpunkte von $m_2 m_3$ und $K^2$ verbinden. (4.) — Der Kegelschnitt $K^{*2}$, der $K^2$ in $m_1$ berührt (12), ist ein zu $K^2$ concentrischer Kreis. Wir erhalten einen seiner Peripheriepunkte, indem wir aus einem der Berührungspunkte von $K^2$ mit $C^4$ — sagen wir aus einem dieser Punkte in $h_1$ — die Normale zu $g_1$ ziehen. Sie trifft $g_1$ in dem gesuchten Punkte. (12.) $K^{*2}$ berührt $C^4$ in einem imaginären Quadrupel. — Die Tangente in $A'_1$ an $C^4$ erhalten wir nach folgendem Gesetze. Liegt $A'_1$ auf der Geraden $x_1$ durch $M_1$, so ziehen wir durch $A'_1$ die Parallele zu $m_2$ (oder $m_3$) und schneiden mit derselben den dem $x_1$ in $J_1$ correspondirenden Strahl $x'_1$. In letzterem Schnittpunkte errichten wir eine Normale zu $x'_1$, welche $m_3$ (oder $m_2$) in einem Punkte der verlangten Tangente trifft. (13.) — Sämmtliche Kegelschnitte $K_q^2$, welche $m_1$ in $K^2$ berühren, sind zu $K^2$ concentrische Kreise. In Taf. III Fig. 9 ist ein solcher Kreis eingezeichnet, der die zwei Quadrupel $A'_1 \ldots H'_1$ enthält. Die Kegelschnitte $K^2$ sind Ellipsen, welche $M_1$ zum Mittelpunkte haben. Kein reeller Punkt von $C^4$ kann im Innern einer solchen Ellipse liegen — ausgenommen $M_1$. (1.) $C^4$ theilt also die Ebene in zwei Felder, in deren einem sämmtliche Ellipsen $K^2$ liegen. Diese sind von $C^4$ eingeschlossen.

Die Kegelschnitte $K_m^2$ und $K_s^2$ sind gleichseitige Hyperbeln.

Taf. III Fig. 10. $M_1$ hat reelle Inflexionstangenten. Also muss $J_{1k}$ hyperbolisch sein und $K^2$ ist eine Hyperbel, in unserem Falle eine gleichseitige. $J_1$ ist dadurch specialisirt, dass $m_2$, $m_3$ als Axen dieser Hyperbel angenommen sind. $C^4$ liegt mithin zu $m_2 m_3$ orthogonal symmetrisch. Weiter ist $J_1$ so disponirt, dass $K^2$ die $C^4$ imaginär berührt.

Haben wir auf bekannte Weise die Inflexionstangenten $i_1$, $i_1^*$ bestimmt, so zeichnen wir aus ihnen mit Hilfe der Sehnen, in welchen $K^2$ die Geraden $m_1$, $m_2$ schneidet, die Punkte $T_{12}$, $T_{12}^*$ (4). Durch diese gehen $i_2$, $i_2^*$, die Asymptoten von $C^4$. $K^{*2}$ ist eine gleichseitige Hyperbel. Sie schneidet $m_1 m_2$ in einer Sehne, welche durch $T_{12}$. gehen muss. Also trifft diese Sehne, welche parallel einer Asymptote der Hyperbel $K^2$ ist, $m^2$ in einem Scheitel von $K^{*2}$, und somit ist dieser Kegelschnitt bestimmt. Auch er berührt $C^4$ imaginär.

Sämmtliche Kegelschnitte $K_q^2$, welche $K^2$ in zwei Punkten von $m_1$ berühren, ferner die Kegelschnitte $K_m^2$, $K_s^2$ sind gleichseitige Hyperbeln. Die Kegelschnitte $K^2$ sind Hyperbeln, welche von $C^4$ ausgeschlossen werden.

Taf. III Fig. 11 stellt eine Mittelpunktscurve $C^4$ (resp. deren eine Hälfte) dar, für welche $M_2 M_3$ imaginär ist. Die Involution $J_{1k}$ muss also hyperbolisch sein, d. h. $K^2$ ist Hyperbel, in unserem Falle eine gleichseitige.

$g_1$, $h_1$ — die Doppelstrahlen von $J_1$ — müssen die Asymptoten $a_1$, $a_1^*$ dieser Hyperbel trennen.. Für den dargestellten Fall ist $J_1$ so disponirt, dass $g_1$, $h_1$ die Axen der gleichseitigen Hyperbel $K^2$ sind. Daraus ergiebt sich, dass $m_1$, $m_2$ die Strahlen nach den imaginären Kreispunkten der Ebene sind. Also geht $C^4$ durch diese Kreispunkte — $i_1 i_1^*$ fällt mit den Asymptoten der Hyperbel zusammen und diese repräsentiren auch den Kegelschnitt $K^{*2}$, welcher $K^2$ in $m_1$ berührt.

Nach der in 5 besprochenen Methode sind die zwei reellen Doppeltangenten von $C^4$ construirt. $H_1$, $H_1^*$ liegen in $g_1$ resp. $h_1$ unendlich fern. Wir ziehen dann durch den in $g_1$ gelegenen und in Bezug auf $K^2$ elliptischen Punkt $H_1^*$ die Geraden $w_1 w'_1$, $w_2 w'_2$, $w_3 w'_3$. Diese sind Paare der Involutionen $J_{1w}$ und liegen in unserem Falle zu $g_1$ orthogonal symmetrisch. Wir schneiden sie mit einer beliebigen Geraden $g$ und erhalten dadurch drei Paare einer Punktinvolution. Diese ist auf einen Hilfskegelschnitt $H^2$ übertragen, der durch $M_1$ geht und $g_1$, $g$ zu Tangenten hat. Dann sind die Verbindungslinien entsprechender Paare parallel zu $g_1$ und schneiden $g$ in den Punkten $w_1$, $w_2$, $w_3$. Nun construiren wir die Kegelschnitte $K_w^2$, die $K^2$ in den Schnittpunkten mit den Geraden $w$, $w'$ berühren, und bestimmen die Tangenten aus $M_1$ an diese Kegelschnitte. Sie sind Paare der Involution $J_t$. Auch diese übertragen wir auf $H^2$ und ziehen die Verbindungslinien entsprechender Punkte. Wir erhalten dadurch drei weitere Gerade $t_1$, $t_2$, $t_3$, welche $g_1$ parallel sind und $g$ in den Punkten $T_1$, $T_2$, $T_3$ schneiden. Nun sind die Punktreihen $w_1 w_2 w_3$, $T_1 T_2 T_3$ zu einander projectivisch. In dieser Projectivität construiren wir zu $T_\infty$ den entsprechenden Punkt $w$. Er führt uns zu einem Geradenpaare $w_\infty w'_\infty$, welches die Hyperbel $K^2$ in Punkten trifft, deren correspondirende auf $C^4$ mit Hilfe von $J_1$ gefunden werden und die Berührungspunkte der gesuchten Doppeltangenten — $d_1$, $d_1^*$ — sind. Die Construction in Fig. 11 ist dadurch vereinfacht, dass $w_2$ im Unendlichen und $w_3$ in $g_1$ angenommen wurde.

Sämmtliche Kegelschnitte $K^2$ sind gleichseitige Hyperbeln und liegen ausserhalb $C^4$. Desgleichen sind alle Kegelschnitte $K_q^2$ gleichseitige Hyperbeln. Die Kegelschnitte $K_s^2$ und $K_m^2$ sind Kreise. Aus dieser Bemerkung ergiebt sich die Construction der Tangente in einem Punkte — $F'_1$ — von $C^4$ mit Hilfe des berührenden Kreises $K_s^2$. Wir legen einen Kreis $K_m^2$ durch $M_1 F'_1$ und einen weiteren Punkt der $C^4$. Nehmen wir als letzteren den zu $F'_1$ orthogonal symmetrischen Punkt $E'_1$, so liegt der Mittelpunkt von $K_s^2$ in $g_1$. Nun bestimmen wir den Pol $T$ von $E'_1 F'_1$ in Bezug auf $K_m^2$. Durch $T$ und $M_1 F'_1$ geht ein Kreis — $K_s^2$ —, der $C^4$ in $F'_1$ berührt.

Taf. III Fig. 12 giebt — wie 11 — eine $C^4$ mit einem reellen und zwei imaginären Inflexionspunkten. Im Gegensatze zu 11 befinden sich aber $g_1$, $h_1$ in allgemeiner Lage, so dass also $C^4$ nicht durch die imaginären Kreispunkte geht.

Nachdem $i_1$, $i_1^*$ bestimmt ist, benutzen wir diese Geraden, um aus $K^2$ und $J_1$ die Involution $J_1^*$ zu zeichnen. Mit Hilfe von $J_1^*$ finden wir (12) einen Punkt und eine Tangente von $K^{*2}$. Letzterer Kegelschnitt ist gleichseitige Hyperbel und berührt — wie $K^2$ — die $C^4$ in zwei reellen Punkten.

Taf. III Fig. 13 stellt die zu $m_1$ orthogonal symmetrische Curve $C^4$ dar, für welche $M_1^\infty$ ein isolirter Punkt ist. $M_1$ ist also in Bezug auf $K^2$ ein elliptischer Punkt und folglich muss jede Gerade durch $M_1$ den Kegelschnitt $K^2$ reell schneiden. Unter diese Geraden gehört auch die unendlich ferne und daraus folgt, dass $K^2$ eine Hyperbel ist. In Fig. 13 ist dieselbe als gleichseitig angenommen. Die unendlich ferne Gerade trifft aber $C^4$ ausser in $M_1$ noch in zwei Punkten. Wir erhalten sie, indem wir in der Involution $J_1$ zur unendlich fernen Geraden die entsprechende — $u$ — bestimmen. Diese liegt in der Mitte von $g_1 h_1$. Die Tangenten in ihren Schnittpunkten mit $K^2$ haben die Richtung der gesuchten Punkte. In letzteren zeichnen wir auf bekannte Weise die Tangenten an $C^4$. Diese sind Asymptoten — $a$, $a^*$ — der Curve.

In Taf. III Fig. 14 hat $M_{1\infty}$ reelle Inflexionstangenten. $K^2$ ist als Kreis angenommen. $i_1 i_1^*$ sind ein Paar Asymptoten. Das andere Paar erhalten wir wie bei Fig. 13.

In Taf. III Fig. 15 ist $K^2$ als gleichseitige Hyperbel angenommen. $C^4$ hat ausser $i_1$, $i_1^*$ keine weiteren Asymptoten. Aus $K^2$ ist mit Hilfe von $T_{1\gamma}$ der Kegelschnitt $K^{*2}$ gezeichnet, der $K^2$ in zwei Punkten von $m_1$ und $C^4$ in den Punkten eines imaginären Quadrupels berührt.

Taf. III Fig. 16 stellt eine zu $m_1$ orthogonal symmetrische $C^4$ dar, für welche $M_2$, $M_3$ imaginär sind. $K^2$ ist als Kreis angenommen. $K^{*2}$ ergiebt sich daraus als Hyperbel. $i_1$, $i_1^*$ sind die beiden reellen Asymptoten.

Ein Ueberblick über die bis jetzt erwähnten $C^4$ ergiebt, dass nur die in Taf. III Fig. 9, 10, 12 und 16 gezeichneten Formen wesentlich von einander verschieden sind. Fig. 14 und 15 kann aus 9 dadurch abgeleitet werden, dass wir eines der bei Fig. 9 im Unendlichen liegenden $M$ ins Endliche rücken lassen. In analoger Weise erhalten wir die in Fig. 13 dargestellte Curve aus der in Fig. 10 gezeichneten. $C^4$ von Fig. 11 endlich ist eine specielle Form der $C^4$ von Fig. 12. Aus den Fig. 9, 10, 12, 16 leiten wir die allgemeinen Formen der $C^4$ mittels einer centrischen Collineation erster Ordnung ab, und zwar die $C^4$ mit drei reellen Inflexionsknoten aus Fig. 9 oder 10 und die $C^4$ mit einem reellen Inflexionsknoten aus Fig. 12 oder 16. Wollen wir aber solche Formen direct aus einem Kegelschnitt zeichnen, so bedienen wir uns dazu der in 10 entwickelten Methode, bei der wir von einem Kreise durch $M_1 M_2 M_3$ ausgehen. Mittels derselben sind die Curven vierter Ordnung von Taf. IV Fig. 17, 18, 19 construirt. Es sind dies $C^4$ mit drei reellen Inflexionsknoten.

Taf. IV Fig. 17 giebt eine $C^4$, welche durch die imaginären Punkte des Kreises $K_m^2$ geht. $T$ muss also der Mittelpunkt von $K_m^2$ sein. Ueberdies

ist $M_2 M_3$ so gewählt, dass $M_1 M_2$ gleich $M_1 M_3$ ist. Infolge dessen ist $C^4$ zur Linie $M_1 T$ orthogonal symmetrisch. $C^4$ hat zwei reelle Asymptoten. Zu ihrer Construction ziehen wir eine Mittellinie des Dreiecks $m_1 m_2 m_3$ — sagen wir $u_3$ — parallel $m_3$. Dann trifft $u_3$ die Curve $C^4$ in zwei Punkten $U_1$, $U_2$ und es müssen die vierten harmonischen zu diesen Punkten in Bezug auf $U_3 m_3$ unendlich fern liegen. Also geben uns $M_3 U_1$ und $M_3 U_2$ die Richtungen der Asymptoten an. Letztere aber erhalten wir, indem wir die Hyperbel $K_m^{*2}$ construiren (9), welche durch $M_1 U_2 U_3$ geht und $M_3 U_1$, $M_3 U_2$ zu Asymptotenrichtungen hat. Sie schneidet $C^4$ auf der unendlich fernen Geraden. Also ist der Mittelpunkt — $T^*$ — dieser Hyperbel ein Punkt von der Art der Punkte $T$. Nun bestimmen wir einen Kegelschnitt $K_s^{*2}$ durch $T^* M_1 M_2 M_3$ und den unendlich fernen Punkt auf $M_3 U_1$. Die Asymptote in letzterem Punkte ist e i n e der gesuchten Asymptoten von $C^4$. Die a n d e r e erhalten wir mit Hilfe des Kegelschnittes durch $M_1 M_2 M_3 T^*$ und den unendlich fernen Punkt auf $M_3 U_2$.

Taf. IV Fig. 18 stellt eine Curve $C^4$ dar, welche vier reelle Asymptoten besitzt. Zur Construction der letzteren sind die vier Punkte $U_1$, $U_2$, $U_3$, $U_4$ benutzt, in welchen die zu $m_1$ parallele Mittellinie $u_1$ des Dreiecks $m_1 m_2 m_3$ die $C^4$ trifft.

Taf. IV Fig. 19 zeigt eine $C^4$, welche einen parabolischen Ast besitzt. Um diese zu construiren, gehen wir von einer Parabel $K^2$ aus, welche $C^4$ in der unendlich fernen Geraden der Ebene berührt. Für dieselbe muss $M_1 M_2 M_3$ ein Tripel harmonischer Pole sein. Sie muss $C^4$ in den Mittellinien $u_1$, $u_2$, $u_3$ des Dreiecks $m_1 m_2 m_3$ berühren. Damit ist $C^4$ bestimmt und wir können aus $K^2$ und $J_1$ weitere Punkte dieser Curve zeichnen. Legen wir sodann durch $M_1 M_2 M_3$ einen Kreis $K_m^2$, so erhalten wir seine Schnittpunkte mit $C^4$, indem wir die Pole von zwei Gruppen von Involutionen $J_1$, $J_2$, $J_3$ in Bezug auf $K^2$ suchen. Diese Pole liegen auf zwei Geraden (3), deren Schnittpunkt $T$ der Pol zur Verbindungslinie der Schnittpunkte von $K_m^2$ mit $C^4$ ist. Damit kennen wir diese Schnittpunkte.

## 16. Die imaginäre Curve vierter Ordnung mit drei reellen Inflexionsknoten.

Wir wollen nun die Curve untersuchen, welche nach der in 1 gegebenen Methode aus einem Kegelschnitt $K^2$ erzeugt werden kann, der imaginär ist.

Wenn wir festsetzen, dass von $K^2$ ein Tripel harmonischer Pole — $M_1 M_2 M_3$ resp. $m_1 m_2 m_3$ — gegeben sei und überdies um $M_1$ und $M_2$ ein weiteres Paar — $w_1 w'_1$, $w_2 w'_2$ — der Involutionen harmonischer Polaren — $J_{1k}$, $J_{2k}$ —, so ist dadurch $K^2$ bestimmt und wird imaginär sein, wenn die Involutionen $J_{1k}$, $J_{2k}$ elliptisch sind.

Sei dann $x_1$ eine beliebige Gerade durch $M_1$ (Taf. IV Fig. 20). Ihr correspondire in der Involution $J_{1k}$ die Gerade $x'_1$. $x_1$ schneidet den Kegelschnitt $K^2$ in zwei imaginären Punkten. Dieselben sind durch eine elliptische Involution definirt, für welche $M_1$ und der Schnittpunkt $M'_1$ von $x_1$ mit $m_1$ ein Paar ist. Sei der Schnittpunkt $Z_1$ von $x_1$ mit $w'_2$ als ein Punkt eines zweiten Paares angenommen, so wissen wir, dass die Polare von $Z_1$ in Bezug auf $K^2$ die Verbindungslinie der Schnittpunkte $x'_1 m_1$ und $w_2 m_2$ ist. Sie trifft $x_1$ in dem zu $Z_1$ gehörenden Punkte $Z'_1$. Nun ist der Pol von $x_1$ in Bezug auf $K^2$ der Schnittpunkt $X_1$ von $x_1$ mit $m_1$. Durch ihn gehen die Tangenten, welche $K^2$ in zwei Punkten auf $x_1$ berühren. Diese Tangenten sind also bestimmt durch die Geraden aus $x_1$ nach $M_1 M_3 Z_1 Z'_1$. Geben wir jetzt die Involution $J_1$ und entspreche in derselben dem Strahle $x_1$ ein Strahl $x_1^{*\prime}$, so schneiden die erwähnten imaginären Tangenten aus $x_1^{*\prime}$ zwei imaginäre Punkte. Diese werden durch eine elliptische Involution definirt, deren eines Paar die Schnittpunkte $Z_1^*$, $Z_1^{*\prime}$ der Geraden $\overline{x_1 Z_1}$, $\overline{x_1 Z'_1}$ mit $x_1^{*\prime}$ sind; das andere Paar besteht aus $M_1$ und $M_1^{*\prime}$, dem Schnittpunkte von $m_1$ mit $x_1^{*\prime}$. Der Ort aller auf diese Weise construirten Punktepaare in den Geraden $x_1^{*\prime}$ ist eine imaginäre Curve vierter Ordnung — $C^{4*}$.

Der Beweis für letztere Behauptung wird analog dem in 1 gegebenen geführt. Eine beliebige Gerade $g$ schneidet den Ort in vier Punkten. Sie liegen auf vier bestimmten imaginären Tangenten, welche dem Kegelschnitt $K^2$ und einem reellen Kegelschnitt $K_g^2$ gemeinsam sind. Letzterer wird aus projectivischen Reihen erzeugt, welche die Projectivität $P_{1k}$ aus $M_1$ resp. $g$ ausschneidet.

Wir ziehen nun einige Schlüsse für die imaginäre Curve $C^{4*}$, welche analog denen sind, die oben für die reelle Curve $C^4$ entwickelt wurden.

a) $M_1$ ist ein reeller Doppelpunkt von $C^{4*}$. Zwei weitere Doppelpunkte — $M_2$, $M_3$ — sind die Schnittpunkte von $m_1$ mit dem gemeinsamen Paare der Involutionen $J_1$, $J_{1k}$. Dieses gemeinsame Paar ist stets reell, weil $J_{1k}$ elliptisch ist. Also muss auch $M_2$ und $M_3$ reell sein. $C^{4*}$ hat mithin drei reelle Doppelpunkte.

b) Wir haben unter 1a) gesehen, dass die Punkte von $K^2$ und $C^4$ mittels der Tangenten an $K^2$ einander eindeutig zugeordnet werden. Diese Zuordnung hat auch dann einen bestimmten Sinn, wenn $K^2$ und $C^4$ imaginär werden. Trennen wir nämlich das conjugirt-imaginäre Punktepaar von $K^2$, welches auf einer reellen Geraden $x_1$ durch $M_1$ liegt, indem wir den Sinn der bestimmenden Involution berücksichtigen, so sind dementsprechend auch die Tangenten an $K^2$ in diesen imaginären Punkten unterschieden, mithin auch die Punkte von $C^{4*}$, welche diese Tangenten aus $x_1^{*\prime}$ ausschneiden. Also correspondirt dem Berührungspunkte einer Tangente an $K^2$ ein ganz bestimmter Punkt von $C^{4*}$, der auf dieser Tangente gelegen ist.

Indem wir nun die auf solche Weise zugeordneten Punkte von $K^2$ und $C^{4*}$ mit $M_2$ resp. $M_3$ verbinden, erhalten wir um diese Scheitel Büschel,

deren imaginäre Strahlen einander correspondiren. Die Strahlen eines solchen Büschels — sagen wir um $M_2$ — sind so angeordnet, dass einem Strahlenpaare, welches durch die Geraden aus $M_2$ nach $M_1 M_3 Z_1 Z_1^*$ definirt ist, ein solches entspricht, das durch die Strahlen aus $M_2$ nach $M_3 M_1 Z_1^* Z_1^{*\prime}$ bestimmt wird. Uebertragen wir die Involutionen, durch welche diese Strahlenpaare gegeben sind, auf einen durch $M_1 M_2 M_3$ gehenden Kegelschnitt $H^2$, so müssen ihre Pole in $m_2$ liegen. Sie bilden in dieser Geraden zwei projectivische Reihen. In denselben entsprechen sich $M_1 M_3$ vertauschbar. Also bilden die projectivischen Reihen eine Involution. Ihr entsprechend können wir auch die Projectivität der Büschel um $M_2$ als eine Involution — $J_2$ — bezeichnen. Projiciren wir die Involution der erwähnten Pole in $m_2$ aus $M_2$, so erhalten wir eine Strahleninvolution. Ihr Pol in Bezug auf $H^2$ sei als Pol der Involution $J_2$ definirt. Indem wir den analogen Gedankengang für das Büschel um $M_3$ durchführen, gelangen wir zu einer Involution $J_3$. Es sind also die reellen Strahlen von $J_1$ durch $C^{4*}$ mit Involutionen $J_2$, $J_3$ verknüpft, deren bis jetzt gefundene Strahlen imaginär sind.

c) Eine Folge der angegebenen Erzeugungsweise von $C^{4*}$ ist es, dass die reellen Doppelstrahlen — $g_1$, $h_1$ — der Involutionen $J_1$ den Kegelschnitt $K^2$ in vier Punkten schneiden, in denen $K^2$ von $C^4$ berührt wird. Diese Punkte sind durch elliptische Involutionen in $g_1$, $h_1$ bestimmt. Weil nun $M_1 M_2 M_3$ ein Tripel harmonischer Pole in Bezug auf $K^2$ ist und weil $m_1 m_3$ durch $g_1 h_1$ harmonisch getrennt wird, so folgt, dass die — ausser $g_1$ und $h_1$ — noch möglichen Verbindungslinien der Punkte $A$, $B$, $C$, $D$ paarweise durch $M_2$ resp. $M_3$ gehen müssen. Also liegen die elliptischen Involutionen auf $g_1 h_1$, welche $ABCD$ bestimmen, sowohl zu $M_2$ als zu $M_3$ perspectivisch. Bilden wir daher über diesen Involutionen die Strahlenbüschel aus $M_2$ resp. $M_3$, so werden durch dieselben zwei imaginäre Strahlenpaare definirt, welche wir als die Doppelstrahlen der Involutionen $J_2$, $J_3$ zu betrachten haben.

d) Wie durch die reelle Curve $C^4$, so wird auch durch $C^{4*}$ eine quadratische Transformation geleitet. In derselben correspondirt jeder Geraden $g$ ein Kegelschnitt $K_g^2$. Geht diese durch einen der Punkte $M$ — sagen wir $M_2$ —, so finden wir, dass ihr zugehöriger Kegelschnitt $K_g^2$ in $M_2$ und einen Punkt $S_2$ auf $m_2$ degenerirt. Ziehen wir aus $S_2$ die Tangenten an $K^2$, so sind diese imaginär, berühren aber $K^2$ in zwei Punkten einer reellen Geraden $x_2^{*\prime}$ — der Polaren von $S_2$ — und schneiden jene Gerade — $x_2$ — durch $M_2$ in zwei imaginären Punkten von $C^{4*}$. Die Geraden $x_2$, $x_2^{*\prime}$ bilden eine Involution, deren Strahlenpaare sich nach demselben Gesetze correspondiren, wie die imaginären Strahlenpaare der oben besprochenen Involution $J_2$, d. h. es sind die reellen Strahlen dieser Involution. In analoger Weise werden wir auch zu den reellen Strahlen der Involution $J_3$ geführt. Aus den reellen Strahlen von $J_2 J_3$ ergeben sich imaginäre Strahlenpaare von $J_1$.

Wir erkennen also, dass die Involutionen $J_1$, $J_2$, $J_3$ sowohl reelle wie imaginäre Strahlen enthalten. Weiter erkennen wir, dass $C^{4*'}$ aus $K^2$ und $J_2$ oder $J_3$ auf dieselbe Weise erzeugt werden kann, wie aus $K^2$ und $J_1$.

Uebertragen wir $J_1$, $J_2$, $J_3$ auf einen Kegelschnitt $H^2$, der durch $M_1 M_2 M_3$ geht, so liegen die Pole dieser Involutionen in einer Geraden. (3.) Ferner liegen sie resp. in $m_1 m_2 m_3$. Nun schneidet eine Gerade die Seiten eines Dreiecks, das $H^2$ eingeschrieben ist, entweder in drei Punkten, welche in Bezug auf $H^2$ hyperbolisch sind, oder in einem hyperbolischen und in zwei elliptischen Punkten. Wenn $C^4$ imaginär sein soll, ist nur der zuletzt angedeutete Fall möglich. Dementsprechend muss eine der Involutionen $J$ — und nur eine — hyperbolisch sein. Unter c) haben wir vorausgesetzt, dass $J_1$ hyperbolisch sei.

e) Die quadratische Transformation, welche durch $C^{4*}$ geleitet wird, führt zur Construction der Doppeltangenten dieser Curve. Wir bestimmen zu diesem Zwecke die vier Kegelschnitte $K_g^2$, welche $K^2$ doppelt berühren. Verfahren wir dabei nach der in 5 erwähnten Methode, so haben wir die gemeinsamen Paare der Involutionen $J_{1k} J_{1m}$, $J_{2k} J_{2m}$, $J_{3k} J_{3m}$ zu suchen. Diese Paare müssen in unserem Falle reell sein, weil $J_{1k}$, $J_{2k}$, $J_{3k}$ elliptisch sind. Folglich sind die Schnittpunkte — $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ — dieser Paare reell (Taf. IV Fig. 21). In den Polaren von $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ in Bezug auf $K^2$ liegen die Berührungspunkte der Kegelschnitte $K_g^2$ mit $K^2$. Von diesen Polaren ist in Fig. 21 die zu $P_1$ gehörende — $p_1$ — eingezeichnet. Auf ihr ist die elliptische Involution bestimmt, welche die Schnittpunkte von $p_1$ mit $K^2$ definirt. In letzteren berührt $K^2$ einen Kegelschnitt $K_g^2$. Dieser hat überdies $m_1$, $m_2$, $m_3$ zu Tangenten, ist also durch mehr Elemente als nöthig bestimmt. Seine Darstellung wird durch die Bemerkung erleichtert, dass er $m_1$, $m_2$, $m_3$ resp. in den Punkten berührt, in welchen diese Geraden resp. von $P_1 M_1$, $P_1 M_2$, $P_1 M_3$ geschnitten werden. (5.) Aus $K_g^2$ und $J_1$ können wir nun eine Doppeltangente — $d_1$ — zeichnen. Wir wissen, dass $K_g^2$ durch zwei projectivische Reihen auf $m_1$ und $d_1$ hervorgebracht wird. In diesen Reihen entspricht dem Schnittpunkte von $d_1$ mit $m_1$ der Berührungspunkt von $K_g^2$ mit $m_1$. Da aber letzterer der Schnittpunkt von $P_1 M_1$ mit $m_1$ ist, so haben wir zu $P_1 M_1$ den correspondirenden in $J_{1k}$ zu suchen. Zu ihm construiren wir den zugeordneten Strahl in der Involution $J_1$. Dieser schneidet $m_1$ in einem Punkte $T_1$, der der Schnittpunkt von $m_1$ mit $d_1$ sein muss. In analoger Weise bestimmen wir zu $P_1 M_2$ den entsprechenden in $J_{2k}$ und zu letzterem den zugeordneten in $J_2$. Dieser trifft $m_2$ in $T_2$, einem zweiten Punkte von $d_1$. Damit ist letztere Linie bestimmt. Wir bemerken bei dieser Construction, dass die entsprechende Gerade zu $P_1 M_1$ in der Involution $J_{1k}$ ein Strahl des gemeinsamen Paares der Involutionen $J_{1m}$, $J_{1k}$ ist. Ferner ist der Strahl, welcher $P_1 M_2$ in $J_{2k}$ correspondirt, einer der gemeinsamen Strahlen zwischen den Involutionen $J_{2k}$ und $J_{2m}$. Indem wir unter Berücksichtigung dar analogen Be-

merkungen für die Doppeltangenten $d_2$, $d_3$, $d_4$ letztere construiren, können wir das Gesagte dahin zusammenfassen:

Die correspondirenden Strahlen zu den gemeinsamen Paaren der Involutionen $J_k$ und $J_m$ in den resp. Involutionen $J$ schneiden die resp. Linien $m$ in sechs Punkten $T$. Diese liegen viermal zu dreien in den vier reellen Doppeltangenten von $C^{4*}$.*

Wir unterlassen es, hier Alles, was oben für die reellen $C^4$ bewiesen wurde, nach dem Princip der Continuität für die imaginären $C^4$ zu interpretiren, und heben nur noch Folgendes hervor.

f) Je vier Punkte von $C^{4*}$, welche auf einem reellen Strahlenpaar $gh$ einer Involution $J_m$ liegen, bilden ein imaginäres Quadrupel von Punkten. In ihnen wird $C^4$ von einem imaginären Kegelschnitt $K^2$ berührt. $g$, $h$ lassen sich als die Doppelstrahlen einer Involution $J$ betrachten. Aus $K^2$ und $J$ kann $C^{4*}$ nach der oben entwickelten Methode erzeugt werden.

g) Die in 9 dargestellte Ableitung einer $C^4$ aus einem durch $M_1 M_2 M_3$ gehenden Kegelschnitt $K_m^2$ führt zu einer imaginären Curve $C^{4*}$, wenn $T$ im Innern des Dreiecks $M_1 M_2 M_3$ liegt. Denn in diesem Falle schneidet jede Gerade durch $T$ die Seiten des erwähnten Dreiecks in drei Punkten, von welchen zwei in Bezug auf $K^2$ elliptisch sind. Die Schnittpunkte von $K_m^2$ mit $C^{4*}$ liegen auf der reellen Polaren von $T$ in Bezug auf $K_m^2$ und sind bestimmte imaginäre Punkte.

h) Die Tangenten in den Punkten von $C^{4*}$ sind natürlich imaginär. Construiren wir aber zu einem Punkte — sagen wir $P_2$ — in $m_2$ die Curve $C_{1'2}^3$ (13), so hängt diese nur von den Involutionen $J_{1k}$ und $J_1$ ab. Mit Hilfe von $J_{1k}$ haben wir $K_{1p}^2$ erzeugt und es muss dieser Kegelschnitt stets reell sein, wenn $M_1$, $M_2$, $M_3$ reell sind. Daraus folgt, dass auch $C_{1'2}$ reell sein muss. Ziehen wir dann durch $P_2$ eine Gerade und schneide diese $C_{1'2}^3$ in X und $m_1$ in $S'_1$, so müssen nach der Definition von $C_{1'2}^3$ auf $M_1 X$ zwei Punkte von $C^4$ liegen, deren Tangenten sich in $S'_1$ schneiden. Wird die Curve vierter Ordnung imaginär, so sind auch jene Punkte auf $M_1 X$ imaginär und durch eine elliptische Involution bestimmt. Bilden wir über ihr das Strahlenbüschel aus $S'_1$, so definirt dasselbe zwei Tangenten von $C^{4*}$.

In analoger Weise schliessen wir, dass sämmtliche Curven $C^3$, die in 14 besprochen wurden, in unserem speciellen Falle reell werden und dazu dienen, die imaginären Tangenten von $C^{4*}$ zu bestimmen.

---

* Unter 5 haben wir gezeigt, dass die Doppeltangenten einer reellen $C^4$, für welche $M_1$, $M_2$, $M_3$ reell sind, imaginär werden. In Ergänzung des dort Gesagten bemerken wir, dass in jenem Falle stets eines der gemeinsamen Paare zwischen einer Involution $J_k$ und $J_m$ reell ist. Construiren wir zu ihm die entsprechenden Geraden in der Involution $J_1$, so schneiden sie das resp. $m$ in zwei reellen Punkten. Durch diese gehen paarweise die erwähnten imaginären Tangenten. Sie schneiden die anderen $m$ in bestimmten imaginären Punkten $T$ und sind somit vollständig definirt.

Dabei bemerken wir, dass diejenigen Punkte von $C^{4*}$, welche auf einer reellen Geraden durch ein $M$ liegen, Tangenten besitzen, deren reeller Punkt sich in dem gleichnamigen $m$ befindet.

## 17. Degenerirte Formen von $C^4$.

Am Schlusse von 1 haben wir angedeutet, dass $m_2$, $m_3$ zusammenfallen können, und wir wollen nun untersuchen, wie sich in diesem Falle $C^4$ gestaltet. Da $m_2 m_3$ das gemeinsame Paar der Involutionen $J_1$ und $J_{1k}$ ist, so kann ein Zusammenfallen von $m_2$, $m_3$ nur dann eintreten, wenn $J_1$ und $J_{1k}$ einen Doppelstrahl gemeinsam haben. Derselbe muss Tangente an $K^2$ sein. In ihm decken sich $m_1$, $m_2$ und wir wollen ihn mit $m$ bezeichnen. Er berührt $K^2$ in einem Punkte — $M$ —, in welchem $M_1$, $M_3$ zusammenfallen. Also liegen auf $m$ die drei Punkte $M_1$, $M_2$, $M_3$, d. h. $m$ ist ein Theil von $C^4$ und der Rest dieser Curve muss von der dritten Ordnung sein. Wollen wir dies direct beweisen, so gehen wir von einer beliebigen Geraden $g$ aus. Wir construiren — wie in 1 — aus $J_{1k}$ und $J_1$ die Projectivität $P_{1k}$. Sie schneidet $m_1$ resp. $g$ in projectivischen Reihen. Diese erzeugen einen Kegelschnitt $K_g^2$, der mit $K^2$ die Tangente $m$ gemeinsam hat. Die drei übrigen gemeinsamen Tangenten treffen $g$ in Punkten der erwähnten Restcurve — $C^3$.

Indem wir das über $C^4$ Gesagte für $C^3$ specialisiren, ergiebt sich für letztere Curve Folgendes:

$C^3$ berührt $K^2$ in $M$ und in den zwei Punkten, in welchen der zweite Doppelstrahl $h_1$ der Involution $J_1$ den Kegelschnitt $K^2$ trifft. — $M_1$ ist Inflexionspunkt für $C^3$. Seine Tangente — $i_1$ — wird erhalten als die correspondirende zum zweiten Doppelstrahle von $J_{1k}$ in der Involution $J_1$. — $C^3$ ist zu sich selbst centrisch involutorisch mit $M_1$ als Centrum und $m_1$ als Axe.

Die quadratische Transformation, welche durch $C^3$ geleitet wird, ist dadurch specialisirt, dass die Kegelschnitte $K_g^2$, welche den Geraden der Ebene correspondiren, die Linie $m$ in $M_1$ berühren. Die Kegelschnitte $K_g'^2$ aber, welche den Geraden $X'$ durch $M$ in dieser Transformation entsprechen, degeneriren in zwei Punkte, nämlich in $M$ und einen Punkt $S$ auf $m$ (Taf. IV Fig. 20). Durch $S$ geht an $K^2$ — ausser $m$ — eine weitere Tangente, welche $K^2$ in $A_1$ berühre. Sie muss $x'$ in einem Punkte $A'_1$ von $C^3$ schneiden. Sei dann der Strahl $MA_1$ mit $x$ bezeichnet und drehen wir $x'$ um $M$, so entspricht jeder Lage von $x'$ eine Lage von $x$. Lassen wir aber an Stelle von $x'$ die Geraden $m_1$ oder $m$ treten, so correspondiren ihnen resp. die Geraden $m$, $m_1$. Also bilden die Paare $x$, $x'$ eine Strahleninvolution, $J$ und $C^3$ wird aus $K^2$ und $J$ auf dieselbe Weise erzeugt wie aus $K^2$ und $J_1$. Die Doppelstrahlen von $J$ sind die Geraden aus $M$ nach den Schnittpunkten von $h_1$ mit $K^2$. $M_1$ ist also der Pol von $J$ in Bezug auf den Kegelschnitt $K^2$.

Indem wir die letzterwähnte Erzeugungsweise der $C^3$ unabhängig von $C^4$ betrachten, können wir sagen:

$K^2$ sei ein beliebiger Kegelschnitt und einer seiner Punkte — $M$ — sei Scheitel einer Involution $J$. Construiren wir in den zweiten Schnittpunkten der Strahlen von $J$ die Tangenten an $K^2$ und schneiden wir mit ihnen die correspondirenden Strahlen von $J$, so ist der Ort der Schnittpunkte eine $C^3$.

Auf jeder Geraden durch $M$ liegt somit ein Punkt von $C^3$. Also ist $M$ für diese Curve ein Doppelpunkt. Bemerken wir weiter, dass der reelle Theil von $C^3$ aus dem in Bezug auf $K^2$ hyperbolischen Felde der Ebene nicht in das elliptische übergehen kann, so folgt, dass $C^3$ in $M$ eine Spitze hat. $m_1$ ist ihre Tangente.

Seien $A'_1$, $B'_1$ zwei Punkte von $C^3$ auf einer Geraden $h$ durch $M_1$ und seien $a'_1$, $b'_1$ ihre Tangenten, so wird durch $A'_1 a'_1$, $B'_1 b'_1$, $Mm$ als Punkte und Tangenten ein Kegelschnitt $K^2$ bestimmt. Solcher Kegelschnitte giebt es unendlich viele. Aus jedem derselben kann $C^3$ mit Hilfe einer Involution erzeugt werden, deren einer Doppelstrahl $m$ und deren anderer die Verbindungslinie der Schnittpunkte von $K^2$ und $C^3$ ist.

Die Kegelschnitte $K_q^2$ berühren $m$ in $M$ und enthalten zwei Punktepaare von $C^3$, welche auf Geraden durch $M_1$ liegen. Die Kegelschnitte $K_s^2$, $K_m^2$ gehen durch $M_1$ und berühren $m_1$ in $M$. Mit Hilfe eines Kegelschnittes $K_m^2$ können wir $C^3$ erzeugen, wenn wir den Pol — $T$ — der Verbindungslinie der Schnittpunkte von $C^3$ und $K_m^2$ kennen. Wir ziehen durch $T$ beliebige Gerade. Eine solche schneide $m_1$ in $S_1$ und $m$ in $S$. Durch $S_1$ geht — ausser $m_1$ — eine zweite Tangente an $K_m^2$. Sie berühre diesen Kegelschnitt in $A_1$. Aus $S$ können wir zwei Tangenten an $K_m^2$ ziehen. Ihre Berührungspunkte verbinden wir mit $M$. Bringen wir dann diese Verbindungslinien mit $M_1 A_1$ zum Schnitte, so erhalten wir zwei Punkte von $C^3$. Specialisiren wir diese Construction für die Gerade $TM_1$, so erhalten wir die Inflexionstangente in $M_1$ an $C^3$.

Wenden wir uns zu den Tangenten von $C^3$, so zeichnen wir dieselben mit Hilfe der Kegelschnitte $K_g^2$. Sind $A_1 A'_1$ ein Paar zugeordneter Punkte eines Kegelschnittes $K^2$ und der Curve $C^3$, so construiren wir den Kegelschnitt $K_g^2$, der $m$ in $M_1$, $A_1 A'_1$ in $A_1$ berührt und der $m_1$ zur Tangente hat. Seine Tangente durch $A'_1$ berührt $C^3$ in $A'_1$. Führen wir diese Construction mit Hilfe des Satzes von Brianchon durch, und seien $S$, $S_1$ die Schnittpunkte von $\overline{A_1 A'_1}$ mit $m$ resp. $m_1$, so ziehen wir die Geraden $M_1 A_1$, $M_1 A'_1$ (Taf. IV Fig. 22). Ihren Schnittpunkt — $T_1$ — verbinden wir mit $S_1$. Dann trifft $S_1 T_1$ die Gerade $m$ in $S'$, einem Punkte der gesuchten Tangente $a'_1$. Eine andere Construction ist folgende: Wir bringen $M_1 A'_1$ mit $M_1 A_1$ in $T'_1$ zum Schnitte und verbinden $T'_1$ mit $S$. Dann schneidet $T_1 S$ die Gerade $m_1$ in einem Punkte — $S'_1$ — von $a'_1$.

Sei $P$ ein beliebiger Punkt der Ebene, so verbinden wir ihn mit $S'_1$ und schneiden diese Verbindungslinie mit $M_1 A'_1$. Wir können nun zeigen, dass der Ort der so erhaltenen Schnittpunkte ein Kegelschnitt $K_{1p}^2$ ist. Denn sei $x$ eine Gerade durch $P$ und schneide sie $m_1$ in $S'_1$, so gehen — weil $C^3$ von der dritten Classe ist — durch $S'_1$ ausser $m_1$ noch zwei weitere Tangenten an $C^3$. Die Berührungspunkte derselben liegen auf einer Geraden $x_1$ aus $M_1$, welche $x$ in einem Punkte unseres Ortes schneidet. Es ist also jeder Geraden $x$ durch $P$ eine Gerade $x_1$ durch $M_1$ zugeordnet. Umgekehrt erkennen wir, dass jeder Geraden $x_1$ eine Gerade $x$ entspricht. Mithin steht das Büschel der $x$ zu dem der $x_1$ in einer eindeutigen Beziehung und beide Büschel erzeugen den oben erwähnten Kegelschnitt $K_{1p}^2$. Derselbe geht durch $P$, $M_1$, $M$.

Befindet sich $P$ auf $m$, so liegen also auf dieser Geraden drei Punkte von $K_{1p}^2$, d. h. $m$ ist ein Theil dieses Kegelschnittes und der Rest desselben besteht aus einer zweiten Geraden $p$. Wir schliessen daher:

Verbinden wir die Schnittpunkte der Tangenten von $C^3$ und $m_1$ mit einem Punkte auf $m$ und bringen wir diese Verbindungslinien mit den resp. Geraden aus $M_1$ nach den Punkten von $C^3$ zum Schnitte, so ist der Ort dieser Schnittpunkte eine Gerade.

$p$ geht durch den Schnittpunkt der Inflexionstangente in $M_1$ mit $m_1$.

In Taf. IV Fig. 23 und 24 sind zwei Formen der jetzt besprochenen Curve $C^3$ dargestellt.

Fig. 23 ist so disponirt, dass $M_1$ unendlich fern liegt und $m_1$ zu $m$ senkrecht steht. $C^3$ ist also zu $m_1$ orthogonal symmetrisch. $i_1$ ist eine Asymptote von $C^3$. Die anderen werden gefunden, indem wir die Linie $u$ bestimmen, welche in der Involution $J_1$ der unendlich fernen Geraden entspricht. $u$ liegt in der Mitte von $m$ und $h_1$ und schneidet $K^2$ in zwei Punkten $U_1$, $U_2$, deren Tangenten die Richtungen der gesuchten Asymptoten haben. Diese selbst werden also nach der oben gegebenen Tangentenconstruction für Punkte von $C^3$ bestimmt.

Die $C^3$ von Fig. 24 ist aus einem Kreise $K_m^2$ hervorgebracht und dadurch specialisirt, dass sie durch die imaginären Punkte dieses Kreises geht, welche auf der unendlich fernen Geraden liegen. $T$ ist also Mittelpunkt von $K_m^2$. Die reelle Asymptote von $C^3$ ist mit Hilfe einer Geraden $u$ bestimmt, welche zu $m_1$ parallel ist und den Abstand zwischen $M_1$ und $m_1$ halbirt. $u$ trifft $C^3$ in $U$. Dann ist $M_1 U$ die Richtung der gesuchten Asymptote. Wir erhalten letztere, indem wir einen Kegelschnitt $K_m^{*2}$ zeichnen, der $m_1$ in $M$ berührt, durch $M_1 U$ und einen Punkt $A'_1$ von $C^3$ geht. In Bezug auf diesen Kegelschnitt construiren wir den Pol — $T^*$ — der Geraden $UA'_1$. Durch $UT^* M_1$ geht ein Kegelschnitt $K_s^2$, der $m_1$ in $M$ und $C^3$ in $U$ berührt. Also ist seine Tangente in $U$ auch Tangente an $C^3$ und trifft $m_1$ in $S'_1$. Durch $S'_1$ geht die in Rede stehende Asymptote.

Schliesslich bemerken wir, dass die in 13 und 14 behandelten Curven dritter Ordnung von der Art der zuletzt besprochenen sind und dass die allgemeine Form einer solchen Curve in Taf. I Fig. 8 gezeichnet ist. — Fällt $J_1$ mit $J_{ik}$ zusammen, so degenerirt $C^4$ in die Polare von $M_1$ in Bezug auf $K^2$.

**18. Beziehung von $C^4$ zu einem Büschel von Flächen zweiten Grades.**

Es bleibt uns noch übrig, auf den Zusammenhang hinzuweisen, der zwischen den discutirten Curven vierter Ordnung und einem Büschel von Flächen zweiten Grades besteht. Bekanntlich enthält jedes solche Büschel vier Kegel — $K_1^2$, $K_2^2$, $K_3^2$, $K_4^2$. Seien die Spitzen derselben $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$, so schneiden die Ebenen, welche durch je drei der Spitzen bestimmt werden, die Developpable der Grundcurve des Büschels in Curven der betrachteten Art.* Denn wir können beweisen, dass die Construction dieser Spurcurven mit der in 1 für die Erzeugung von $C^4$ gegebenen Methode übereinstimmt.

Zu diesem Zwecke gehen wir von der Ebene $P_4$ aus, welche $M_1$, $M_2$, $M_3$ enthält. Der Kegel mit der Spitze $M_4$ schneide diese Ebene im Kegelschnitt $K^2$. Wir construiren die Durchdringung von zweien der vier Kegel, sagen wir von $K_1^2$, $K_4^2$, indem wir ein Ebenenbüschel durch $M_1 M_4$ legen. Sei $E_1$ eine Ebene dieses Büschels, so trifft sie $K_1^2$ in zwei Erzeugenden $e_1$, $f_1$ und $K_4^2$ in zwei Erzeugenden $e_4$, $f_4$. Diese vier Geraden schneiden sich in vier Punkten der Durchdringungscurve und wir haben nun in denselben die Tangenten zu bestimmen, resp. die Spuren derselben in der Ebene $P_4$. Letztere Ebene werde von $E_1$ in $x_1$ und von $e_4 f_4$ in $A_1 B_1$ geschnitten. Dann geht $x_1$ durch $M_1$, und $A_1$, $B_1$ sind die Schnittpunkte von $x_1$ mit $K^2$. Construiren wir die Tangentialebenen längs $e_4 f_4$ an $K_4^2$, so haben diese zu Spuren in $P_4$ die Tangenten $a_1$, $b_1$ in $A_1 B_1$ an $K^2$. Die Tangentialebenen längs $e_1 f_1$ an $K_1^2$ müssen sich in einer Geraden $x'_1$ durch $M_1$ treffen, welche in $P_4$ liegt, weil die Punkte von $e_1 f_1$ sich auf Geraden durch $M_4$ befinden. Die gesuchten Spuren der Tangenten sind also die Schnittpunkte $A'_1$, $B'_1$ von $a_1 b_1$ mit $x'_1$. In ihnen treffen sich je zwei Tangenten an Punkte der Grundcurve, die auf einer Geraden durch $M_4$ liegen.

Drehen wir nun $E_1$ um $M_1 M_4$, so erhalten wir dementsprechend in $P_4$ ein Büschel von Geraden $x_1$ und zu jeder Lage von $x_1$ gehört eine solche von $x'_1$. Speciell die Ebene $M_1 M_4 M_3$ trifft $P_4$ in $M_1 M_3$ und dieser Geraden correspondirt als $x'_1$ die Gerade $M_1 M_2$. Die Ebene $M_1 M_4 M_2$ schneidet $P_4$ in $M_1 M_2$ und dieser Geraden ist $M_1 M_3$ zugeordnet. Also entsprechen sich in der Projectivität der Geraden $x_1 x'_1$ die Strahlen $M_1 M_3$, $M_1 M_2$ vertauschbar, d. h. die Geraden $x_1$, $x'_1$ bilden eine Involution $J_1$. Die Construction der Spur der Developpablen von der Grundcurve des Büschels wird also in der That aus $K^2$ und $J_1$ nach der in 1 entwickelten Methode durchgeführt.

* Vergl. Fiedler, Darstellende Geometrie, II. Aufl., S. 309 flgg.

Die analoge Darstellung von $C^4$ erhalten wir, indem wir von $M_2 M_4$ oder von $M_3 M_4$ ausgehen. Die Doppelstrahlen der Involutionen $J_1$, $J_2$, $J_3$ sind die Erzeugenden der Kegel $K_1^2$, $K_2^2$, $K_3^2$, welche in $P_4$ liegen.

Kennen wir zwei dieser Curven vierter Ordnung, etwa $C_4^4$ in der Ebene $P_4$ und $C_1^4$ in der Ebene $M_2 M_3 M_4$ oder $P_1$, so ist dadurch die Developpable der Grundcurve bestimmt. Denn sei $A'_1$ der Punkt von $C_4^4$, welcher in dem Schnitte von $x'_1$ mit $a_1$ liegt, so müssen die Tangenten an die Grundcurve, welche in $A'_1$ die Ebene $P_4$ treffen, sich in der Ebene $M_4 a_1$ befinden. Diese Ebene schneidet $P_1$ in einer durch $M_4$ gehenden Geraden, welche den Schnittpunkt $S_1$ von $a_1$ mit $M_2 M_3$ enthält. In $S_1 M_4$ nun sind zwei Punkte von $C_1^4$ gelegen. Verbinden wir diese mit $A'_1$, so erhalten wir zwei Gerade der Developpablen.

Zu jedem der unendlich vielen Kegelschnitte $K^2$, aus denen $C_4^4$ erzeugt werden kann, gehört — wenn wir $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ festhalten — ein anderes Büschel von Flächen zweiter Ordnung. Die Developpablen der Grundcurven aller dieser Büschel schneiden die Ebenen des Quadrupels $M_1 M_2 M_3 M_4$ in denselben Curven.

Zum Schlusse erwähnen wir, dass durch imaginäre Curven vierter Ordnung in den Quadrupelebenen imaginäre developpable Flächen bestimmt werden, auf denen die Grundcurven von Büscheln liegen, die aus imaginären Flächen zweiten Grades bestehen.

Zürich, August 1884.

# IV.

# Ueber die Integration linearer, nicht homogener Differentialgleichungen.

Von

Wold. Heymann

in Plauen i. V.

(Schluss.)

---

## § 7.

### Supplementintegral von

$$a_2 y'' + (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x + c_0 x^2) y = X_\mu, \text{*} \tag{1}$$

$$X_\mu = A_0 + A_1 \frac{x}{1!} + A_2 \frac{x^2}{2!} + \dots$$

Sobald die Coefficienten der Gleichung 1) resp. 1a) in § 6 den zweiten Grad nicht übersteigen, so gilt dies auch von den Coefficienten der Differentialgleichung für $W$, welche lautete

$$U_2 W'' + U_1 W' + U_0 W = 0,$$

und es bieten sich daher sogleich zwei Fälle dar, für welche die Integration vollständig durchführbar sein wird, nämlich erstens wenn $c_1 = b_2 = c_2 = 0$ und zweitens wenn $a_1 = a_2 = b_2 = 0$. Wir betrachten hier den ersten Fall.

Es sei also $n = 2$ und

$$1.\quad c_1 = 0, \quad b_2 = 0, \quad c_2 = 0,$$

dann liegt die Gleichung 1) vor, und es handelt sich nur darum, ein partikuläres Integral der vereinfachten Gleichung

$$a_2 z'' + (a_1 + b_1 x) z' + (a_0 + b_0 x + c_0 x^2) z = B_0 + B_1 x \tag{1a}$$

aufzustellen. Die Gleichung für $W$ lautet jetzt

$$c_0 W'' + (b_0 + b_1 u) W' + (a_0 + a_1 u + a_2 u^2) W = 0,$$

und es ist seit Liouville bekannt, dass selbige durch die beiden Substitutionen

$$W = e^{\alpha u^2 + \beta u} w \quad \text{und} \quad \gamma u + \delta = \xi$$

auf die einfachere Form

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} = \xi \frac{dw}{d\xi} + \lambda w$$

---

* Es ist leicht einzusehen, dass die rechte Seite der Gleichung 1) mit einem Factor $e^{gx + hx^2}$ behaftet sein dürfte, da dieser durch die Substitution $y = y_1 e^{gx + hx^2}$ beseitigt werden kann, ohne dass hierbei die Gleichung ihre Form änderte.

gebracht werden kann, unter $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\lambda$ gewisse constante Zahlen verstanden. Der letzten Gleichung genügt

$$w=\int_0^\infty e^{-\frac{v^2}{2}} v^{\lambda-1} \{\gamma_1 e^{v\xi}+\gamma_2 e^{-v\xi}\}\, dv, \quad \lambda>0,$$

sonach ist

$$W=e^{\alpha u^2+\beta u}\int_0^\infty e^{-\frac{v^2}{2}} v^{\lambda-1} \{\gamma_1 e^{v(\gamma u+\delta)}+\gamma_2 e^{-v(\gamma u+\delta)}\}\, dv.$$

Führt man dieses in

$$z=\int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{U_2} e^{ux+\int \frac{U_1}{U_2} du}\, W du$$

ein und beachtet, dass

$$U_2=c_0, \quad U_1=b_0+b_1 u,$$

so erhält man das Ergänzungsintegral der Gleichung 1a) in der Gestalt

$$z=\frac{1}{c_0}\int_{u_1}^{u_2} e^{ux+\alpha' u^2+\beta' u}\left[\int_0^\infty e^{-\frac{v^2}{2}} v^{\lambda-1} \{\gamma_1 e^{v(\gamma u+\delta)}+\gamma_2 e^{-v(\gamma u+\delta)}\}\, dv\right] du.$$

Als Grenzen für das erste Integral hat man $u_1=0$; $u_2$ ist die Lösung der Gleichung

$$\alpha' u^2=-\infty, \quad \left(\alpha'=\alpha+\frac{b_1}{2c_0}\right),$$

und es ist $\alpha'$ zufolge der Bedeutung von $\alpha$, wie man sich leicht überzeugt, immer eine von Null verschiedene endliche Grösse.

Es bleibt noch übrig, die Grössen $\gamma_1$ und $\gamma_2$ zu bestimmen. Sie sind definirt, wie früher gezeigt worden ist, durch

$$\gamma_1=\varkappa\{B_0 f_2(0)+B_1 f'_2(0)\}, \quad \gamma_2=-\varkappa\{B_0 f_1(0)+B_1 f'_1(0)\},$$

und im vorliegenden Falle ist

$$\left.\begin{aligned} f_1(u)&=e^{\alpha u^2+\beta u}\int_0^\infty v^{\lambda-1} e^{-\frac{v^2}{2}+v(\gamma u+\delta)}\, dv \\ f_2(u)&=e^{\alpha u^2+\beta u}\int_0^\infty v^{\lambda-1} e^{-\frac{v^2}{2}-v(\gamma u+\delta)}\, dv \end{aligned}\right\},$$

woraus unmittelbar folgt

$$\left.\begin{aligned} f_1(0)&=\int_0^\infty v^{\lambda-1} e^{-\frac{v^2}{2}+\delta v}\, dv, & f'(0)&=\gamma\int_0^\infty v^{\lambda} e^{-\frac{v^2}{2}+\delta v}\, dv+\beta f_1(0) \\ f_2(0)&=\int_0^\infty v^{\lambda-1} e^{-\frac{v^2}{2}-\delta v}\, dv, & f'_2(0)&=-\gamma\int_0^\infty v^{\lambda} e^{-\frac{v^2}{2}-\delta v}\, dv+\beta f_2(0) \end{aligned}\right\},$$

so dass also für $\gamma_1$ und $\gamma_2$ folgende Ausdrücke gewonnen werden:

$$\left.\begin{aligned}\gamma_1 &= \varkappa\int_0^\infty v^{\lambda-1}e^{-\frac{v^2}{2}-\delta v}\{B_0+B_1(\beta-\gamma v)\}\,dv\\ \gamma_2 &= -\varkappa\int_0^\infty v^{\lambda-1}e^{-\frac{v^2}{2}+\delta v}\{B_0+B_1(\beta+\gamma v)\}\,dv\end{aligned}\right\},\quad \lambda>0.$$

Die Constante $\varkappa$ ist zu entnehmen aus

$$f'_1(u)\,f_2(u)-f'_2(u)\,f_1(u)=\frac{1}{\varkappa}\,e^{-\int\frac{U_1}{U_2}du},$$

worin für $u$ irgendwelcher specieller Werth gesetzt werden darf. Für $u=0$ ergiebt sich

$$\frac{1}{\varkappa}=f'_1(0)\,f_2(0)-f'_2(0)\,f_1(0),$$

oder nach Einführung der betreffenden Integralwerthe

$$\frac{1}{\varkappa}=\gamma\left\{\begin{aligned}&\int_0^\infty v^{\lambda}e^{-\frac{v^2}{2}+\delta v}\,dv\,.\int_0^\infty v^{\lambda-1}e^{-\frac{v^2}{2}-\delta v}\,dv\\ +&\int_0^\infty v^{\lambda}e^{-\frac{v^2}{2}-\delta v}\,dv\,.\int_0^\infty v^{\lambda-1}e^{-\frac{v^2}{2}+\delta v}\,dv\end{aligned}\right\},$$

d. h.

$$\frac{1}{\varkappa}=\gamma\,.\,2^{\lambda-\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)\cdot e^{\frac{1}{4}\delta^2},*$$

oder auch, weil nach Gauss das Product der Gammafunctionen durch $(2\pi)^{\frac{1}{2}}\,.\,2^{\frac{1}{2}-\lambda}\,\Gamma(\lambda)$ ersetzt werden kann,

$$\frac{1}{\varkappa}=\gamma\sqrt{2\pi}\,\Gamma(\lambda)\,e^{\frac{1}{4}\delta^2}.$$

Sollte $\lambda<0$ sein, so hat das für $w$ aufgestellte Integral keinen Sinn; alsdann ist aber folgender Ausdruck brauchbar:

$$w={}_\nu\!\int d\xi^\nu\int_0^\infty e^{-\frac{v^2}{2}}v^{\lambda+\nu-1}\{\gamma_1e^{v\xi}+(-1)^\nu\gamma_2e^{-v\xi}\}\,dv,$$

wobei $\nu$ diejenige positive ganze Zahl bedeutet, welche dem absoluten Werthe von $\lambda$ folgt.

---

* Dies Resultat folgt, wenn in der von Abel aufgestellten Formel

$$\tfrac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{\frac{a^2}{4}}=\left\{\begin{aligned}&\int_0^\infty e^{ax-x^2}dx.x^{\alpha-1}.\int_0^\infty e^{-ax-x^2}dx.x^{\alpha}\\ +&\int_0^\infty e^{ax-x^2}dx.x^{\alpha}\;.\int_0^\infty e^{-ax-x^2}dx.x^{\alpha-1}\end{aligned}\right\}$$

folgende Buchstabenveränderung vorgenommen wird:

$$x=\frac{v}{\sqrt{2}},\quad \alpha=\lambda,\quad a=-\delta\sqrt{2}.$$

Man vergl. Abel, Sur quelques intégrales définies; Crelle's Journal Bd. II.

Wir haben bisher stillschweigend vorausgesetzt, dass $\gamma \gtrless 0$, denn andernfalls konnte die Substitution

$$\gamma u + \delta = \xi$$

nicht gemacht werden. Nun besitzt aber $\gamma$ in den ursprünglichen Coefficienten ausgedrückt folgenden Werth:

$$\gamma = \frac{\sqrt[4]{b_1^2 - 4a_2 c_0}}{\sqrt{-c_0}},$$

und dieses verschwindet, wenn

$$b_1^2 - 4a_2 c_0 = 0.$$

In diesem Falle kann man aber die Grössen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und $\delta$ so bestimmen, dass sich die Gleichung

$$c_0 W'' + (b_0 + b_1 u) W' + (a_0 + a_1 u + a_2 u^2) W = 0$$

vermittelst der Substitutionen

$$W = e^{\alpha u^2 + \beta u} \text{ und } \gamma u + \delta = \xi$$

vereinfacht in

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} + \lambda \xi w = 0,$$

und dieser genügt

$$w = \int_0^\infty e^{-\frac{v^3}{3}} \{\gamma_1 \varepsilon_1 e^{\varepsilon_1 v \xi} + \gamma_2 \varepsilon_2 e^{\varepsilon_2 v \xi} + \gamma_3 \varepsilon_3 e^{\varepsilon_3 v \xi}\} dv,$$

wenn

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0$$

und $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ die Wurzeln der Gleichung

$$\varepsilon^3 + \lambda = 0$$

sind. Nunmehr ergiebt sich für $z$ ähnlich wie vorhin

$$z = \frac{1}{c_0} \int_{u_1}^{u_2} e^{ux + \alpha' u^2 + \beta' u} \left[\int_0^\infty e^{-\frac{v^3}{3}} S\, dv\right] du,$$

wobei

$$S = \sum_{i=1}^{i=3} (\gamma_i \varepsilon_i e^{\varepsilon_i v (\gamma u + \delta)}),$$

$u_1 = 0$, und $u_2$ aus der Gleichung

$$\alpha' u^2 = -\infty, \quad \left(\alpha' = \frac{b_1}{4c_0}\right)$$

folgt. Zur Bestimmung der Grössen $\gamma_1$, $\gamma_2$ und $\gamma_3$ dienen die Gleichungen

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0$$

und

$$\left[e^{ux + \int \frac{U_1}{U_2} du} W'\right]_{u_1}^{u_2} = -B_0, \quad \left[e^{ux + \int \frac{U_1}{U_2} du} W\right]_{u_1}^{u} = B_1.$$

Nach Einführung der Grenzen und des Ausdruckes

$$W = e^{\alpha u^2 + \beta u} w$$

lauten die letzten beiden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{r} f'(0) + \beta f(0) = \quad B_0 \\ f(0) = -B_1 \end{array}\right\} \text{ oder } \left.\begin{array}{l} f'(0) = \quad B_0 + \beta B_1 \\ f(0) \;= -B_1 \end{array}\right\},$$

wenn $f(u)$ das Integral $w$ für $\xi = \gamma u + \delta$ vorstellt, so dass

$$f(0) = \int_0^\infty e^{-\frac{v^3}{3}} \{ \gamma_1 \varepsilon_1 e^{\varepsilon_1 v \delta} + \gamma_2 \varepsilon_2 e^{\varepsilon_2 v \delta} + \gamma_3 \varepsilon_3 e^{\varepsilon_3 v \delta} \} dv,$$

$$f'(0) = \gamma \int_0^\infty v e^{-\frac{v^3}{3}} \{ \gamma_1 \varepsilon_1^2 e^{\varepsilon_1 v \delta} + \gamma_2 \varepsilon_2^2 e^{\varepsilon_2 v \delta} + \gamma_3 \varepsilon_3^2 e^{\varepsilon_3 v \delta} \} dv.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\varepsilon_k \int_0^\infty e^{-\frac{v^3}{3} + \varepsilon_k v \delta} dv = s_k, \quad k = 1, 2, 3,$$

dann ist

$$f(0) = s_1 \gamma_1 + s_2 \gamma_2 + s_3 \gamma_3, \quad f'(0) = \gamma \{ s'_1 \gamma_1 + s'_2 \gamma_2 + s'_3 \gamma_3 \},$$

wobei die Ableitungen der $s$ nach $\delta$ zu nehmen sind, und nunmehr lauten die Gleichungen zur Bestimmung von $\gamma_1$, $\gamma_2$ und $\gamma_3$ folgendermassen:

$$\begin{array}{l} \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0, \\ s_1 \gamma_1 + s_2 \gamma_2 + s_3 \gamma_3 = -B_1, \\ s'_1 \gamma_1 + s'_2 \gamma_2 + s'_3 \gamma_3 = (B_0 + \beta B_1) : \gamma. \end{array}$$

Es ist bemerkenswerth, dass sich die Hauptdeterminante dieses Gleichungssystems auf eine Determinante reducirt, welche nur noch Potenzen der Wurzeln $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ und $\varepsilon_3$ enthält und von dem Integralparameter $\delta$ ganz unabhängig ist. Man kann nämlich zeigen, dass

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s'_1 & s'_2 & s'_3 \end{vmatrix} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 \end{vmatrix}.$$

Da diese merkwürdige Integralbeziehung sich allgemein für eine Determinante $n^{\text{ten}}$ Grades aussprechen lässt, so wollen wir die Transformation an einer solchen zeigen.

Wir behaupten, dass

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ s'_1 & s'_2 & \dots & s'_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_1^{(n-2)} & s_2^{(n-2)} & \dots & s_n^{(n-2)} \end{vmatrix} = \vartheta \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_n \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \dots & \varepsilon_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varepsilon_1^{n-1} & \varepsilon_2^{n-1} & \dots & \varepsilon_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

wenn $s_k$ durch das bestimmte Integral

$$s_k = \varepsilon_k \int_0^\infty e^{-\frac{v^n}{n} + \varepsilon_k v x} dv, \quad \left(s_k^{(m)} = \frac{d^m s_k}{dx^m}\right), \quad n > 2$$

definirt ist, $\varepsilon_1$ bis $\varepsilon_n$ die Wurzeln der Gleichung

$$\varepsilon^n + \lambda = 0$$

bedeuten und $\vartheta$ ein gewisser numerischer Factor ist.

Bekanntlich genügt der Differentialgleichung

$$\frac{d^{n-1} s}{dx^{n-1}} + \lambda x s = 0$$

das Integral

$$s = \sum_{k=1}^{k=n} C_k s_k, \quad \text{wenn} \quad \sum_{k=1}^{k=n} C_k = 0.$$

Lässt man die letzte Bedingung fort, so stellt der Ausdruck für $s$ das Integral der Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{d^{n-1} s}{dx^{n-1}} + \lambda x s\right] = \frac{d^n s}{dx^n} + \lambda x \frac{ds}{dx} + \lambda s = 0$$

dar. Nach Abel besteht nun für eine Differentialgleichung

$$X_n s^{(n)} + X_{n-1} s^{(n-1)} + \ldots + X_1 s' + X_0 s = 0,$$

deren partikuläre Integrale $s_1 \ldots s_n$ sind, folgender Determinantensatz:

$$\begin{vmatrix} s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ s'_1 & s'_2 & \ldots & s'_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_1^{(n-1)} & s_2^{(n-1)} & \ldots & s_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \varkappa e^{-\int \frac{X_{n-1}}{X_n} dx},$$

wobei $\varkappa$ eine von $x$ unabhängige Integrationsconstante bedeutet.

Für die vorhergehende Differentialgleichung ist $X_{n-1} = 0$, daher reducirt sich die rechte Seite der letzten Gleichung auf $\varkappa$.

Weiterhin ist

$$s_k^{(n-1)} = \varepsilon_k^n \int_0^\infty e^{-\frac{v^n}{n} + \varepsilon_k v x} v^{n-1} dv = \lambda \int_0^\infty e^{\varepsilon_k v x} d e^{-\frac{v^n}{n}},$$

d. h.

$$s_k^{(n-1)} = -\lambda(1 + x s_k).$$

Führt man dies in die letzte Determinante ein, so zerfällt dieselbe in die Summe zweier, von denen die eine identisch verschwindet, während die andere den Factor $-\lambda$ ausscheiden lässt, welcher in $\varkappa$ eingehen möge; man erhält also

$$\begin{vmatrix} s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ s'_1 & s'_2 & \ldots & s'_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_1^{(n-2)} & s_2^{(n-2)} & \ldots & s_n^{(n-2)} \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = \varkappa,$$

Die letzte Determinante ist aber nichts Anderes, als die zu bestimmende $\Delta$, und daher ist $\Delta = \varkappa$ eine vom Integrationsparameter $x$ unabhängige Grösse. Um diese genauer zu fixiren, sei $x = 0$, dann ist

$$[s_k^{(m)}]_{x=0} = \varepsilon_k^{m+1} \int_0^\infty e^{-\frac{v^n}{n}} v^m \, dv = \varepsilon_k^{m+1} n^{\frac{m+1}{n}-1} \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right),$$

und man bemerkt, dass in der Determinante $\Delta$

die erste Horizontalreihe den Factor $n^{\frac{1}{n}-1} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ ausscheiden
„ zweite „ „ „ $n^{\frac{2}{n}-1} \Gamma\left(\frac{2}{n}\right)$ „
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
die $(n-1)^{\text{te}}$ Horizontalreihe den Factor $n^{\frac{n-1}{n}-1} \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)$ ausscheiden

lässt. In der Determinante verweilen daher nur die entsprechenden Potenzen von $\varepsilon_1$ bis $\varepsilon_n$, und vor dieselbe tritt der Factor

$$n^{-\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

Das Product der Gammafunctionen kann nach dem Theorem von Gauss noch durch

$$(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{-\frac{1}{2}}$$

ersetzt werden, und hiernach hat man als Schlussresultat folgendes:

$$\Delta = \vartheta \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varepsilon_1^{n-1} & \varepsilon_2^{n-1} & \dots & \varepsilon_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

wobei

$$\vartheta = n^{-\frac{n}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Der Fall $n = 3$, welcher uns anfänglich beschäftigte, liefert demnach

$$\vartheta = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}},$$

wie bereits angegeben worden ist.*

---

* Diese Untersuchung bildet ein Supplement zu dem früher citirten Aufsatze Abel's. — Es lassen sich nach dem Vorgange Abel's noch manche andere interessante Integralbeziehungen aufdecken.

Geht man etwa von der Differentialgleichung

$$\frac{d^n s}{dx^n} + a_1 x \frac{ds}{dx} + a_0 s = 0,$$

deren partikuläre Integrale in der Form

## II.
## Supplementintegrale linearer Differentialgleichungen, deren zweiter Theil eine beliebige Function ist.

Euler hat im zweiten Bande seiner Integralrechnung (2. Abschnitt Capitel III—V) die Gleichungen

$$X = Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots, \quad X = Ay + Bx\frac{dy}{dx} + Cx^2\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots$$

mittels Factoren integrirt. Wir wenden uns daher sofort an andere Gruppen von Differentialgleichungen, insbesondere an diejenigen, denen die Integrale

$$\int_{u_1}^{u_2} (u-x)^m\, U\, du \quad \text{und} \quad \int_{u_1}^{u_2} e^{ux}\, V\, du$$

genügen; das ist aber die Differentialgleichung der hypergeometrischen Functionen, resp. die Laplace'sche Gleichung. — Man darf wohl behaupten, dass auf diese Gleichungen die meisten der linearen Differentialgleichungen, welche bisher integrirt wurden, zurückkommen.

### § 8.
### Supplementintegral der Differentialgleichung der hypergeometrischen Functionen $n^{\text{ter}}$ Ordnung.

Die Gleichung* lautet

$$1)\quad \varphi(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \sum_{k=n-1}^{k=0} (-1)^{n-k}\left[\binom{\lambda-k-1}{n-k}\varphi_{(x)}^{(n-k)} + \binom{\lambda-k-1}{n-k-1}\psi_{(x)}^{(n-k-1)}\right]\frac{d^k y}{dx^k} = X,$$

und hierin haben die Functionen $\varphi$ und $\psi$ nachstehende Bedeutung:

$$s_k = \int_0^\infty v^{\lambda-1}\, e^{-\frac{v^n}{n} + \varepsilon_k v x}\, dv, \quad k = 1, 2, \ldots n$$

enthalten sind, aus, wobei $\lambda$ und $\varepsilon$ aus den Gleichungen

$$a_1\lambda - a_0 = 0, \quad \varepsilon^n + a_1 = 0$$

zu berechnen sind, so erhält man nach einiger Reduction

$$\begin{vmatrix} s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ s'_1 & s'_2 & \ldots & s'_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_1^{(n-1)} & s_2^{(n-1)} & \ldots & s_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \vartheta . \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \ldots & \varepsilon_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varepsilon_1^{n-1} & \varepsilon_2^{n-1} & \ldots & \varepsilon_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

$$\vartheta = n^{-\frac{n}{2}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma(\lambda).$$

Auch hier ist die Determinante der Integrale unabhängig vom Parameter $x$, ausgenommen den Fall $n = 2$, in welchem neben $\vartheta$ der Factor $e^{-\frac{1}{2}a_1 x^2}$ tritt. Die letzte Entwickelung begreift die frühere als speciellen Fall in sich.

* Ueber die reducirte Gleichung vergl. die Arbeit von L. Pochhammer, „Ueber hypergeometrische Functionen höherer Ordnung", im 71. Bd. des Journals f. d. reine u. angew. Mathematik.

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x) &= (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)\\ \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} &= \frac{b_1}{x-a_1}+\frac{b_2}{x-a_2}+\dots+\frac{b_n}{x-a_n}\end{aligned}\right\}.$$

Um ein Supplementintegral der vorgelegten Differentialgleichung herzuleiten, kann man zwei Wege einschlagen.

1. Man verhält sich anfänglich so, als ob die reducirte Gleichung zu integriren sei, und sucht der Gleichung durch ein Integral

$$y=\int_{u_1}^{u_2} U(u-x)^{\lambda-1}\,du$$

zu genügen. Nach Einführung dieses Ausdruckes entsteht

$$q\left\{U\varphi(u)(u-x)^{\lambda-n}\right\}_{u_1}^{u_2}-q\int_{u_1}^{u_2}(u-x)^{\lambda-n}\left\{\frac{d}{du}[U\varphi(u)]-U\psi(u)\right\}du=X,$$

wo

$$q=(-1)^n(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-n+1).$$

Man setzt jetzt

$$\frac{d}{du}[U\psi(u)]-U\psi(u)=F(u),$$

unter $F(u)$ eine noch zu bestimmende Function verstanden, und wählt, wenn möglich, die Grenzen so, dass

$$q\left\{U\varphi(u)(u-x)^{\lambda-n}\right\}_{u_1}^{u_2}=0,$$

hingegen $F$ so, dass

$$-q\int_{u_1}^{u_2}(u-x)^{\lambda-n}F(u)\,du=X.$$

Weil

$$U\varphi(u)=e^{\int\frac{\psi(u)}{\varphi(u)}du}\int_{u_0}^{u}e^{-\int\frac{\psi(u)}{\varphi(u)}du}F(u)\,du,$$

wobei unter $u_0$ eine solche Grenze zu verstehen ist, für welche das Integral verschwindet, so lautet das gesuchte Supplementintegral

$$y=\int_{u_1}^{u_2}\left\{(u-x)^{\lambda-1}\chi(u)\int_{u_0}^{u}\vartheta(u).F(u)\,du\right\}du,$$

vorausgesetzt, dass dieses Integral für die ermittelten Grenzen einen Sinn hat. Hier dient zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned}\chi(u) &= (u-a_1)^{b_1-1}(u-a_2)^{b_2-1}\dots(u-a_n)^{b_n-1}\\ \vartheta(u) &= (u-a_1)^{-b_1}(u-a_2)^{-b_2}\dots(u-a_n)^{-b_n}\end{aligned}\right\}.$$

2. Man setzt $y$ in Form eines Doppelintegrals voraus:

$$y=\int_{u_1}^{u_2}\left[S(u)\int_{u_0}^{u} U(u-x)^{\lambda-1}\,du\right]du,$$

und dann entsteht durch eine analoge Rechnung wie vorhin

$$\int_{u_1}^{u_2} S(u)\left[q\left\{U\,\varphi(u)\,(u-x)^{\lambda-n}\right\}_{u_0}^{u}-q\int_{u_0}^{u}(u-x)^{\lambda-n}\left\{\frac{d}{du}[U\varphi(u)]-U\psi(u)\right\}du\right]du=X.$$

Jetzt wähle man $U$ so, dass

$$\frac{d}{du}[U\,\varphi(u)]-U\,\psi(u)=0$$

und $u_0$ so, dass

$$q\{U\,\varphi(u).(u-x)^{\lambda-n}\}_{u_0}=0,$$

dann bleibt zurück

$$q\int_{u_1}^{u_2} S(u)\,U\varphi(u)\,(u-x)^{\lambda-n}\,du=\mathrm{X}.$$

Verfügt man endlich über $S(u)$ so, dass

$$S(u)\,U\,\varphi(u)=F(u),$$

wo nun $F(u)$, abgesehen vom Vorzeichen, wieder genau die frühere Bedeutung hat, so ergiebt sich als Supplementintegral der Gleichung 1)

$$y=\int_{u_1}^{u_2}\left[\frac{F(u)}{U\,\varphi(u)}\int_{u_0}^{u}U\,(u-x)^{\lambda-1}\,du\right]du,$$

welches wegen

$$U\,\varphi(u)=e^{\int\frac{\psi(u)}{\varphi(u)}du}$$

und unter Benutzung der früher gebrauchten Abkürzungen auch folgendermassen geschrieben werden kann:

$$y=\int_{u_1}^{u_2}\left[\vartheta(u).F(u)\int_{u_0}\chi(u)\,(u-x)^{\lambda-1}\,du\right]du.$$

In beiden Fällen 1) und 2) ist also, abgesehen von einem constanten Factor, eine Function $F(u)$ von der Beschaffenheit zu ermitteln, dass*

$$\int_{u_1}^{u_2}(u-x)^{\lambda-n}\,F(u)\,du=\mathrm{X}.$$

---

* Ueber diese Functionalgleichung vergl. Abel, Crelle's Journal Bd. 1.

Als ein Beispiel sei der Fall

$$\int_{u_1}^{u_2} (u-x)^{\lambda-n} F(u)\, du = \frac{g}{(x-h)^\nu}$$

angeführt, welcher auftritt, wenn der zweite Theil der Differentialgleichung eine gebrochene Function ist. Man bemerkt leicht, dass man durch die Annahme

$$F(u) = \varkappa (u-h)^\varrho$$

zum Ziele gelangt; denn transformirt man

$$\varkappa \int_{u_1}^{u_2} (u-x)^{\lambda-n} (u-h)^\varrho\, du$$

mittels

$$u-h=(x-h)v, \quad \text{d. h.} \quad u-x=(x-h)(v-1),$$

so entsteht

$$\varkappa (x-h)^{\lambda-n+\varrho+1} \int_{v_1}^{v_2} v^\varrho (v-1)^{\lambda-n}\, dv,$$

und soll dasselbe identisch sein mit

$$\frac{g}{(x-h)^\nu},$$

so müssen die Zahlen $\varrho$ und $\varkappa$ so gewählt werden, dass

$$\varrho = n-\lambda-\nu-1, \quad \varkappa = g : \int_{v_1}^{v_2} v^\varrho (v-1)^{\lambda-n}\, dv.$$

Was die Wahl der Grenzen anbelangt, so hat man darauf zu achten, dass das zuletzt aufgeschriebene Integral einen bestimmten, von $x$ unabhängigen Werth erlangt und dass für dieselben Grenzen auch das Supplementintegral einen Sinn hat.

Soll aber der Integralausdruck für $\varkappa$ von $x$ unabhängig sein, so bieten sich für $u$, bez. $v$, welche Variabelen durch

$$u-h=(x-h)v$$

an einander gebunden waren, folgende drei Werthesysteme dar:

$$1. \quad \begin{cases} u_1 = x, \\ \left.\begin{matrix} u_2 = +\infty \\ u_2 = -\infty \end{matrix}\right\}, \end{cases} \quad \text{wenn} \quad \left\{\begin{matrix} x-h>0 \\ x-h<0 \end{matrix}\right\}, \qquad \begin{matrix} v_1 = 1, \\ v_2 = +\infty; \end{matrix}$$

$$2. \quad \begin{cases} u_1 = h, \\ \left.\begin{matrix} u_2 = +\infty \\ u_2 = -\infty \end{matrix}\right\}, \end{cases} \quad \text{wenn} \quad \left\{\begin{matrix} x-h<0 \\ x-h>0 \end{matrix}\right\}, \qquad \begin{matrix} v_1 = 0, \\ v_2 = -\infty; \end{matrix}$$

$$3. \quad \begin{cases} u_1 = h, \\ u_2 = x, \end{cases} \qquad \begin{matrix} v_1 = 0, \\ v_2 = 1. \end{matrix}$$

In diesen drei Fällen lässt sich $\varkappa$ durch vollständige Gammafunctionen ausdrücken; man findet in der entsprechenden Reihenfolge

$$1.\quad \varkappa = g : \int_1^\infty v^\varrho (v-1)^{\lambda-n}\, dv = g\cdot\frac{\Gamma(\nu+\lambda-n+1)}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\lambda-n+1)},$$

$$\nu > 0,\quad \lambda - n + 1 > 0;$$

$$2.\quad \varkappa = g : \int_0^{-\infty} v^\varrho (v-1)^{\lambda-n}\, dv = g(-1)^\nu \int_0^\infty w^\varrho (1+w)^{\lambda-n}\, dw$$

oder

$$\varkappa = (-1)^\nu g\cdot\frac{\Gamma(n-\lambda)}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(n-\lambda-\nu)},\quad \nu > 0,\quad n-\lambda-\nu > 0;$$

$$3.\quad \varkappa = g : \int_0^1 v^\varrho (v-1)^{\lambda-n}\, dv = g(-1)^{\lambda-n} \int_0^1 v^\varrho (1-v)^{\lambda-n}\, dv$$

oder

$$\varkappa = (-1)^{\lambda-n} g\cdot\frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(n-\lambda-\nu)\,\Gamma(\lambda-n+1)},\quad \begin{matrix} n-\lambda-\nu > 0, \\ \lambda-n+1 > 0. \end{matrix}$$

Die erhaltenen $u$-Grenzen sind unter den aufgestellten Beschränkungen auch zulässige Grenzen für das Supplementintegral. Ist $\nu$ eine positive ganze Zahl (Exponent des Nenners von einem Partialbruch), so ist die dritte Gruppe der Grenzen, für welche $1-\nu > 0$, auszuschliessen. Die durch die Argumente der Gammafunctionen nothwendig gewordenen Beschränkungen lassen sich durch vielfache Differentiationsprocesse und Integrationsprocesse beseitigen. Doch erfordern diese Discussionen zuviel Raum, als dass sie hier angeführt werden könnten.

## § 9.

### Supplementintegral der Laplace'schen Gleichung

$$1)\quad (a_n + b_n x) y^{(n)} + (a_{n-1} + b_{n-1} x) y^{(n-1)} + \ldots + (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x) y = X.$$

Zu dem Supplementintegral gelangt man wiederum auf zweifachem Wege.

1. Man führt, wie bei der Integration der reducirten Gleichung, das Integral

$$y = \int_{u_1}^{u_2} e^{ux}\, V\, du$$

ein, wodurch die Gleichung 1) in

$$\Big\{ e^{ux}\, U_1\, V \Big\}_{u_1}^{u_2} + \int_{u_1}^{u_2} e^{ux} \Big\{ U_0 V - \frac{d}{du}(U_1 V) \Big\}\, du = X$$

übergeht, und hierbei ist (vergl. § 5)

$$U_0 = a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} + \dots + a_1 u + a_0,$$
$$U_1 = b_n u^n + b_{n-1} u^{n-1} + \dots + b_1 u + b_0.$$

Nun setze man

$$U_0 V - \frac{d}{du}(U_1 V) = F(u),$$

unter $F(u)$ eine noch zu bestimmende Function verstanden, und suche die Grenzen so auszumitteln, dass

$$\Big\{ e^{ux} U_1 V \Big\}_{u_1}^{u_2} = 0;$$

$F(u)$ hingegen ist so zu wählen, dass

$$\int_{u_1}^{u_2} e^{ux} F(u)\, du = X.$$

Beachtet man, dass

$$U_1 V = -e^{\int \frac{U_0}{U_1} du} \int_{u_0}^{u} e^{-\int \frac{U_0}{U_1} du} F(u)\, du,$$

wobei $u_0$ ein solcher Werth ist, für welchen das Integral verschwindet, so ergiebt sich als Supplementintegral der Laplace'schen Gleichung

$$y = -\int_{u_1}^{u_2} \Big\{ e^{u(m+x)} \chi(u) \int_{u_0}^{u} \vartheta(u) . F(u)\, du \Big\} du,$$

vorausgesetzt, dass die Grenzen $u_1$ und $u_2$ auch für das letzte Integral zulässig sind. Hier dient, wie früher, zur Abkürzung

$$\chi(u) = (u-\alpha_1)^{\beta_1 - 1} (u-\alpha_2)^{\beta_2 - 1} \dots (u-\alpha_n)^{\beta_n - 1},$$
$$\vartheta(u) = (u-\alpha_1)^{-\beta_1} (u-\alpha_2)^{-\beta_2} \dots (u-\alpha_n)^{-\beta_n}.$$

Die Grössen $\alpha$, $\beta$ und $m$ sind durch die Identität

$$\frac{U_0}{U_1} = m + \frac{\beta_1}{u-\alpha_1} + \frac{\beta_2}{u-\alpha_2} + \dots + \frac{\beta_n}{u-\alpha_n}$$

bestimmt.

2. Man kann $y$ auch in Form eines Doppelintegrales

$$y = \int_{u_1}^{u_2} \Big[ S(u) \int_{u_0}^{u} e^{ux} V\, du \Big] du$$

voraussetzen, und dann entsteht durch eine analoge Rechnung

$$\int_{u_1}^{u_2} S(u) \Big[ \Big\{ e^{ux} U_1 V \Big\}_{u_0}^{u} + \int_{u_0}^{u} e^{ux} \Big\{ U_0 V - \frac{d}{du}(U_1 V) \Big\} du \Big] du = X.$$

Jetzt wähle man $V$ so, dass

$$U_0 V - \frac{d}{du}(U_1 V) = 0$$

und $u_0$ so, dass

$$\{ e^{ux} U_1 V \}_{u_0} = 0,$$

dann bleibt zurück

$$\int_{u_1}^{u_2} S(u)\, e^{ux}\, U_1\, V\, du \doteq X.$$

Verfügt man endlich über $S(u)$ so, dass

$$S(u)\, U_1\, V = F(u),$$

wo nun $F(u)$ genau die vorige Bedeutung hat, so ergiebt sich als Supplementintegral der Gleichung 1)

$$y = \int_{u_1}^{u_2} \left[ \frac{F(u)}{U_1\, V} \int_{u_0}^{u} e^{ux}\, V\, du \right] du,$$

welches wegen

$$U_1\, V = e^{\int \frac{U_0}{U_1} du}$$

und unter Benutzung der früher gebrauchten Abkürzungen auch folgendermassen geschrieben werden kann:

$$y = \int_{u_1}^{u_2} \left\{ \vartheta(u)\, F(u) \int_{u_0}^{u} e^{u(m+x)}\, \chi(u)\, du \right\} du.$$

Die Wahl der Grenzen $u_0$, $u_1$, $u_2$ kann auf verschiedene Weise erfolgen, und ist dabei stets der speciell vorgelegte Fall massgebend.

In beiden Fällen 1 und 2 ist also eine Function $F(u)$ von der Beschaffenheit zu ermitteln, dass*

$$\int_{u_1}^{u_2} e^{ux}\, F(u)\, du = X.$$

Man benutzt hierbei vortheilhaft die aus der Theorie der Fourier'schen Integrale bekannte Formel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{v_1}^{v_2} e^{u(x-v)\sqrt{-1}} f(v)\, du\, dv = 2\pi f(x), \quad v_1 < x < v_2.$$

Behandeln wir auch hier als Beispiel den Fall

$$X = \frac{g}{(x-h)^\nu}.$$

Soll

$$\int_{u_1}^{u_2} e^{ux}\, F(u)\, du = \frac{g}{(x-h)^\nu}$$

sein, so findet sich leicht, dass

---

* Ueber diese Functionalgleichung siehe auch: Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel, Tome second, XI, „Sur les fonctions génératrices et leurs déterminantes". Abel nennt $X$ die *fonction génératrice* von $F$, und $F$ die *déterminante* von $X$.

$$F(u) = \varkappa\, e^{-hu}\, u^{\nu-1},$$

denn das Integral

$$\varkappa \int_{u_1}^{u_2} e^{u(x-h)}\, u^{\nu-1}\, du$$

geht für

$$u(x-h) = -v$$

über in

$$\frac{(-1)^\nu \varkappa}{(x-h)^\nu} \int_{v_1}^{v_2} e^{-v}\, v^{\nu-1}\, dv,$$

und soll das identisch sein mit $\frac{g}{(x-h)^\nu}$, so muss

$$(-1)^\nu \varkappa \int_{v_1}^{v_2} e^{-v}\, v^{\nu-1}\, dv = g$$

sein. Man ist offenbar veranlasst, die Grenzen folgendermassen zu wählen:

$$u_1 = 0, \qquad\qquad v_1 = 0;$$

$$\left.\begin{matrix} u_2 = +\infty \\ u_2 = -\infty \end{matrix}\right\}, \text{ wenn } \left\{\begin{matrix} x-h < 0 \\ x-h > 0 \end{matrix}\right\}, \quad v_2 = +\infty.$$

Nun hat man

$$\varkappa = (-1)^\nu g : \Gamma(\nu), \quad \nu > 0,$$

und man überzeugt sich, dass die Werthe von $u_1$ und $u_2$ auch zulässige Grenzen für das Supplementintegral der Gleichung 1) sind, wenn $\nu > 0$.

Ist $\nu$ ausserdem eine ganze Zahl (Exponent des Nenners eines Partialbruches), so hat man

$$\varkappa = \frac{(-1)^\nu g}{(\nu-1)!}.$$

Der Fall negativer $\nu$ erfordert eine umständlichere Discussion.

### Anmerkung.

Wenn der zweite Theil einer linearen, nicht homogenen Differentialgleichung

$$X_n y^{(n)} + X_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + X_1 y' + X_0 y = X$$

in eine Summe von $\mu$-Functionen zerlegt werden kann:

$$X = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_\mu(x),$$

so ist auch das Supplementintegral additiv aus $\mu$-Functionen zusammengesetzt:

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_\mu,$$

und zwar muss $\zeta_k$ so beschaffen sein, dass es, an Stelle von $y$ in die linke Seite der Differentialgleichung eingeführt, diese umwandelt in $f_k(x)$. Wir nennen kurz $\zeta_k$ das zu $f_k$ gehörige Supplement (oder Ergänzung).

Ist also z. B. $X$ eine unecht gebrochene Function

$$X = \frac{G_0 + G_1 x + G_2 x^2 + \ldots + G_\mu x^\mu}{H_0 + H_1 x + H_2 x^2 + \ldots + H_\nu x^\nu}, \quad \mu > \nu,$$

so zerlege man dieselbe in

$$X = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{\mu-\nu} x^{\mu-\nu} + \sum \frac{g_i}{(x-h_i)^{\nu_i}}$$

und bestimme das zu der ganzen Function gehörige Supplement, sowie auch alle Supplemente, welche zu den einzelnen Partialbrüchen gehören. Die Summe dieser Supplemente ist dann das der Function $X$ entsprechende Supplementintegral.

Mit Benutzung früher gewonnener Resultate (§§ 1, 5, 8 und 9) kann man hiernach das Supplementintegral der Pochhammer und Laplace'schen Gleichung angeben, wenn deren zweite Theile gebrochene Functionen sind.

---

## III.
## Supplementintegrale linearer simultaner Differentialgleichungen.

### § 10.
### A. Gleichungen mit constanten Coefficienten.

Es sei das Gleichungssystem

$$\frac{dy_1}{dx} + a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_n y_n = X_1,$$

$$\frac{dy_2}{dx} + b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_n y_n = X_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dy_n}{dx} + n_1 y_1 + n_2 y_1 + \ldots + n_n y_n = X_n$$

vorgelegt, die $X$ als ganze Functionen vorausgesetzt, und von diesen Functionen möge $X_\mu$ den höchsten ($\mu^{\text{ten}}$) Grad besitzen. Sind $z_1, z_2, \ldots z_n$ die Integrale des reducirten Systems, so genügt dem vollständigen

$$y_1 = z_1 + \zeta_1, \quad y_2 = z_2 + \zeta_2, \quad \ldots \quad y_n = z_n + \zeta_n,$$

wobei $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ ganze Functionen bedeuten, von denen im Allgemeinen jede bis zum $\mu^{\text{ten}}$ Grade aufsteigt. Denn führt man die letzten Ausdrücke in die Differentialgleichungen ein, so wird es erforderlich, $n$ ganze Functionen vom $\mu^{\text{ten}}$ Grade mit den Functionen $X_1$ bis $X_n$ zu identificiren, und hierzu reichen die $(\mu+1)n$ Coefficienten der $\zeta$ im Allgemeinen aus. Die Bestimmungsgleichungen für diese Coefficienten sind linear. — Es ist leicht einzusehen, dass das Verfahren auch bei Gleichungen höherer Ordnung mit constanten Coefficienten angewendet werden kann.

### B. Gleichungen mit veränderlichen Coefficienten.

Sind die Coefficienten der vorgelegten simultanen Gleichungen, sowie deren zweite Theile ganze Functionen, so ist die Annahme der Ergänzungs-

integrale in Form ganzer Functionen immer angezeigt, und sollte man auch nicht im Stande sein, die Ergänzungsintegrale vollständig anzugeben, so lässt sich doch auf diesem Wege aus dem gegebenen Gleichungssystem ein anderes ableiten, in welchem der Grad der rechten Seiten herabgedrückt ist.

Lineare simultane Gleichungen mit veränderlichen Coefficienten sind bis jetzt in so geringer Anzahl integrirt worden, dass es schwer hält, ein passendes Beispiel zu geben. Ein Fall, bei welchem die Integration bekanntlich vollständig durchgeführt werden kann, ist folgender:*

$$1)\qquad \frac{dy_1}{X_1-N_1}=\frac{dy_2}{X_2-N_2}=\dots=\frac{dy_n}{X_n-N_n}=\frac{dx}{X},$$

wobei die Functionen $X, X_1, \dots X_n$ nur von $x$ abhängen und die $N$ lineare homogene Ausdrücke der abhängigen Variabelen sind

$$N_k=h_1y_1+h_2y_2+\dots+h_ny_n.$$

Sind $X_1$ bis $X_n$ ganze Functionen und übersteigt $X$ den ersten Grad nicht, so sind sämmtliche Ergänzungsintegrale des Systems ganze Functionen.

Ein zweites Beispiel ist folgendes:

$$2)\qquad \left.\begin{aligned}(A+Bx)\frac{dy}{dx}+(C+Dx)\frac{dz}{dx}+Ey+Fz=X\\(A'+B'x)\frac{dy}{dx}+(C'+D'x)\frac{dz}{dx}+E'y+F'z=X'\end{aligned}\right\}.$$

Sind hier $X$ und $X'$ ganze Functionen, so sind es auch die beiden Ergänzungsintegrale. Ist etwa

$$X=A_0+A_1\frac{x}{1!}+A_2\frac{x^2}{2!},\quad X'=A'_0+A'_1\frac{x}{1!}+A'_2\frac{x^2}{2!},$$

so lauten die Integrale

$$y=y_1+m+n\frac{x}{1!}+p\frac{x^2}{2!},\quad z=z_1+m'+n'\frac{x}{1!}+p'\frac{x^2}{2!},$$

wo $y_1$ und $z_1$ die Integrale des reducirten Systems vorstellen und die Coefficienten $m$, $m'$ etc. aus folgenden Gleichungen zu berechnen sind:

$$\left.\begin{aligned}(2B+E)\,p+(2D+F)\,p'=A_2\\(2B'+E')p+(2D'+F')p'=A'_2\\(B+E)\,n+(D+F)n'+Ap+Cp'=A_1\\(B'+E')n+(D'+F')n'+A'p+C'p'=A'_1\\Em+Fm'+An+Cn'=A_0\\E'm+F'm'+A'n+C'n'=A'_0\end{aligned}\right\}.$$

Das Integralsystem der reducirten Gleichungen konnte, soviel ich weiss, bisher nicht aufgestellt werden, weil für die Differentialgleichung zwischen zwei Veränderlichen, welche auf verschiedene Art aus obigen simultanen Differentialgleichungen abgeleitet werden kann, die Integration nicht bekannt

* A Treatise on Differential equations by George Boole, London 1877, Ch. XIII Art. 10.

war. Ich will nun zeigen, dass sich das gegebene System durch hypergeometrische Functionen integriren lässt.

Löst man die Gleichungen 2) nach $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ auf, so folgt

$$3)\quad \left.\begin{aligned}(a+bx+cx^2)\frac{dy}{dx}+(a_1+b_1x)y+(\alpha_1+\beta_1x)z+X_1=0\\(a+bx+cx^2)\frac{dz}{dx}+(a_2+b_2x)y+(\alpha_2+\beta_2x)z+X_2=0\end{aligned}\right\},$$

und hierin sind $X_1$ und $X_2$ beliebige Functionen von $x$, wenn wir von jetzt ab auch über $X$ und $X'$ keine bestimmten Voraussetzungen mehr machen.

Um auf eine Gleichung mit nur zwei Veränderlichen zu kommen, multipliciren wir die zweite Gleichung mit einem unbestimmten Factor $\Theta$ und addiren sie zur ersten. (d'Alembert's Methode.) Es entsteht

$$\varphi\left(\frac{dy}{dx}+\Theta\frac{dz}{dx}\right)+(p_1+p_2\Theta)y+(q_1+\Theta q_2)z+(X_1+\Theta X_2)=0,$$

wobei zur Abkürzung

$$a+bx+cx^2=\varphi,$$
$$a_1+b_1x=p_1,\qquad \alpha_1+\beta_1x=q_1,$$
$$a_2+b_2x=p_2,\qquad \alpha_2+\beta_2x=q_2$$

geschrieben wurde. Setzt man, um $y$ zu eliminiren,

$$y+\Theta z=t,$$

so geht die letzte Differentialgleichung über in

$$\varphi\left(\frac{dt}{dx}-z\frac{d\Theta}{dx}\right)+(p_1+\Theta p_2)(t-\Theta z)+(q_1+\Theta q_2)z+(X_1+\Theta X_2)=0,$$

und dies kann zerfällt werden in

$$\left.\begin{aligned}&\text{a)}\qquad \varphi\frac{dt}{dx}+(p_1+\Theta p_2)t\;+\;X_1+\Theta X_2=0\\&\text{b)}\qquad \varphi\frac{d\Theta}{dx}+(p_1+\Theta p_2)\Theta-(q_1+\Theta q_2)=0\end{aligned}\right\}.$$

Für die letzte Gleichung suche man zwei partikuläre Integrale $\Theta_1$ und $\Theta_2$ auf; aus der vorletzten Gleichung findet man nach Substitution dieser Functionen zwei entsprechende Werthe für $t$, von denen jeder eine willkürliche Constante mit sich führt. Die Integrale der simultanen Gleichungen sind sonach gegeben durch

$$y+\Theta_1z=t_1\quad\text{und}\quad y+\Theta_2z=t_2.$$

Die Gleichung b) hat die Gestalt

$$(a+bx+cx^2)\frac{d\Theta}{dx}+(a_2+b_2x)\Theta^2+\{(a_1+b_1x)-(\alpha_2+\beta_2x)\}\Theta-(\alpha_1+\beta_1x)=0$$

und lässt sich auf folgende Weise integriren.*

---

* Vergl. meine Arbeit: „Ueber Differentialgleichungen, welche durch hypergeometrische Functionen integrirt werden können", diese Zeitschrift XXIX. Jahrg. 3. Heft.

Man setze

$$\Theta = -\frac{1+\lambda v}{v}, \quad \Theta' = \frac{v'}{v^2},$$

wodurch entsteht

$$(a+bx+cx^2)v' + (a_2+b_2x)(1+\lambda v)^2 - \{(a_1+b_1x)-(\alpha_2+\beta_2x)\}(1+\lambda v)v$$
$$-(\alpha_1+\beta_1x)v^2 = 0.$$

Bestimmt man $\lambda$ so, dass der Factor von $xv^2$ verschwindet, d. h., dass

$$b_2\lambda^2 + (\beta_2 - b_1)\lambda - \beta_1 = 0,$$

dann bleibt eine Gleichung zurück, welche Specialfall der von mir integrirten Gleichung*

$$\text{c)} \quad (a+bx+cx^2)\frac{dy}{dx} + Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

ist. Ich habe früher mehrere Wege angegeben, wie diese Differentialgleichung in die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe transformirt werden kann. Es sei hier ein sehr kurzer angedeutet.

Ertheilt man der Gleichung c) die Form

$$(a+bx+cx^2)\frac{dy}{dx} + y^2 + (a_1+b_1x)y + a_0 + b_0x + c_0x^2 = 0$$

und substituirt

$$y = (a+bx+cx^2)z + (g+hx),$$

so entsteht

$$(a+bx+cx^2)^2\left(\frac{dz}{dx}+z^2\right)$$
$$+(a+bx+cx^2)\{(b+2cx)+(a_1+b_1x)+2(g+hx)\}z$$
$$+(a+bx+cx^2)h + (g+hx)^2 + (a_1+b_1x)(g+hx) + a_0 + b_0x + c_0x^2 = 0.$$

Es lassen sich die Zahlen $g$ und $h$ so bestimmen, dass die linke Seite der Gleichung den Factor

$$a+bx+cx^2 = c(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)$$

ausscheiden lässt. Die Bedingungen hierfür sind nämlich

$$\left.\begin{array}{l}(g+h\varepsilon_1)^2 + (a_1+b_1\varepsilon_1)(g+h\varepsilon_1) + a_0 + b_0\varepsilon_1 + c_0\varepsilon_1^2 = 0 \\ (g+h\varepsilon_2)^2 + (a_1+b_1\varepsilon_2)(g+h\varepsilon_2) + a_0 + b_0\varepsilon_2 + c_0\varepsilon_2^2 = 0\end{array}\right\},$$

und man findet aus diesen Gleichungen

$$g+h\varepsilon_1 = \Delta_1, \quad g+h\varepsilon_2 = \Delta_2,$$

wo $\Delta_1$ und $\Delta_2$ bekannte Grössen sind. Schliesslich hat man

$$g = \frac{\varepsilon_1\Delta_2 - \varepsilon_2\Delta_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}, \quad h = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}, \quad \varepsilon_1 \gtrless \varepsilon_2,$$

und die Differentialgleichung geht für

$$z = \frac{\frac{dw}{dx}}{w}$$

über in

---

* Vergl. meine Aufsätze in dieser Zeitschrift XXVII. Jahrg. Heft 1 und 6.

$$(a+bx+cx^2)\frac{d^2w}{dx^2}+(\alpha+\beta x)\frac{dw}{dx}+\gamma w=0.$$

Wegen der Ausnahmefälle und weiterer Transformationen vergl. a. a. O.

---

Wenn nun auch das Integrationsproblem für die simultanen Gleichungen 2) und 3) als gelöst zu betrachten ist, so lässt doch die Form der Integrale zu wünschen übrig. Insbesondere gilt dies von dem Integral der Gleichung a), welches lautet

$$t=e^{-\int\frac{p_1+\Theta p_2}{\varphi}dx}\left\{const.-\int\frac{X_1+\Theta X_2}{\varphi}e^{\int\frac{p_1+\Theta p_2}{\varphi}dx}dx\right\},$$

und in welches die höchst complicirte Function $\Theta$, ein Quotient aus hypergeometrischen Integralen, eingegangen ist.

Wir sehen uns daher veranlasst, für die Integration einen directen Weg aufzusuchen. In der That kann man den Calcul so anstellen, dass man sogleich zu einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zweitem Gliede gelangt; die Gleichung erster Ordnung a) fällt dann ganz weg. Ueber die Functionen $\varphi, p_1, q_1$ etc. brauchen hierbei keine speciellen Voraussetzungen gemacht zu werden. Sind diese Functionen so einfach wie im vorliegenden Beispiele, so gelangt man auf diesem Wege zur Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe — mit zweitem Theile —, und dann tritt das Integrationsverfahren ein, welches in § 8 angedeutet wurde.

## § 11.

### Directe Integrationsmethode für ein System von zwei simultanen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$4)\quad\left.\begin{aligned}\alpha)\quad &\varphi\frac{dy}{dx}+p_1y+q_1z+X_1=0\\ \beta)\quad &\varphi\frac{dz}{dx}+p_2y+q_2z+X_2=0\end{aligned}\right\}.$$

#### A. Die Coefficienten seien beliebige Functionen von $x$.

Wir substituiren

$$\gamma)\quad\left.\begin{aligned}y&=\varphi\frac{d\eta}{dx}+\psi_1\eta+\zeta\\ z&=\varphi\frac{d\eta}{dx}+\psi_2\eta+\zeta\end{aligned}\right\}$$

und bestimmen die Functionen $\psi_1$, $\psi_2$ und $\zeta$ so, dass die Gleichungen $\alpha$) und $\beta$) identisch werden. Diese Gleichungen verwandeln sich in

$$\left.\begin{array}{ll}\alpha) & \varphi^2\eta''+\varphi\{\varphi'+\psi_1+p_1+q_1\}\eta'+\{\varphi\psi'_1+p_1\psi_1+q_1\psi_2\}\eta \\ & \qquad +\varphi\zeta'+(p_1+q_1)\zeta+X_1=0 \\ \beta) & \varphi^2\eta''+\varphi\{\varphi'+\psi_2+p_2+q_2\}\eta'+\{\varphi\psi'_2+p_2\psi_1+q_2\psi_2\}\eta \\ & \qquad +\varphi\zeta'+(p_2+q_2)\zeta+X_2=0\end{array}\right\}.$$

Zur Identität gehört

$$\left.\begin{array}{c}\psi_1+p_1+q_1=\psi_2+p_2+q_2 \\ \varphi\psi'_1+p_1\psi_1+q_1\psi_2=\varphi\psi'_2+p_2\psi_1+q_2\psi_2 \\ (p_1+q_1)\zeta+X_1=(p_2+q_2)\zeta+X_2\end{array}\right\},$$

und hieraus ergiebt sich

$$\psi_1=\varphi\frac{\vartheta'}{\vartheta}+(q_2-q_1),\quad \psi_2=\varphi\frac{\vartheta'}{\vartheta}-(p_2-p_1),\quad \zeta=(X_1-X_2):\vartheta,$$

wobei zur Abkürzung

$$(p_2-p_1)+(q_2-q_1)=\vartheta$$

gesetzt wurde. Nach Einführung dieser Werthe gehen beide Gleichungen $\alpha$) und $\beta$) über in

$$\delta)\qquad f_0\varphi^2\eta''+f_1\varphi\eta'+f_2\eta+X_0=0,\ .$$

wo sich die Coefficienten $f_0$, $f_1$, $f_2$ und $X_0$ von selbst ergeben. Lässt sich diese Gleichung vollständig integriren, so sind dann die Ausdrücke unter $\gamma$) das vollständige Integralsystem der Gleichungen 4).

### B. Die Coefficienten $\varphi$, $p$, $q$ seien ganze Functionen.

Sind $p_1$, $q_1$, $p_2$, $q_2$ und $\varphi$ ganze Functionen, so sind auch die Coefficienten $f_0$, $f_1$ und $f_2$ der Gleichung $\delta$) ganze Functionen,* und dann lässt diese Gleichung eine wesentliche Reduction zu. Man kann sie nämlich so transformiren, dass ihr homogener Theil

$$f_0\varphi_2^2\eta''+f_1\varphi\eta'+f_2\eta$$

den Factor $\varphi$ ausscheiden lässt, mithin der Coefficientengrad der reducirten Gleichung um den Grad von $\varphi$ niedriger wird.

Sei $\varphi$ vom $n^{\text{ten}}$ Grade,

$$\varphi=c(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\ldots(x-\varepsilon_n),$$

dann setze man

$$\eta=we^{\int\frac{G}{\varphi}dx},$$

unter $G$ eine Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades

$$G=g_0+g_1x+g_2x^2+\ldots+g_{n-1}x^{n-1}$$

verstanden. Nun geht Gleichung $\delta$) über in

$$\varphi^2f_0\frac{d^2w}{dx^2}+\varphi\{2f_0G+f_1\}\frac{dw}{dx}$$
$$+\{\varphi f_0G'+f_0G^2+(f_1-\varphi'f_0)G+f_2\}w+X_0e^{-\int\frac{G}{\varphi}dx}=0,$$

und soll der homogene Theil durch $\varphi$ theilbar werden, so muss

* Man hat sich die Gleichungen $\alpha$) und $\beta$) mit $\vartheta^2=f_0$ multiplicirt zu denken.

$$f_0 G^2 + (f_1 - \varphi' f_0) G + f_2 = 0$$

sein für jeden der $n$ Werthe

$$x = \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, 3, \ldots n.$$

Löst man die quadratische Gleichung für $G$ auf und bezeichnet eine der beiden Wurzeln mit $G(x)$, so hat man zur Bestimmung der $n$ Coefficienten $g_0$ bis $g_{n-1}$ ebensoviel lineare Gleichungen der Form

$$g_0 + \varepsilon_i g_1 + \varepsilon_i^2 g_2 + \ldots + \varepsilon_i^{n-1} g_{n-1} = G(\varepsilon_i).$$

Nach dieser Transformation vereinfacht sich die letzte Differentialgleichung zu

$$f_0 \varphi \frac{d^2 w}{dx^2} + \{2 f_0 G + f_1\} \frac{dw}{dx} + Fw + \frac{X_0}{\varphi} e^{-\int \frac{G}{\varphi} dx} = 0.$$

Die Function $F$ ergiebt sich durch die Division von selbst; sie ist mindestens vom $(n-2)^{\text{ten}}$ Grade.*

**C. Die Function $\vartheta$ reducire sich auf eine Constante.**

Die Substitutionscoefficienten

$$\psi_1 = \varphi \frac{\vartheta'}{\vartheta} + (q_2 - q_1), \quad \psi_2 = \varphi \frac{\vartheta'}{\vartheta} - (p_2 - p_1),$$

welche in die Differentialgleichung $\delta$) eingehen, erhöhen diese bezüglich des Grades der Coefficienten hauptsächlich infolge Auftretens der Grösse

$$\varphi \frac{\vartheta'}{\vartheta}.$$

Es verdient daher der Fall $\vartheta = const.$, in welchem diese Grösse verschwindet, besondere Beachtung.

$\vartheta$ wird zu einer Constanten, wenn sich in

$$\vartheta = (p_2 - p_1) + (q_2 - q_1)$$

die Coefficienten gleicher Potenzen von $x$ gegenseitig aufheben.** Man kann aber auch in anderer Weise die gewünschte Constanz herbeiführen.

Setzt man in dem ursprünglichen Gleichungssystem

$$4) \quad \left.\begin{array}{ll} \alpha) & \varphi \frac{dy}{dx} + p_1 y + q_1 z + X_1 = 0 \\ \beta) & \varphi \frac{dz}{dx} + p_2 y + q_2 z + X_2 = 0 \end{array}\right\}$$

---

* Ich habe diese Transformation bereits bei anderer Gelegenheit mitgetheilt. Hier musste sie des Zusammenhangs wegen kurz wiederholt werden. Man vergl. diese Zeitschrift XXVII. Jahrg. Heft 6. — An dieser Stelle ist auch des Falles Erwähnung gethan, in welchem gewisse der Wurzeln $\varepsilon_i$ einander gleich sind.

** Der Fall $\vartheta = 0$ bildet eine leicht zu erledigende Ausnahme. Subtrahirt man nämlich dann Gleichung $\beta$) von $\alpha$), so erhält man wegen

$$q_1 - q_2 = -(p_1 - p_2)$$

eine Gleichung, die folgendermassen geschrieben werden kann:

$$\varphi \frac{d}{dx}(y - z) + (p_1 - p_2)(y - z) + X_1 - X_2 = 0,$$

und nun kann die Integration in einfachster Weise vollzogen werden.

$\mu y_1$ an Stelle von $y$, unter $\mu$ eine unbestimmte Constante verstanden, so entsteht

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha') & \varphi\frac{dy_1}{dx} + p_1 y_1 + (q_1:\mu)z + X_1:\mu = 0 \\ \beta') & \varphi\frac{dz_1}{dx} + p_2\mu y_1 + q_2 z + X_2 = 0 \end{array}\right\}.$$

Es stehen daher jetzt an Stelle der Buchstaben

die anderen:
$$\left.\begin{array}{cccc} y & q_1 & p_2 & X_1 \\ y_1 & q_1:\mu & p_2\mu & X_1:\mu \end{array}\right\}.$$

Mithin ist für das jetzige System

$$\vartheta = [p_2\mu^2 + (q_2 - p_1)\mu - q_1]:\mu,$$

und damit dies constant sei, müssen die Functionen $p_1$, $p_2$, $q_1$ und $q_2$ specieller, nämlich folgendermassen beschaffen sein:

$$\left.\begin{array}{ll} p_1 = a_1 + b_1 p(x) + q(x), & p_2 = a_2 + b_2 p(x), \\ q_1 = \alpha_1 + \beta_1 p(x), & q_2 = \alpha_2 + \beta_2 p(x) + q(x) \end{array}\right\},$$

wo $p(x)$ und $q(x)$ beliebige Functionen sind.

Die Grösse $\mu$ muss sodann an die Bedingung

$$b_2\mu^2 + (\beta_2 - b_1)\mu - \beta_1 = 0$$

geknüpft werden. Man bemerkt, dass diese Gleichung für $\mu$ genau dieselbe als diejenige ist, welche wir früher für die Bestimmung des Factors $\lambda$ erhielten. Es besteht thatsächlich zwischen diesen Grössen der innigste Zusammenhang.

Die Constante $\vartheta$ hat nun den Werth

$$\vartheta = [a_2\mu^2 + (\alpha_2 - a_1)\mu - \alpha_1]:\mu,$$

und weiter hat man

$$\psi_1 = (\mu q_2 - q_1):\mu, \quad \psi_2 = -(\mu p_2 - p_1), \quad \zeta = (X_1 - \mu X_2):\mu\vartheta.$$

Folglich lauten die Substitutionen $\gamma$ unter Beachtung, dass $y = \mu y_1$,

$$\gamma')\qquad \left.\begin{array}{l} y = \mu\varphi\frac{d\eta}{dx} + (\mu q_2 - q_1)\eta + \mu\zeta \\ z = \varphi\frac{d\eta}{dx} - (\mu p_2 - p_1)\eta + \zeta \end{array}\right\},$$

und $\eta$ endlich ist das vollständige Integral der Gleichung

$$\delta')\qquad f_0\varphi^2\eta'' + f_1\varphi\eta' + f_2\eta + X_0 = 0,$$

in welcher

$$f_0 = 1,\quad f_1 = \varphi' + p_1 + q_2,\quad f_2 = \varphi(p'_1 - \mu p'_2) + (p_1 q_2 - p_2 q_1),$$
$$X_0 = \varphi\zeta' + (\mu p_2 + q_2)\zeta + X_2.$$

Die Differentialgleichung $\delta'$) ist im Falle ganzer Functionen wieder zu transformiren durch

$$\eta = w e^{\int\frac{G}{\varphi}dx}$$

und die Bestimmungsgleichung für $G$ ist

$$G^2 + (p_1 + q_2)G + (p_1 q_2 - p_2 q_1) = 0.$$

**D. Vollständiges Integral von**

$$3)\quad \left.\begin{aligned}(a+bx+cx^2)\frac{dy}{dx}+(a_1+b_1x)y+(\alpha_1+\beta_1x)z+X_1=0\\(a+bx+cx^2)\frac{dz}{dx}+(a_2+b_2x)y+(\alpha_2+\beta_2x)z+X_2=0\end{aligned}\right\}.$$

Man setze in der vorigen Untersuchung (C)

$$p(x)=x,\quad q(x)=0,$$

so dass man hat

$$p_1=a_1+b_1x,\quad p_2=a_2+b_2x,$$
$$q_1=\alpha_1+\beta_1x,\quad q_2=\alpha_2+\beta_2x.$$

Hierauf berechne man $\mu$ aus

$$b_2\mu^2+(\beta_2-b_1)\mu-\beta_1=0$$

und $\vartheta$ mittels

$$\vartheta=[a_2\mu^2+(\alpha_2-a_1)\mu-\alpha_1]:\mu.$$

Man wende sich nun an die Differentialgleichung

$$(a+bx+cx^2)^2\eta''+(a+bx+cx^2)\left\{\begin{matrix}b+2cx\\+a_1+b_1x\\+\alpha_2+\beta_2x\end{matrix}\right\}\eta'$$
$$+\left\{\begin{matrix}(a+bx+cx^2)(b_1-\mu b_2)\\+(a_1+b_1x)\ (\alpha_2+\beta_2x)\\-(a_2+b_2x)\ (\alpha_1+\beta_1x)\end{matrix}\right\}\eta+X_0=0$$

und transformire dieselbe mittels

$$\eta=w\,e^{\int\frac{g+hx}{a+bx+cx^2}dx},$$

so dass entsteht

$$(a+bx+cx^2)w''+(\alpha+\beta x)w'+\gamma w+X_0\frac{e^{-\int\frac{g+hx}{a+bx+cx^2}dx}}{a+bx+cx^2}=0.$$

Die letzte Gleichung integrire man in der Weise, als in § 8 die Differentialgleichung der hypergeometrischen Functionen mit zweitem Theile integrirt worden ist (ohne Variation der Constanten).

Das Integral des vorgelegten Gleichungssystems wird vermittelt durch

$$\left.\begin{aligned}y&=\mu(a+bx+cx^2)\frac{d\eta}{dx}+\{\mu(\alpha_2+\beta_2x)-(\alpha_1+\beta_1x)\}\eta+(X_1-\mu X_2):\vartheta\\z&=\ (a+bx+cx^2)\frac{d\eta}{dx}-\{\mu(a_2+b_2x)-(a_1+b_1x)\}\eta+(X_1-\mu X_2):\mu\vartheta\end{aligned}\right\}.$$

Mit den Gleichungen 3) sind nun auch die Gleichungen

$$2)\quad \left.\begin{aligned}(A+Bx)\frac{dy}{dx}+(C+Dx)\frac{dz}{dx}+Ey+Fz=X\\(A'+B'x)\frac{dy}{dx}+(C'+D'x)\frac{dz}{dx}+E'y+F'z=X'\end{aligned}\right\}$$

integrirt. $X$ und $X'$ können beliebige Functionen sein. Sind dieselben ganz, so ist es für die Einfachheit der Rechnung wesentlich, die Ergän-

zungsintegrale, welche ganze Functionen sind, zu bestimmen, bevor man die Gleichungen 2) nach $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ auflöst.

Diese Auflösung kommt nicht in Frage, wenn

$$\text{2a)}\qquad \left.\begin{aligned} (A+Bx)\frac{dy}{dx}+Ey+Fz+X=0 \\ (C'+D'x)\frac{dz}{dx}+E'y+F'z+X'=0 \end{aligned}\right\}$$

vorliegt. Um diese Gleichungen auf dem vorigen Wege zu integriren, multiplicire man die erste mit $C'+D'x$, die zweite mit $A+Bx$, dann erhält man Gleichungen der Form

$$\varphi\frac{dy}{dx}+p_1y+q_1z+X_1=0,\quad \varphi\frac{dz}{dx}+p_2y+q_2z+X_2=0,$$

und es ist speciell

$$\varphi=(A+Bx)(C'+D'x),$$
$$p_1=E(C'+D'x),\qquad q_1=F(C'+D'x),$$
$$p_2=E'(A+Bx),\qquad q_2=F'(A+Bx).$$

Da jetzt

$$p_1q_2-p_2q_1=(EF'-E'F)\varphi,$$

so wird die Gleichung für $\eta$ besonders einfach, nämlich

$$\varphi\eta''+(\varphi'+p_1+q_2)\eta'+\{(p'_1-\mu p'_2)+(EF'-E'F)\}\eta+\frac{X_0}{\varphi}=0,$$

und die Reduction mit Hilfe der Exponentialgrösse fällt hier weg.

Endlich sei noch erwähnt, dass auch das System

$$\text{5)}\qquad \left.\begin{aligned} (a+bx+cx^2+dx^3)\frac{dy}{dx}+(a_1+b_1x)y+(\alpha_1+\beta_1x)z+X_1=0 \\ (a+bx+cx^2+dx^3)\frac{dz}{dx}+(a_2+b_2x)y+(\alpha_2+\beta_2x)z+X_2=0 \end{aligned}\right\}$$

durch hypergeometrische Integrale befriedigt werden kann. Denn substituirt man in die Gleichungen 5)

$$x=\frac{1+\varkappa u}{u},\qquad dx=-\frac{du}{u^2},$$

so entsteht

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} &-\{au^3+bu^2(1+\varkappa u)+cu(1+\varkappa u)^2+d(1+\varkappa u)^3\}\frac{dy}{du} \\ &+\{a_1u+b_1(1+\varkappa u)\}y+\{\alpha_1u+\beta_1(1+\varkappa u)\}z+U_1 \end{aligned}\right\}=0 \\ &\left.\begin{aligned} &-\{au^3+bu^2(1+\varkappa u)+cu(1+\varkappa u)^2+d(1+\varkappa u)^3\}\frac{dz}{du} \\ &+\{a_2u+b_2(1+\varkappa u)\}y+\{\alpha_2u+\beta_2(1+\varkappa u)\}z+U_2 \end{aligned}\right\}=0 \end{aligned}\right\}.$$

Wählt man statt $\varkappa$ eine der Wurzeln der cubischen Gleichung

$$a+b\varkappa+c\varkappa^2+d\varkappa^3=0,$$

so verschwindet in den Gleichungen der Factor von $u^3$, und dann liegt wieder das früher betrachtete System 3) vor.

## Schlussbemerkung.

Durch die vorigen Untersuchungen ist gezeigt, dass sich die Supplementintegrale der linearen Differentialgleichungen in bedeutend einfacherer Weise aufschreiben lassen, als dies nach der Lagrange'schen Methode der Variation der Constanten zu erwarten stand. — Da nun das complete Integral einer nicht reducirten Differentialgleichung als das Integral einer reducirten Gleichung von höherer Ordnung angesehen werden kann, so ist nunmehr auch für die Integration gewisser linearer reducirter Gleichungen ein Vortheil gewonnen.

Nehmen wir an, es sei vorgelegt

$$1)\qquad \varphi_n(x)\,y^{(n)}+\varphi_{n-1}(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+\varphi_1(x)\,y'+\varphi_0(x)\,y=z,$$

und es bedeute $z$ das vollständige Integral der Gleichung

$$2)\qquad \psi_m(x)\,z^{(m)}+\psi_{m-1}(x)\,z^{(m-1)}+\ldots+\psi_1(x)\,z'+\psi_0(x)\,z=0.$$

Substituiren wir den Ausdruck für $z$ aus 1) in 2), so entsteht

$$3)\quad f_{(m+n)}(x)\,y^{(m+n)}+f_{(m+n-1)}(x)\,y^{(m+n-1)}+\ldots+f_1(x)\,y'+f_0(x)\,y=0.$$

Ist nun

$$y=\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2+\ldots+\alpha_n y_n$$

das vollständige Integral der reducirten Gleichung 1),

$$z=\beta_1 z_1+\beta_2 z_2+\ldots+\beta_m z_m$$

das vollständige Integral der Gleichung 2), und sind $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_m$ die zu $z_1, z_2, \ldots z_m$ gehörigen Supplemente der Gleichung 1), so ist, wie ohne Weiteres einleuchtet,

$$y=\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2+\ldots+\alpha_n y_n+\beta_1\zeta_1+\beta_2\zeta_2+\ldots+\beta_m z_m$$

das vollständige Integral der Gleichung 3). Diese Gleichung ist eine reducible und hat mit der reducirten Gleichung 1) $n$ partikuläre Integrale gemein.* — Kennt man sonach die vollständigen Integrale von 1) und 2), so kann man auch das Integral von 3) angeben. — Sollte 3) einen zweiten Theil $=X$ besitzen, so würde auch 2) ebendenselben zweiten Theil haben; man hätte dann von 2) ein Supplementintegral aufzustellen und dieses bei der Integration von 1) zu berücksichtigen.

Analoge Bemerkungen gelten für lineare simultane Differentialgleichungen. Man kann auch hier die Integration gewisser Differentialgleichungen höherer Ordnung abhängig machen von nicht reducirten Gleichungen niederer Ordnung.

---

* Vergl. Königsberger, Allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen, 1882, § 4.

Sei vorgelegt

$$\left.\begin{array}{ll}\text{a)} & \dfrac{dy}{dx}+p_1y+q_1z=\eta \\ \text{b)} & \dfrac{dz}{dx}+p_2y+q_2z=\zeta\end{array}\right\},$$

und seien $\eta$ und $\zeta$ Functionen von $x$, definirt durch die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll}\alpha) & \dfrac{d\eta}{dx}+m_1\eta+n_1\zeta=0 \\ \beta) & \dfrac{d\zeta}{dx}+m_2\eta+n_2\zeta=0\end{array}\right\}.$$

Substituirt man die Ausdrücke für $\eta$ und $\zeta$ aus a) und b) in $\alpha$) und $\beta$), so entsteht

$$\left.\begin{array}{ll}\text{A)} & \dfrac{d^2y}{dx^2}+M_1\dfrac{dy}{dx}+N_1\dfrac{dz}{dx}+P_1y+Q_1z=0 \\ \text{B)} & \dfrac{d^2z}{dx^2}+M_2\dfrac{dy}{dx}+N_2\dfrac{dz}{dx}+P_2y+Q_2z=0\end{array}\right\}.$$

Ist nun

$$y=a_1f_1+a_2f_2,\quad z=a_1F_1+a_2F_2$$

das vollständige Integralsystem der reducirten Gleichungen a), b),

$$\eta=\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2,\quad \zeta=\alpha_1\psi_1+\alpha_2\psi_2$$

das vollständige Integralsystem der Gleichungen $\alpha$), $\beta$), so besitzen die nicht reducirten Gleichungen a), b) ein Integralsystem von folgender Gestalt:

$$y=a_1f_1+a_2f_2+\alpha_1\chi_1+\alpha_2\chi_2,\quad z=a_1F_1+a_2F_2+\alpha_1\vartheta_1+\alpha_2\vartheta_2,$$

und dieses ist zugleich das vollständige Integralsystem der Gleichungen (A, B). Das System (A, B) hat mit dem reducirten System (a, b) ein Integralsystem erster Ordnung gemein; es ist also ein reducibles. — Sollten die Gleichungen A) und B) zweite Theile besitzen, so kommen dieselben zweiten Theile den Gleichungen $\alpha$) und $\beta$) zu. Man hätte in diesem Falle noch die beiden Supplementintegrale der Gleichungen $\alpha$) und $\beta$) zu bilden und diese bei der Integration des Systems (a, b) zu berücksichtigen. — Liegen Systeme mit beliebig viel linearen Gleichungen von beliebig hoher Ordnung vor, so ändert sich in der Art und Weise der Schlüsse nichts Wesentliches.

---

# V.

## Zur Resultantenbildung.

Von

Prof. Dr. C. Reuschle

in Stuttgart.

---

Neben der Weiterentwickelung der mathematischen Theorien steht als Factor von kaum geringerer Bedeutung die Nothwendigkeit, bereits bekannte Probleme in einfacherer und rationellerer Weise zu gestalten, und um so wichtiger wird das sein, je fundamentaler das betreffende Problem ist.

Eine derartige Aufgabe ist die Aufstellung der Simultanitätsbedingung oder Bedingung einer gemeinschaftlichen Wurzel *(Eliminante, Resultante)* für zwei beliebige Gleichungen mit einer Veränderlichen.

Die Euler'sche* und die *dialytische* Methode von Sylvester* liefern beide die Resultante in Form derselben Determinante, die man etwa als *„Rückungsdeterminante"* [vergl. Determinante 4)] bezeichnen könnte. Während aber die Herleitung dieser Determinante nach Euler's Methode ziemlich umständlich ist, lässt die *dialytische* Methode an Klarheit und Durchsichtigkeit Nichts zu wünschen übrig, sie trägt den Stempel absoluter Einfachheit.

Dagegen ist es wiederum ein Vorzug der Euler'schen Methode, dass sie sich unmittelbar darauf anwenden lässt, die Bedingungen zweier und mehrerer gemeinschaftlicher Wurzeln beider Gleichungen zu finden, welche Bedingungen durch eine verschwindende *„Rückungsmatrix"* sich ausdrücken lassen.

Die zweite wichtige Form der Resultante ist die Bézout'sche; um diese für zwei gleichgradige Gleichungen, z. B. für

$$1)\qquad \begin{cases} a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0, \\ b_0x^4 + b_1x^3 + b_2x^2 + b_3x + b_4 = 0, \end{cases}$$

zu erhalten, multiplicirt man der Reihe nach**

---

* Vergl. etwa Salmon, Introductory lessons to the modern higher Algebra, Dublin 1876, S. 73 und 74.

** Vergl. Salmon, ibid. S. 75.

die erste Gleichung mit:

1. $b_0$,
2. $b_0 x + b_1$,
3. $b_0 x^2 + b_1 x + b_2$,
4. $b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3$,

die zweite Gleichung mit:

1. $a_0$,
2. $a_0 x + a_1$,
3. $a_0 x^2 + a_1 x + a_2$,
4. $a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$,

und subtrahirt die jedesmal erhaltenen zwei Gleichungen, wodurch man vier cubische Gleichungen [s. die Gleichungen 2)] erhält, aus denen man unmittelbar die Resultante der zwei gegebenen Gleichungen 1) in der Bézout-schen Form 3) anschreiben kann.

Diese Herleitung macht aber den Eindruck einer künstlichen, man sieht nicht *a priori* ein, warum man so verfährt; der Methode fehlt die genetische Natur. Es lassen sich aber durch eine leichte Modification diese vier cubischen Gleichungen [allgemein für zwei Gleichungen $n^{\text{ten}}$ Grades die $n$ Gleichungen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades] in folgender einfacher, rationeller und auch zugleich principiell neuer Weise gewinnen.

Schreibt man nämlich die Gleichungen 1) in den vier Formen

$$1_1)\quad \begin{cases} a_0 x^4 + (a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4) = 0, \\ b_0 x^4 + (b_1 x^3 + b_2 x^2 + b_3 x + b_4) = 0; \end{cases}$$

$$1_2)\quad \begin{cases} (a_0 x + a_1) x^3 + (a_2 x^2 + a_3 x + a_4) = 0, \\ (b_0 x + b_1) x^3 + (b_2 x^2 + b_3 x + b_4) = 0; \end{cases}$$

$$1_3)\quad \begin{cases} (a_0 x^2 + a_1 x + a_2) x^2 + (a_3 x + a_4) = 0, \\ (b_0 x^2 + b_1 x + b_2) x^2 + (b_3 x + b_4) = 0; \end{cases}$$

$$1_4)\quad \begin{cases} (a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3) x + a_4 = 0, \\ (b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3) x + b_4 = 0, \end{cases}$$

so erhält man durch Elimination des *expliciten* $x^4$ aus $1_1$), des *expliciten* $x^3$ aus $1_2$), des *expliciten* $x^2$ aus $1_3$) und des *expliciten* $x$ aus $1_4$) die vier cubischen Gleichungen

$$2)\quad \begin{cases} (a_0 b_1) x^3 + (a_0 b_2)\, x^2 + (a_0 b_3)\, x + (a_0 b_4) = 0, \\ (a_0 b_2) x^3 + [(a_0 b_3) + (a_1 b_2)] x^2 + [(a_0 b_4) + (a_1 b_3)] x + (a_1 b_4) = 0, \\ (a_0 b_3) x^3 + [(a_0 b_4) + (a_1 b_3)] x^2 + [(a_1 b_4) + (a_2 b_3)] x + (a_2 b_4) = 0, \\ (a_0 b_4) x^3 + (a_1 b_4)\, x^2 + (a_2 b_4)\, x + (a_3 b_4) = 0, \end{cases}$$

welche simultan sein müssen, wenn die gegebenen Gleichungen 1) simultan sind. Hieraus ergiebt sich sofort die Resultante in Form der Bézout'schen Determinante:

$$3)\quad \begin{vmatrix} (a_0 b_1) & (a_0 b_2) & (a_0 b_3) & (a_0 b_4) \\ (a_0 b_2) & (a_0 b_3) + (a_1 b_2) & (a_0 b_4) + (a_1 b_3) & (a_1 b_4) \\ (a_0 b_3) & (a_0 b_4) + (a_1 b_3) & (a_1 b_4) + (a_2 b_3) & (a_2 b_4) \\ (a_0 b_4) & (a_1 b_4) & (a_2 b_4) & (a_3 b_4) \end{vmatrix} = 0.$$

Man beachte, dass im Vorstehenden Alles geschrieben steht, was zur vollständigen genetischen Entwicklung der Resultante nöthig ist. Aus den

Gleichungssystemen $1_1)$ bis $1_4)$ lassen sich die vier cubischen Gleichungen unmittelbar „mit dem Auge ablesen"; denn aus $1_2)$ z. B. liefert die Elimination des expliciten $x^3$ zunächst

$$\begin{vmatrix} a_0 x + a_1 & a_2 x^2 + a_3 x + a_4 \\ b_0 x + b_1 & b_2 x^2 + b_3 x + b_4 \end{vmatrix} = 0;$$

es ist aber gar nicht nothwendig, diese Determinante anzuschreiben, da sie unmittelbar in den Gleichungen $1_2)$ steht und nur mit dem Auge festgehalten zu werden braucht. Die Zerlegung dieser Determinante in

$$(a_0 b_2) x^2 + (a_0 b_3) x^2 + (a_0 b_4) x \\ + (a_1 b_2) x^2 + (a_1 b_3) x + (a_1 b_4)$$

lässt sich nach dem Zerlegungssatz der Determinanten ebenfalls lediglich mit dem Auge vornehmen. Hat man die Berechnung der Resultante nach dieser Methode einmal vorgenommen, so kann man, die Anschreibung der Gleichungen 2) umgehend, die Bézout'sche Determinante 3) direct aus dem System $1_1)$ bis $1_4)$ ablesen; ja es ist nicht einmal nöthig, dieses System vollständig anzuschreiben, man braucht sich nur die Klammern in den Gleichungen 1) angebracht zu denken, was für $1_1)$ und $1_4)$ gar keine Schwierigkeit hat, so dass man allenfalls nur die Systeme $1_2)$ und $1_3)$ zu schreiben hätte.

Die vorstehende Methode schliesst sich auf's Engste der bekannten elementaren Methode* an, gemäss der man, um $x$ aus zwei Gleichungen $n^{\text{ten}}$ Grades zu eliminiren, erst das $x^n$-Glied, dann das Absolutglied eliminirt, wodurch man zwei Gleichungen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades erhält, mit denen man in derselben Weise verfährt u. s. w. Man könnte letztere Methode die *Methode der successiven Elimination* nennen. Für zwei quadratische Gleichungen ist dieselbe mit der obigen identisch. Aber schon für zwei cubische, und noch mehr für zwei höhere Gleichungen liefert die *Methode der successiven Elimination* — abgesehen von der viel grösseren Weitläufigkeit der Rechnung — bekanntlich überschüssige Factoren, während die *Bézout'sche Methode* und die oben gegebene Modification derselben *(Methode der Elimination expliciter Potenzen)* die Resultante frei von überschüssigen Factoren giebt.

Um sodann die Resultante für zwei ungleichgradige Gleichungen zu finden, combinirt man die *Methode der Elimination expliciter Potenzen* mit der *dialytischen Methode von Sylvester,* indem man für zwei Gleichungen $m^{\text{ten}}$ und $n^{\text{ten}}$ Grades $(m > n)$ die $n$ ersten Reihen der Resultante nach der ersteren Methode mit Berücksichtigung der Null seienden Coefficienten anschreibt; die $(m-n)$ übrigen Horizontalreihen sind die nach der dialytischen Methode angeschriebenen Coefficienten der Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades [vergl. die Rückungsdeterminante 4)].

* Vergl. Salmon, ibid. S. 71 und 72.

Bei dieser Gelegenheit erwähne ich noch, dass ich in den Lehrbüchern* der Determinanten einen directen und einfachen Nachweis der Identität der Resultante in der Bézout'schen und Sylvester'schen Form vermisse. Letztere lässt sich durch eine einfache Umformung auf erstere zurückführen. Für zwei cubische Gleichungen, z. B.

$$\begin{cases} a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0, \\ b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3 = 0, \end{cases}$$

ist die Resultante in der Sylvester'schen Form *(Rückungsdeterminante):*

$$4)\quad \begin{array}{r} -b_0 \\ \\ \\ a_0 \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & & \\ & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \\ & & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & & \\ & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \\ & & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

(die leeren Stellen sind mit Nullen ausgefüllt zu denken);

addirt man die mit $-b_0$ multiplicirte erste zu der mit $a_0$ multiplicirten vierten Horizontalreihe, so reducirt sich die sechsreihige Determinante auf die fünfreihige:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \\ & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ (a_0 b_1) & (a_0 b_2) & (a_0 b_3) & & \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \\ & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ b_3 \\ \\ \\ -a_3 \end{array} ;$$

addirt man in dieser Determinante die mit $-a_3$ multiplicirte fünfte zu der mit $b_3$ multiplicirten zweiten Horizontalreihe, so erhält man:

$$\begin{array}{r} -b_0 \\ \\ \\ a_0 \end{array} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ & (a_0 b_3) & (a_1 b_3) & (a_2 b_3) \\ (a_0 b_1) & (a_0 b_2) & (a_0 b_3) & \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} -b_1 \\ \\ \\ a_1 \end{array} ;$$

addirt man endlich hier die mit $-b_0$ multiplicirte erste zu der mit $a_0$ multiplicirten vierten, ferner die mit $a_1$ multiplicirte vierte und die mit $-b_1$ multiplicirte erste zur dritten Horizontalreihe, so erhält man, abgesehen vom Vorzeichen, die Bézout'sche Resultante:

$$\begin{vmatrix} (a_0 b_3) & (a_1 b_3) & (a_2 b_3) \\ (a_0 b_2) & (a_0 b_3) + (a_1 b_2) & (a_1 b_3) \\ (a_0 b_1) & (a_0 b_2) & (a_0 b_3) \end{vmatrix}.$$

Man beachte, dass diese Umformung durch successive Reduction der Determinante auf eine Determinante nächst niedrigeren Grades (zugleich

* Eine von Brill herrührende, in Dölp's Lehrbuch über Determinanten, 1874, S. 90 mitgetheilte, hierauf bezügliche Transformation ist künstlich und wesentlich umständlicher als die hier gegebene.

ein ganz schönes Beispiel für Graderniedrigung von Determinanten) logisch geboten ist, wie überhaupt angeführt werden darf, dass eine vollständig rationelle Umformung einer Determinante stets den Stempel der logischen Nothwendigkeit an sich tragen muss, was in einer Vorlesung über Determinantentheorie den Studirenden nicht oft genug eingeschärft werden kann. Soll z. B. ein Buchstabenausdruck umgeformt werden, der ursprünglich nicht in Form einer Determinante vorliegt, sich aber leicht als solche darstellen lässt, so wird die Transformation in den meisten Fällen natürlicher, durchsichtiger und logisch bindender sich ergeben, wenn man dieselbe an der Determinante, statt an dem ursprünglichen Ausdruck vornimmt.

Stuttgart, im September 1884.

---

# Kleinere Mittheilungen.

---

## IV. Geometrische Beweise des Satzes von der Minimalablenkung im Prisma.

(Hierzu Taf. IV Fig. 25 u. 26.)

### Beweis 1.

Geometrisches. Es sei $M$ (Fig. 25) der Mittelpunkt eines Kreises, $B$ ein Punkt ausserhalb desselben; die Verbindungslinie $MB$ schneide den zwischen $M$ und $B$ liegenden Theil der Peripherie in $A$; $E_2$, $E$, $E_1$ seien von $A$ aus aufeinander folgende Punkte der Peripherie zwischen den Berührungspunkten der von $B$ aus möglichen Tangenten, und es sei $\angle E_1BE = EBE_2$; dann ist in den Dreiecken $ME_1B$, $MEB$, $ME_2B$ $BE_1 > BE > BE_2$. Ist $X$ ein Punkt der Verlängerung von $E_2E$ über $E$ hinaus, so ist $\angle XEB > EE_2B$, mithin, da $E_1$ auf der von $B$ abgewandten Seite der Geraden $EX$ liegt, um so mehr $\angle E_1EB > EE_2B$, und beide Winkel sind stumpf. Legt man nun $\triangle EBE_2$ mit dem gleichen Winkel, ohne es umzuklappen, auf $\triangle E_1BE$, etwa in die Lage $\varepsilon B \varepsilon_2$, und zieht durh $\varepsilon_2$ zu $EE_1$ die Parallele $\varepsilon_2 D$, so ist $E_1E > D\varepsilon_2$, weil $E_1E : D\varepsilon_2 = EB : \varepsilon_2 B$, und $D\varepsilon_2 > \varepsilon\varepsilon_2$, weil $\angle D\varepsilon_2 B > \varepsilon\varepsilon_2 B$ und beide stumpf sind. Weil hiernach Sehne $E_1E > EE_2$ ist, so folgt, dass Centriwinkel $E_1ME > EME_2$ ist.

Physikalisches. Ist $2b$ der brechende Winkel eines Prismas, $e_1$ und $e_2$ Eintritts- und Austrittswinkel, $b_1$ und $b_2$ die im Innern gegen die Ebenenlothe gebildeten Winkel eines Lichtstrahles, der in der zur brechenden Kante normalen Ebene hindurchgeht, so ist $b_1 + b_2 = 2b$, also $b_1 - b = b - b_2$. Die Ablenkung des Strahles ist $\alpha = e_1 - b_1 + e_2 - b_2$. $b$ ist auch der Winkel, welchen der gleichschenklig durchfallende Strahl im Innern gegen die Lothe bildet.

Sind nun in der vorigen Figur $\angle E_1BM = b_1$, $EBM = b$, $E_2BM = b_2$, $E_1BE = EBE_2 = b_1 - b = b - b_2$, und ist das Verhältniss $\frac{MB}{MA}$ gleich dem Brechungsindex $n$ des Prismas gewählt, so haben wegen des constanten Sinusverhältnisses die bei $E_1EE_2$ liegenden Aussenwinkel der Dreiecke $ME_1B$, $MEB$, $ME_2B$ die Grössen $e_1 e e_2$, und es ist $\angle E_1MB = e_1 - b_1$, $EMB = e - b$, $E_2MB = e_2 - b_2$; $\angle E_1ME = (e_1 - b_1) - (e - b)$, $EME_2 = (e - b) - (e_2 - b_2)$. Demnach ist nach obigem Satze $(e_1 - b_1) - (e - b) > (e - b) - (e_2 - b_2)$ oder $e_1 - b_2 + e_2 - b_2 > 2(e - b)$, d. h.: die Ablen-

kung jedes Strahles ist grösser als die des gleichschenklig durchfallenden.

**Beweis 2.**

Seien, wie oben, $e_1, b_1, b_2, e_2$ (Fig. 26) die Winkelwerthe für einen beliebig durchfallenden Strahl, $e, b, b, e$ für den gleichschenkligen. Ist $e_1 > e$, so ist $b_1 > b$, $b_2 < b$, $e_2 < e$, wegen des Sinusgesetzes und wegen $b_1 + b_2 = 2b$, d. h.: tritt ein Strahl $EBFG$ mit grösserem Winkel* ein, als der gleichschenklige $ABCD$, so tritt er mit kleinerem aus. Nun kann aber ein Lichtstrahl auch den umgekehrten Weg $GFRE$ machen, also mit $e_2$ ein- und mit $e_1$ austreten. Denke ich mir einen solchen Strahl, Eintrittswinkel $e_2$, Austrittswinkel $e_1$, an den Punkt $B$ verlegt, $HBJK$, so hat dieser Strahl dieselbe Ablenkung wie der Strahl $EBFG$, da die Ablenkung $\alpha = e_1 - b_1 + e_2 - b_2 = e_1 + e_2 - 2b$ ausser von dem brechenden Winkel nur von der Summe $e_1 + e_2$ abhängt. Da also auf beiden Seiten des gleichschenkligen Strahles die Ablenkungswerthe paarweise gleich auftreten, so muss die Ablenkung des gleichschenklig durchfallenden Strahles selbst ein Maximum oder Minimum sein.

Eine Entscheidung zwischen den beiden Möglichkeiten liefert dieser Beweis nicht; indessen dürfte er bei seiner Einfachheit vielleicht auch so nicht ohne Nutzen sein, da ja auch die praktischen Benutzungen des gleichschenklig durchfallenden Strahles meist eine solche Entscheidung nicht erfordern, sondern sich nur auf die hier bewiesene Thatsache des ausgezeichneten Werthes stützen.

Breslau. HEINRICH VOGT.

---

## V. Ueber collineare räumliche Systeme.

Verschiedene Lehrbücher der darstellenden Geometrie enthalten den Satz:** Wenn von drei räumlichen Systemen je zwei mit einander centrisch collinear sind, so liegen die drei Collineationscentra in einer geraden Linie.

Dieser Satz bedarf einer Ergänzung, da die Lage der Systeme obiger Eigenschaft eine viel speciellere sein muss, wie in Folgendem gezeigt werden soll.

Des Weiteren werden wir uns beschäftigen mit der Herstellung eines Systems, welches zu zwei beliebigen anderen collinearen Systemen in centrisch collinearer Lage ist. Damit ist dann, mit Rücksicht auf die Arbeiten des Herrn Hauck,*** der geometrische Beweis erbracht, dass in zwei

---

* Nach derselben Seite des Lothes positiv gerechnet, nach der andern negativ.

** Zuerst wohl bei Baltzer, Elemente d. M. Bd. II, 5. Aufl., S. 194, § 13 Anm. Der nicht richtige Satz 13, aus dem der obige gefolgert wird, geht auf Magnus, Analyt.-geometr. Aufg. I, S. 51 zurück.

*** „Grundzüge einer allgem. axonom. Theorie der darst. Persp.“, diese Ztschr. XXI, S. 402 flgg., insbes. 407; „Ueber Gleichstimmigkeit und Ungleichstimmigkeit der räumlichen Collineation“, ibid. Bd. XXIV S. 381.

räumlichen Systemen die entsprechenden Gebilde entweder sämmtlich gleichstimmig oder sämmtlich ungleichstimmig sind, mit anderen Worten, dass die Eintheilung der räumlichen Collineationen in gleichstimmige und ungleichstimmige einen Sinn hat. Schliesslich geben wir ein einfaches Kriterium für die Gleichstimmigkeit von zwei Systemen, welche durch fünf Paare entsprechender Elemente definirt sind.

Drei räumliche Systeme $P_1$, $P_2$, $P_3$ mögen paarweise in centrisch collinearer Lage für die Collineationsebenen $\Sigma_{12}$, $\Sigma_{23}$, $\Sigma_{31}$ und die Collineationscentra $C_{12}$, $C_{23}$, $C_{31}$ sein, d. h. $P_1$ und $P_2$ collinear in Bezug auf $\Sigma_{12}$ und $C_{12}$ etc. Denken wir uns einen Punkt $A$ der Schnittlinie von $\Sigma_{12}$ und $\Sigma_{23}$. Dann entspricht dieser Punkt in $P_1$ und $P_2$ sich selbst, weil er auf $\Sigma_{12}$, und in $P_2$, $P_3$ sich selbst, weil er auf $\Sigma_{23}$ liegt, d. h. er entspricht auch in $P_1$ und $P_3$ sich selbst und gehört folglich auch $\Sigma_{13}$ an. Daraus ergiebt sich, dass die Collineationsebenen mindestens eine Gerade $g$ gemein haben müssen. Ebenso findet man, dass eine beliebige Ebene $\alpha$ des Büschels $\overline{C_{12}C_{23}}$ auch den Punkt $C_{31}$ enthält, also die Collineationscentra auf einer Geraden $g^*$ liegen.

Seien nun $m_1$, $m_2$, $m_3$ drei sich entsprechende Gerade. Dann trifft jede von ihnen die beiden anderen und sie liegen daher alle drei entweder in einer Ebene durch $g^*$ oder gehen durch einen Punkt auf $g$. Mithin lassen sich überhaupt nur zu solchen Geraden entsprechende construiren, welche wenigstens eine der beiden, $g$ oder $g^*$, schneiden. Folglich:

Drei räumliche Systeme können nicht paarweise centrisch collinear sein bei getrennten Collineationsebenen und getrennten Collineationscentren.

Man erkennt vielmehr die Richtigkeit des folgenden Satzes: Sind drei räumliche Systeme $P_1$, $P_2$, $P_3$ paarweise centrisch collinear, so sind entweder die Collineationsebenen vereinigt und dann liegen die Centra auf einer Geraden $g^*$, oder — die Centra sind vereinigt und dann gehen die Collineationsebenen durch eine Gerade $g$. In beiden Fällen sind auch die Umkehrungen richtig. Beide Möglichkeiten sind in der speciellsten Zuordnung enthalten, bei der Collineationsebene und Collineationscentrum allen Systemen gemeinsam ist.

Im Falle gemeinsamer Collineationsebene schneiden sich je drei entsprechende Gerade in einem Punkte von $\Sigma_{123}$ und die Ebene von je zweien enthält das zugehörige Centrum; im andern Falle liegen drei solche Gerade in einer Ebene des Bündels $C_{123}$ und je zwei von ihnen schneiden sich auf der zugehörigen Collineationsebene. Die Beziehung ist eine in sich widerspruchsfreie geworden.

Durch Betrachtung der Collineationen in drei sich entsprechenden ebenen Systemen $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, $\Sigma_3$ der vorliegenden Räume, deren Träger sich im

ersten Falle in einer Geraden von $\Sigma_{123}$, im letzten in einem Punkte von $g$ treffen, ergiebt sich noch:

Wenn drei ebene Systeme paarweise centrisch collinear sind und ihre Collineationsaxen gemein haben, so liegen ihre Collineationscentra auf einer Geraden und umgekehrt. Wenn drei ebene Systeme paarweise centrisch collinear sind und ihre Collineationscentra gemein haben, so gehen die Collineationsaxen durch einen Punkt. Allgemeinere Lagen giebt es nicht.

Der oben angeführten speciellsten Zuordnung der Räume entspricht hier die Vereinigung der Axen und Centren, die Systeme sind Schnitte eines Bündels mit drei Ebenen eines Büschels.

Die dualen Sätze über Strahlenbündel sind minder wichtig und übrigens leicht auszusprechen.

Die abgeleiteten Sätze über räumliche Systeme lassen noch eine etwas andere, wenn man will, allgemeinere Ausdrucksweise zu.

Gegeben seien $P_1$ und $P_2$, welche beide centrisch collinear $P_3$ für die nämliche Ebene $\Sigma$ und die Centra $C_{13}$ und $C_{23}$ sind. Dann entspricht sich jeder Punkt von $\Sigma$ selbst in allen drei Systemen, insbesondere im ersten und zweiten, d. h. auch diese sind centrisch collinear, und man hat mit Rücksicht auf das Frühere die erste Hälfte des folgenden Doppelsatzes, dessen andere Hälfte aus dem Dualitätsprincip folgt:

Sind zwei räumliche Systeme centrisch collinear einem dritten für

| | |
|---|---|
| dieselbe Collineationsebene, aber verschiedene Collineationscentra, | dasselbe Collineationscentrum, aber verschiedene Collineationsebenen, |

so sind sie paarweise centrisch collinear und

| | |
|---|---|
| die Collineationscentra liegen auf | die Collineationsebenen schneiden sich in |

einer Geraden. Diese Lagen sind die allgemeinsten.

Es seien jetzt zwei Systeme $P_1$ und $P_2$ gegeben, welche centrisch collinear einem dritten $P_3$ sind, und zwar mögen weder die Centra, noch die Ebenen der Collineation vereinigt sein. Dann sind die Räume unter sich collinear, aber $P_1$ und $P_2$ werden im Allgemeinen nicht in centrisch collineare Lage gebracht werden können.

Die Centra seien $C_{13}$ und $C_{23}$, ihre Verbindungslinie heisse $g^*$, die Ebenen $\Sigma_{13}$ und $\Sigma_{23}$, ihre Schnittlinie heisse $g$. Dann entspricht jeder Punkt von $g$ und jede Ebene von $g^*$ sich selbst in allen drei Systemen. Folglich: Sind zwei räumliche Systeme centrisch collinear einem dritten, so haben sie ein gerades Gebilde und einen Ebenenbüschel entsprechend gemein. Wir beweisen nun: Haben zwei collineare räumliche Systeme ein gerades Gebilde entsprechend gemein, so haben sie auch einen Ebenenbüschel entsprechend gemein. Man kann

auf $\infty^3$ verschiedene Weisen diese Lage erzielen und es lässt sich dann noch auf $\infty^2$ verschiedene Arten ein System construiren, welches zu beiden centrisch collinear ist.

Folglich lässt die Aufgabe, zu zwei räumlichen Systemen ein drittes zu construiren, welches zu beiden centrisch collinear ist, $\infty^5$ Lösungen zu.*

Man wähle zum Beweise in den gegebenen räumlichen Systemen zwei sich entsprechende ebene Systeme, welche nicht affin sind, aus und bringe eines der beiden Paare ihrer sich entsprechenden congruenten geraden Gebilde zur Deckung; ihr gemeinschaftlicher Träger heisse $g$. Das ist auf $\infty^3$ verschiedene Arten möglich. Die beiden projectivischen Ebenenbüschel der Axe $g$ haben zwei Doppelelemente (reell oder imaginär) und jedes derselben ist Träger von centrisch collinearen ebenen Systemen, deren Collineationsaxe natürlich $g$ ist. Die Verbindungslinie der Collineationscentra heisse $g^*$; sie entspricht sich selbst als Verbindungslinie zweier sich selbst entsprechender Punkte. Aber auch jede Ebene des Büschels $g^*$ entspricht sich selbst, da sie einen Punkt von $g$ enthält. Damit ist der erste Theil unseres Satzes bewiesen.

Die Elemente: $g^*$ mit den beiden auf ihr liegenden Doppelpunkten $A_1 \cdot A_2$ und $B_1 \cdot B_2$, und $g$ mit den durch sie (und $A_1 \cdot A_2$ bez. $B_1 \cdot B_2$) gehenden Doppelebenen $\alpha_1 \alpha_2$ und $\beta_1 \beta_2$ repräsentiren vier Bestimmungsstücke**, man muss also noch ein Elementenpaar zur vollständigen Bestimmung geben, entweder zwei Punkte $P_1$, $P_2$ in einer Ebene von $g^*$, oder zwei Ebenen $\Pi_1$, $\Pi_2$ durch einen Punkt von $g$. Wir nehmen etwa das Erstere an und betrachten zunächst die Collineation in der sich selbst entsprechenden Ebene $P_1 P_2 g^*$. Von dieser kennen wir ausser $P_1$ und $P_2$ die Doppelelemente $A_1 \cdot A_2$, $B_1 \cdot B_2$ und $S_1 \cdot S_2$ auf $g$. Zur Construction von $P_3$ lege man durch $S_1 \cdot S_2$ zwei willkürliche gerade Gebilde $u_1$ und $u_2$, $u_1$ perspectivisch dem Büschel $P_1$, $u_2$ perspectivisch $P_2$. Dann ist auch $u_1$ perspectivisch $u_2$ für ein Centrum $P_3$. Nimmt man nun diesen Punkt als den zu $P_1$ und $P_2$ bez. entsprechenden in $P_3$, ferner $u_1$ und $u_2$ bez. als Collineationsaxen $s_{13}$ und $s_{23}$, so bestimmen die Geraden $\overline{P_1 P_3}$ und $\overline{P_2 P_3}$ auf $g^*$ zwei Punkte $C_{13}$ und $C_{23}$, die gesuchten Collineationscentra. Sofort hat man dann in den Verbindungsebenen von $g$ mit $s_{13}$ und $s_{23}$ die Collineationsebenen $\Sigma_{13}$ und $\Sigma_{23}$. Da nach der Wahl der Geraden $s_{13}$ und $s_{23}$ alles bestimmt ist, so hat man $\infty^2$ Möglichkeiten.

Am einfachsten wird die Construction, wenn man, was ersichtlich zulässig, als Collineationsebenen $\alpha_1 \alpha_2$ und $\beta_1 \beta_2$, als Centra $A_1 \cdot A_2$ und $B_1 \cdot B_2$ wählt.

Wir geben schliesslich noch an, wie man auf einfache Weise erkennen kann, ob zwei durch fünf Paare zugeordneter Elemente definirte Räume

* Vergl. Hauck in der zweiten der citirten Arbeiten.

** Vergl. Reye, Geometrie der Lage, II. Thl. 3. Aufl., S. 127.

gleich- oder ungleichstimmig sind, und schicken hierbei folgende Bemerkung voraus.

Zwei Tetraeder können, so lange nicht gesagt ist, welche Strecken — die endlichen oder unendlichen — auf ihren Seitenkanten sich entsprechen sollen, stets als gleich- oder ungleichstimmig betrachtet werden.

Vier Punkte bestimmen in diesem Sinne acht Tetraeder, die sich in zwei Gruppen theilen. Die Tetraeder einer jeden Gruppe sind unter sich gleichstimmig, je zwei Tetraeder verschiedener Gruppen sind ungleichstimmig. Ein endliches Tetraeder ist z. B. ungleichstimmig mit jedem der vier Ergänzungstetraeder mit endlichem Dreieck, oder, was dasselbe ist, drei sich durch's Unendliche ziehenden Kanten einer und derselben Ecke, — hingegen gleichstimmig mit den drei übrigen, bei denen zwei Paare Gegenseiten von der unendlich fernen Ebene getroffen werden. Solche acht Tetraeder enthalten die sämmtlichen Punkte des Raumes.

Sind nun die Räume erstens gegeben durch fünf Paare entsprechender Punkte, so nehme man beliebige vier derselben und bilde in jedem Raume dasjenige Tetraeder, welches den fünften Punkt enthält. Diese müssen dann einander entsprechen, da die Zuordnung eine stetige ist, und die Gleich- oder Ungleichstimmigkeit der Tetraeder bildet daher das Kriterium für dieselbe Eigenschaft der Räume.

Sind zweitens fünf Ebenenpaare gegeben, so nehme man beliebige vier derselben und bilde in jedem Raume dasjenige Tetraeder, dessen Kantenstrecken die fünfte Ebene nicht schneiden. Dann hat man ebenfalls entsprechende Tetraeder und dasselbe Kriterium wie vorhin.

Für die Anschauung ist es nun keineswegs gleichgiltig, ob man es mit endlichen Gebilden oder solchen zu thun hat, deren Theile im Unendlichen zusammenhängen, und daher mag die Bemerkung von Nutzen sein, dass bei Berücksichtigung des oben über den Sinn von Tetraedern Gesagten die Betrachtung endlicher Tetraeder ausreicht, so lange nicht einige der gegebenen Elemente selbst im Unendlichen liegen, welche Annahme übrigens durchaus keine Schwierigkeiten bietet.

Hannover, den 1. September 1884. Prof. Dr. C. Rodenberg.

---

## VI. Weitere Bemerkungen über den Zusammenhang einer Steiner'schen Aufgabe mit der Hexaederconfiguration.

In einer Note im 5. Hefte des XXIX. Jahrganges dieser Zeitschrift habe ich gezeigt, dass die acht Kreise, welche vier gegebene Kreise unter einerlei Winkel schneiden, in Verbindung mit den vier Kreisen, welche je drei der gegebenen orthogonal schneiden, als Elemente des ebenen Kreissystems betrachtet, die bekannte Hexaederconfiguration $(12_6, 16_3)$ bilden.

Eine Bemerkung des Herrn Mehmke in dessen Inauguraldissertation: Anwendung der Grassmann'schen Ausdehnungslehre auf die Geometrie der Kreise in der Ebene, veranlasst mich, noch einmal auf den erwähnten Gegenstand zurückzukommen. Herr Mehmke sagt auf S. 47:

„Wenn man auf die Fläche $F$ als „absolute Fläche“ oder Fundamentalfläche eine projectivische Maassbestimmung gründet, so wird bis auf eine Constante die Entfernung zweier Punkte im Raume gleich dem Bogen des Winkels, welchen die jenen Punkten zugeordneten Kreise in der Ebene einschliessen.“

Versteht man unter $F$ die Abbildungskugel, welche die eindeutige Beziehung zwischen den Kreisen einer Ebene und den Punkten des Raumes vermittelt,* so gewinnt nun im Lichte projectivischer Maassbestimmung die Geometrie der Kreise in der Ebene nicht wenig an Durchsichtigkeit. Indem wir besonders ein Corollar des oben citirten Satzes betonen: Allen Punktepaaren im Raume, welche „gleiche“** Strecken begrenzen, entsprechen im Kreissystem Kreispaare, welche sich unter gleichen Winkeln schneiden — erkennen wir die Steiner'sche Aufgabe: diejenigen Kreise zu finden, welche vier gegebene Kreise unter einerlei Winkel treffen, als im Wesentlichen identisch mit der andern: die „Mittelpunkte“ derjenigen „Kugeln“ zu finden, welche durch vier nicht in einer Ebene liegende Punkte hindurchgehen. Zahl und Gruppirung der Lösungen der Steiner'schen Aufgabe sind das unmittelbare Bild der Zahl und Gruppirung jener „Kugeln“ und ihrer „Mittelpunkte“ im Raume.

Bevor wir zur Construction der letzteren schreiten, wollen wir etwas näher auf die oben behauptete Correspondenz zwischen Winkelgleichheit und Strecken-„gleichheit“ eingehen.

Auf eine Fläche $F$ zweiten Grades eine projectivische Maassbestimmung gründen***, heisst:

1. die durch zwei Punktepaare $X$ und $Y$, $X'$ und $Y'$ — deren Verbindungslinien $F$ bezw. in $Z$ und $T$, $Z'$ und $T'$ treffen — begrenzten Strecken „gleich“ nennen, sobald
$$(XYZT)\,\overline{\wedge}\,(X'Y'Z'T')$$
ist;
2. die von zwei Strahlenpaaren $x$ und $y$, $x'$ und $y'$ — aus deren Ebenen an $F$ bezw. die Tangentenpaare $z$ und $t$, $z'$ und $t'$ gelegt werden können — eingeschlossenen Winkel „gleich“ nennen, sobald
$$(xyzt)\,\overline{\wedge}\,(x'y'z't').$$

---

* Thomae, Das ebene Kreissystem und seine Abbildung auf den Raum. Diese Zeitschrift XXIX. Jahrg. 5. Heft, XV.

** Alle Bezeichnungen für Maassbegriffe in übertragenem Sinne mögen fernerhin durch Anführungsstriche gekennzeichnet werden.

*** Klein, Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie. Math. Annalen, Bd. IV S. 573.

Setzt man nun fest, dass der von zwei Ebenen $\xi$, $\eta$ eingeschlossene Flächenwinkel durch den Linienwinkel gemessen wird, welcher entsteht, wenn man durch die Polare der Schnittlinie $\xi\eta$ in Bezug auf $F$ eine beliebige Ebene legt, so folgt, dass die von zwei Ebenenpaaren $\xi$ und $\eta$, $\xi'$ und $\eta'$ — aus deren Schnittlinien an $F$ bezw. die Tangentialebenenpaare $\zeta$ und $\tau$, $\zeta'$ und $\tau'$ gelegt werden können — gebildeten Flächenwinkel „gleich" zu nennen sind, sobald

$$(\xi\eta\zeta\tau)\,\overline{\wedge}\,(\xi'\eta'\zeta'\tau')$$

ist.

Nach Massgabe dieser Begriffsbestimmung kann man, unter Verwendung solcher Bezeichnungen, welche in der Euklidischen Geometrie Maassverhältnissen zukommen, jede Fläche zweiten Grades, welche $F$ längs eines Kegelschnittes berührt, eine „Kugel" und den Pol der den Berührungskegelschnitt enthaltenden Ebene ihren „Mittelpunkt" nennen.

Es mögen nun $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $\tau$; $\xi'$, $\eta'$, $\zeta'$, $\tau'$ bezw. die Polarebenen der Punkte $X$, $Y$, $Z$, $T$; $X'$, $Y'$, $Z'$, $T'$, und ihre Schnittcurven mit $F$ bezw. $K_\xi$, $K_\eta$, $K_\zeta$, $K_\tau$; $K_{\xi'}$, $K_{\eta'}$, $K_{\zeta'}$, $K_{\tau'}$ sein; ferner mag je eine aus den Geraden $XY$ und $X'Y'$ an $F$ gelegte Tangentialebene das entsprechende Polarebenenquadrupel in dem Tangentenquadrupel $t_\xi$, $t_\eta$, $t_\zeta$, $t_\tau$ resp. $t_{\xi'}$, $t_{\eta'}$, $t_{\zeta'}$, $t_{\tau'}$ treffen. Unter solchen Voraussetzungen hat man

$$(XYZT)\,\overline{\wedge}\,(\xi\eta\zeta\tau)\,\overline{\wedge}\,(t_\xi t_\eta t_\zeta t_\tau) \text{ und } (X'Y'Z'T')\,\overline{\wedge}\,(\xi'\eta'\zeta'\tau')\,\overline{\wedge}\,(t_{\xi'} t_{\eta'} t_{\zeta'} t_{\tau'}).$$

Wenn nun $(XYZT)\,\overline{\wedge}\,(X'Y'Z'T')$ ist, d. h. wenn die beiden Strecken $XY$ und $X'Y'$ „gleich" sind, so folgt $(t_\xi t_\eta t_\zeta t_\tau)\,\overline{\wedge}\,(t_{\xi'} t_{\eta'} t_{\zeta'} t_{\tau'})$, d. h.: die Winkel $(t_\xi t_\eta)$ und $(t_{\xi'} t_{\eta'})$ oder, was dasselbe ist, die Winkel, unter denen sich $K_\xi$ und $K_\eta$, $K_{\xi'}$ und $K_{\eta'}$ schneiden, sind „gleich".

Ist jetzt $F$ eine Kugel, so werden für je zwei Tangentialebenen die Tangenten $t_\zeta$, $t_\tau$ resp. $t_{\zeta'}$, $t_{\tau'}$ durch die vom Berührungspunkte nach den imaginären Kreispunkten laufenden Strahlen gebildet, mithin die Winkel, unter denen sich $K_\xi$ und $K_\eta$, $K_{\xi'}$ und $K_{\eta'}$ schneiden, auch im gewöhnlichen Sinne gleich, folglich auch die Schnittwinkel ihrer stereographischen Projectionen wegen der Conformität der Abbildung. Hierdurch ist die unumschränkte Möglichkeit erwiesen, gleiche Schnittwinkel in der Kreisebene durch „gleiche" Strecken im Raume zu ersetzen.

Nun liegt es uns ob, durch vier willkürlich gegebene, nicht in einer Ebene liegende Punkte 1, 2, 3, 4 bei projectivischer Maassbestimmung „Kugeln" zu legen und ihre „Mittelpunkte" zu finden. Das will aber nichts Anderes heissen, als: durch 1, 2, 3, 4 Flächen zweiten Grades legen, welche $F$, die Fundamentalfläche der Maassbestimmung, längs Kegelschnitten berühren.

Wir wollen unter $ik$ die Combinationen 12, 13, 14, 23, 24, 34 verstehen; die Verbindungslinie $ik$ möge $F$ in den beiden Punkten $A_{ik}$ und $A'_{ik}$ treffen, und die beiden Punkte auf $ik$, welche sowohl $i$ und $k$, als auch $A_{ik}$ und $A'_{ik}$ harmonisch trennen, mögen $B_{ik}$ und $B'_{ik}$ heissen. Greifen

wir dann drei durch einen Punkt gehende Verbindungslinien $ik$ heraus, z. B. 12, 13, 14, so schneiden die acht Ebenen

$$\begin{array}{ll} B_{12}\, B_{13}\, B_{14}, & B_{12}\, B'_{13}\, B_{14}, \\ B'_{12}\, B_{13}\, B_{14}, & B'_{12}\, B'_{13}\, B_{14}, \\ B_{12}\, B_{13}\, B'_{14}, & B_{12}\, B'_{13}\, B'_{14}, \\ B'_{12}\, B_{13}\, B'_{14}, & B'_{12}\, B'_{13}\, B'_{14}, \end{array}$$

und nur diese acht, die Fläche $F$ in den Berührungskegelschnitten der gesuchten Flächen zweiten Grades oder „Kugeln", und ihre Pole in Bezug auf $F$ sind die gesuchten „Mittelpunkte". Die Richtigkeit dieser Construction leuchtet sofort ein, wenn man sich folgenden Satz vergegenwärtigt: Berühren sich zwei Flächen zweiten Grades $F$ und $F_1$ längs eines Kegelschnittes, der in der Ebene $\varepsilon$ gelegen ist, und trifft eine gerade Linie die Fläche $F_1$ in den beiden Punkten $i$ und $k$, die Fläche $F$ in $A_{ik}$ und $A'_{ik}$, die Ebene $\varepsilon$ endlich in $B_{ik}$, so trennen $B_{ik}$ und $B'_{ik}$ die Punkte $A_{ik}$ und $A'_{ik}$ harmonisch, sobald $B'_{ik}$ so construirt ist, dass er nebst $B_{ik}$ die Punkte $i$ und $k$ harmonisch trennt. Zugleich lehrt uns diese Construction; dass die oben aufgezählten acht Ebenen, in Verbindung mit den vier Flächen des Tetraeders 1234, eine Configuration $(12_6, 16_3)$ bilden*; und ist $F$ die Kugel, welche die Abbildung des Punktraumes auf die Kreisebene vermittelt, so ist wieder der Beweis geliefert, dass die Lösungen der Steinerschen Aufgabe eine Kreisconfiguration $(12_6, 16_3)$ bilden. (Vergl. des Verf. Note, XIX im 5. Hefte des XXIX. Jahrgangs dieser Zeitschrift.)

Jena, den 30. December 1884. Dr. Carl Hossfeld.

---

## VII. Zur Bestimmung der Intensität des Erdmagnetismus.

Im XXV. Jahrgange dieser Zeitschrift S. 271—279 behandelt Herr Pfannstiel die von Poisson vorgeschlagene Methode für Bestimmung der Intensität des Erdmagnetismus, bei welcher im Gegensatz zur Gauss'schen keine Ablenkungs- sondern Schwingungsbeobachtungen zu machen sind, und geht dabei sogar so weit, auch den Torsionscoefficienten durch Schwingungen zu bestimmen, wodurch er allerdings genöthigt ist, drei Magnete zu verwenden, während Gauss und Poisson deren nur zwei bedürfen. Ich habe früher einmal, veranlasst durch Herrn Geh. Rath Hankel in Leipzig, die beiden Methoden theoretisch miteinander verglichen; Beobachtungen habe ich nicht gemacht. Nachdem nun Herr Pfannstiel nach der Schwingungsmethode Beobachtungen angestellt hat, welche gute Resultate ergaben, habe ich meine Arbeit nochmals vorgenommen. Man kann nämlich gegen die Anwendung der Schwingungen ein Bedenken haben. Der die Schwing-

* Reye, Die Hexaeder- und die Octaederconfigurationen $(12_6, 16_3)$. Acta mathematica, Bd. I S. 97.

ungen beeinflussende Magnetstab liegt stets so, dass sich seine magnetische Axe im magnetischen Meridian befindet; der Nordpol ist theils nach Norden, theils nach Süden gerichtet. In diesen Lagen wird der Magnetismus des Stabes durch die inducirende Wirkung des Erdmagnetismus und des zweiten Magnets nicht zu vernachlässigende Aenderungen erfahren, und es fragt sich, ob dieser Umstand auf die Resultate von merklichem Einfluss ist.

Man kann nun nachweisen — und dies ist der Zweck des Folgenden —, dass dieses Bedenken der Anwendung der Schwingungsmethode nicht entgegensteht, dass vielmehr der durch Induction entstehende Fehler weniger in Betracht kommt, als bei der Gauss'schen Methode, bei welcher man einen solchen Fehler nicht vermuthen sollte, weil der ablenkende Magnetstab senkrecht zum magnetischen Meridian liegt. Diesen Fehler in den Ablenkungsbeobachtungen sucht man nach W. Weber durch Bestimmung des Inductionscoefficienten zu beseitigen; es wird sich zeigen, dass bei der Methode der Schwingungen das Resultat einer solchen Correctur nicht bedarf.

Lässt man einen Magnetstab ($I$), für welchen man das Trägheitsmoment und den Torsionscoefficienten des Aufhängefadens bestimmt hat, unter Einwirkung des Erdmagnetismus schwingen, so findet man aus der Schwingungsdauer das Product $MT$, worin $M$ das magnetische Hauptmoment des Stabes und $T$ die horizontale Componente der Intensität des Erdmagnetismus bedeutet. Dabei sei vorausgesetzt, der Torsionscoefficient werde in der gewöhnlichen Weise durch Ablenkungen bestimmt, so dass zwei Magnete ausreichen werden.

Während nun Gauss durch den Magnet $I$ einen zweiten ($II$) ablenken lässt, versetzt Poisson letzteren in Schwingungen und benutzt die aus dem Einflusse des Erdmagnetismus und des ersten Stabes resultirende Schwingungsdauer, um zur Kenntniss des Quotienten $M:T$ zu gelangen.

Ist $m$ das magnetische Moment des Stabes $II$, $\mathfrak{k}$ sein Trägheitsmoment, $\vartheta$ der Torsionscoefficient des Aufhängefadens und $t$ die auf unendlich kleine Ausschläge reducirte Schwingungsdauer, so gilt, falls der Stab lediglich unter Einwirkung des Erdmagnetismus schwingt, die Pendelgleichung

$$1)\qquad mT + \vartheta = \frac{\pi^2 \mathfrak{k}}{t^2}.$$

Wir lassen jetzt ausser den schon vorhandenen Kräften den Magnetstab $I$ die Nadel beeinflussen. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden Magnete habe die Länge $R$ und bilde mit dem magnetischen Meridian, welcher durch die Mitte von $II$ geht, den Winkel $\psi$. Die magnetische Axe des Stabes $I$ sei um den Winkel $U$, die von $II$ um $u$ aus dem magnetischen Meridian herausgedreht. Alle Winkel sollen vom nördlichen Theile des Meridians nach Osten gerechnet werden.

Das von dem festen Magneten auf den schwingenden ausgeübte Drehungsmoment, welches den Winkel $u$ zu verkleinern strebt, berechnet Gauss in der Abhandlung „Intensitas vis magneticae etc.“; es ist

2) $$S = \frac{S_3}{R^3} + \frac{S_4}{R^4} + \frac{S_5}{R^5} + \dots$$

Die Angabe des Werthes der Coefficienten $S_3, S_4, \dots$ mag hier unterbleiben. Bei vollkommen symmetrischer Beschaffenheit der Magnete verschwinden $S_4, S_6, \dots$ Vermehrt man $\psi$ um 180°, so bleiben $S_3, S_5, \dots$ ungeändert, $S_4, S_6, \dots$ aber wechseln das Vorzeichen. Da man $R$ sehr gross gegen die Dimensionen der Magnete wählt, so braucht man die Glieder, welche durch höhere Potenzen als $R^5$ dividirt sind, nicht zu beachten.

Um die Pendelgleichung verwenden zu können, muss das Drehungsmoment proportional $\sin u$ sein. Dies ist bei dem ersten Gliede $S_3 R^{-3}$ nur der Fall, wenn $\psi = 0$, 90°, 180° oder 270° und $U = 0$ oder 180°. Während sich also bei Gauss der Magnet $I$ immer senkrecht zum Meridian befindet, muss er hier parallel dazu liegen. Eine genauere Untersuchung zeigt, dass erstens auch $S_4$ und $S_5$ für die angegebenen Lagen nahezu proportional $\sin u$ sind und dass zweitens kleine mit $\cos u$ proportionale Glieder die Schwingungsdauer von $II$ nicht verändern. Wir setzen daher

3) $$S = s . \sin u = \left(\frac{s_3}{R^3} + \frac{s_4}{R^4} + \frac{s_5}{R^5}\right) \sin u.$$

Das Moment $s$ ist zu den übrigen auf den Magnet $II$ einwirkenden Kräften — Erdmagnetismus und Torsion — zu addiren, so dass die Gleichung entsteht

4) $$mT + \vartheta + s = \frac{\pi^2 \mathfrak{k}}{\tau^2},$$

wenn $\tau$ die entsprechende Schwingungsdauer bedeutet. Aus den Gleichungen 1) und 4) folgt durch Elimination von $\mathfrak{k}$

5) $$s = mT\left(1 + \frac{\vartheta}{mT}\right)\left(\frac{t^2}{\tau^2} - 1\right).$$

Da die Wirkung am grössten ist, wenn der feste Magnet nördlich oder südlich vom schwingenden liegt (d. h wenn $\psi = 0$ oder 180° ist), so werden nur diese Lagen bei Versuchen und also auch im folgenden zu berücksichtigen sein. Der Coefficient $s_3$, dessen Bedeutung aus Gleichung 3) ersichtlich ist, hat für diese Fälle die Grösse $\pm 2Mm$ und es entstehen daher folgende Gleichungen 6):

für $\psi = 0$, $U = 0$: $$+\frac{2Mm}{R^3} + \frac{s_4}{R^4} + \frac{s_5}{R^5} = mT\left(1 + \frac{\vartheta}{mT}\right)\left(\frac{t^2}{\tau_1^2} - 1\right),$$

für $\psi = 0$, $U = 180°$: $$-\frac{2Mm}{R^3} + \frac{s'_4}{R^4} + \frac{s'_5}{R^5} = mT\left(1 + \frac{\vartheta}{mT}\right)\left(\frac{t^2}{\tau_2^2} - 1\right),$$

für $\psi = 180°$, $U = 0$: $$+\frac{2Mm}{R^3} - \frac{s_4}{R^4} + \frac{s_5}{R^5} = mT\left(1 + \frac{\vartheta}{mT}\right)\left(\frac{t^2}{\tau_3^2} - 1\right),$$

für $\psi = 180°$, $U = 180°$: $$-\frac{2Mm}{R^3} - \frac{s'_4}{R^4} + \frac{s'_5}{R^5} = mT\left(1 + \frac{\vartheta}{mT}\right)\left(\frac{t^2}{\tau_4^2} - 1\right).$$

Addiren wir die erste und dritte Gleichung, ziehen die Summe der zweiten und vierten davon ab, dividiren durch 4 und setzen

$$7)\qquad \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\tau_1^2}-\frac{1}{\tau_2^2}+\frac{1}{\tau_3^2}-\frac{1}{\tau_4^2}\right)=D,$$

so erhalten wir

$$8)\qquad \frac{2Mm}{R^3}+\frac{s_5-s'_5}{2R^5}=mT\left(1+\frac{\vartheta}{mT}\right)t^2.D.$$

Wiederholen wir die Versuche bei einer Entfernung $\mathsf{P}$ statt $R$ und bezeichnen den dem $D$ entsprechenden Ausdruck mit $\Delta$, so wird

$$9)\qquad \frac{2Mm}{\mathsf{P}^3}+\frac{s_5-s'_5}{2\mathsf{P}^5}=mT\left(1+\frac{\vartheta}{mT}\right)t^2.\Delta.$$

Durch Elimination des zweiten Gliedes aus 8) und 9) erhält man

$$10)\qquad \frac{M}{T}=\left(1+\frac{\vartheta}{mT}\right)t^2\cdot\frac{DR^5-\Delta\mathsf{P}^5}{2(R^2-\mathsf{P}^2)}.$$

Mittels dieser Formel kann man das gewünschte $M:T$ berechnen.

Es ist nun die anfangs aufgeworfene Frage zu erörtern, ob nicht die Poisson'sche Methode zu verwerfen ist, weil bei ihr ein Magnet verschiedene Lagen einnehmen muss, in denen er verschiedenen die Stärke seines Magnetismus beeinflussenden Kräften ausgesetzt ist. Wenn zwei Magnete sich in derselben Geraden befinden, so wird ihr Magnetismus durch die gegenseitige Einwirkung geändert; so gross wird auch im bestgehärteten Stahl die Koercitivkraft nicht sein, dass dies ganz verhindert würde. Der Magnetismus wird vergrössert, wenn ungleichnamige Pole einander zugekehrt sind, er wird vermindert im entgegengesetzten Falle; gar keine Aenderung erleidet er, wenn die Axe des einen Magneten senkrecht gegen die des andern liegt, wenigstens brauchen wir die Aenderung in diesem Falle nicht zu berücksichtigen. Das Gesagte hat natürlich seine volle Giltigkeit, wenn ein Magnet durch die Erde vertreten ist. Ueberlegen wir uns, welchen Einfluss diese Thatsachen auf die Bestimmung der Intensität des Erdmagnetismus haben.

Die Methode von Gauss sowohl, wie die von Poisson beginnt damit, dass ein Magnet unter dem Einflusse des Erdmagnetismus schwingt, wobei er immer nur einen kleinen Winkel mit dem magnetischen Meridian bildet. Er besitzt daher nicht nur das Moment $M$, das er haben würde, wenn er senkrecht zum Meridian läge, sondern der Erdmagnetismus vermehrt dieses Moment um eine gewisse Grösse $\mathsf{M}$, so dass wir schliesslich nicht $MT$, sondern $(M+\mathsf{M})T$ erhalten. Gauss bringt nun diesen Magnetstab in verschiedene Lagen, aber so, dass er immer senkrecht zum magnetischen Meridian gerichtet ist, und lenkt damit eine zweite Nadel ab, auf deren Moment es nicht ankommt. Das Moment der ersten Nadel ist jetzt $M$ und das Resultat $M:T$. Durch Division in den früher erhaltenen Werth bekommt man daher nicht das gewünschte $T^2$, sondern $T^2\left(1+\frac{\mathsf{M}}{M}\right)$ und findet den Erdmagnetismus etwas zu gross.*

* S. Kohlrausch, Leitfaden der praktischen Physik, 5. Aufl., S. 188.

Bei Poisson befinden sich beide Magnete stets wenigstens nahezu im magnetischen Meridian. Wir wollen uns wiederum auf die bei praktischen Versuchen stets zu wählenden Fälle beschränken, in denen der feste Magnet nördlich oder südlich vom schwingenden liegt. Es sei zunächst $\psi = 0$, $U = 0$. Das Moment des festen Magnets wird vergrössert, und zwar durch den Erdmagnetismus um $\mathsf{M}$, durch den schwingenden Magneten um $\mathsf{M}_1$, es steigt also auf $M + \mathsf{M} + \mathsf{M}_1$. Die entsprechenden Vergrösserungen des Momentes $m$ der beweglichen Nadel seien $\mu$ (durch die Erde) und $\mu_1$ (durch den festen Magneten), so dass das Gesammtmoment $m + \mu + \mu_1$ ist.

Hat dagegen der feste Magnet die Lage $\psi = 0$, $U = 180^0$, während die Entfernung der Mittelpunkte dieselbe wie vorhin ist, so wird das Moment des festen Magneten $M - \mathsf{M} - \mathsf{M}_1$, des schwingenden $m + \mu - \mu_1$. Für $\psi = 180^0$ sind die Momente dieselben. Stellen wir jetzt die vier Gleichungen 6) mit Berücksichtigung des Vorhergehenden nochmals auf, so müssen wir bedenken, dass die Schwingungsdauer $t$ durch Schwingen des Magneten *II* lediglich unter Einfluss des Erdmagnetismus bestimmt worden ist. Das Moment der Nadel ist hierbei $m + \mu$ und Gleichung 1) heisst daher

$$11) \qquad (m + \mu) T + \vartheta = \frac{\pi^2 \mathfrak{k}}{t^2},$$

Gleichung 4) aber lautet für $\psi = 0$, $U = 0$, wenn wir für $s$ den Werth $\frac{2Mm}{R^3} + \frac{s_4}{R^4} + \frac{s_5}{R^5}$ einsetzen:

$$12) \quad (m + \mu + \mu_1) T + \vartheta + \frac{2(M + \mathsf{M} + \mathsf{M}_1)(m + \mu + \mu_1)}{R^3} + \frac{s_4}{R^4} + \frac{s_5}{R^5} = \frac{\pi^2 \mathfrak{k}}{\tau_1^2},$$

wobei wir natürlich die Aenderung der Magnetismen in $s_4$ und $s_5$ vernachlässigen. Setzen wir aus 11) den Werth von $\pi^2 \mathfrak{k}$ in 12) ein und stellen die Gleichung auch für die drei anderen Lagen auf, in denen beobachtet wird, so erhalten wir folgende Gleichungen 13):

für $\psi = 0$, $U = 0$:
$$(m + \mu + \mu_1) T + \vartheta + \frac{2(M + \mathsf{M} + \mathsf{M}_1)(m + \mu + \mu_1)}{R^3} + \frac{s_4}{R^4} + \frac{s_5}{R^5} = \frac{t^2}{\tau_1^2}[(m + \mu) T + \vartheta],$$

für $\psi = 0$, $U = 180^0$:
$$(m + \mu - \mu_1) T + \vartheta - \frac{2(M - \mathsf{M} - \mathsf{M}_1)(m + \mu - \mu_1)}{R^3} + \frac{s'_4}{R^4} + \frac{s'_5}{R^5} = \frac{t^2}{\tau_2^2}[(m + \mu) T + \vartheta],$$

für $\psi = 180^0$, $U = 0$:
$$(m + \mu + \mu_1) T + \vartheta + \frac{2(M + \mathsf{M} + \mathsf{M}_1)(m + \mu + \mu_1)}{R^3} - \frac{s_4}{R^4} + \frac{s_5}{R^5} = \frac{t^2}{\tau_3^2}[(m + \mu) T + \vartheta],$$

für $\psi = 180^0$, $U = 180^0$:
$$(m + \mu - \mu_1) T + \vartheta - \frac{2(M - \mathsf{M} - \mathsf{M}_1)(m + \mu - \mu_1)}{R^3} - \frac{s'_4}{R^4} + \frac{s'_5}{R^5} = \frac{t^2}{\tau_4^2}[(m + \mu) T + \vartheta].$$

Durch Addition der ersten und dritten, Subtraction der zweiten und vierten Gleichung, Division durch 4 und Benutzung der durch Gleichung 7) eingeführten Abkürzung wird

$$14)\quad \begin{aligned} &\mu_1 T + \frac{2(M+\mathsf{M})(m+\mu)}{R^3} - \frac{2\,\mathsf{M}m}{R^3} - \frac{2\,\mathsf{M}\mu}{R^3} + \frac{2\,\mathsf{M}\mu_1}{R^3} + \frac{2\,\mathsf{M}_1\mu_1}{R^3} \\ &+ \frac{1}{2}\cdot\frac{s_5 - s'_5}{R^5} = (m+\mu)\,T\left[1 + \frac{\vartheta}{(m+\mu)\,T}\right] t^2 .\, D. \end{aligned}$$

Das vierte, fünfte und sechste Glied der linken Seite dieser Gleichung brauchen wir nicht zu berücksichtigen, da im Zähler zwei der kleinen Momentenänderungen miteinander multiplicirt sind; gegen das zweite Glied werden diese Brüche ausserordentlich klein. Störend für die weitere Rechnung sind aber das erste und dritte Glied; in der entsprechenden Gleichung 8) sind diese Glieder nicht vorhanden. Wir werden jedoch weiter unten nachweisen, dass sich dieselben gegenseitig aufheben. Nehmen wir dies schon jetzt als bewiesen an, d. h. setzen wir

$$15)\quad \mu_1 T = \frac{2\,\mathsf{M}m}{R^3},$$

so geht Gleichung 14) nach Division durch $(m+\mu)T$ über in

$$16)\quad \frac{2(M+\mathsf{M})}{TR^3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{s_5 - s'_5}{(m+\mu)\,TR^5} = \left[1 + \frac{\vartheta}{(m+\mu)\,T}\right] t^2 .\, D.$$

Wählt man eine andere Entfernung $\mathsf{P}$ statt $R$, so sind die durch die Erde bewirkten Aenderungen $\mathsf{M}$ und $\mu$ dieselben; man erhält eine zweite Gleichung

$$17)\quad \frac{2(M+\mathsf{M})}{T\mathsf{P}^3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{s_5 - s'_5}{(m+\mu)\,T\mathsf{P}^5} = \left[1 + \frac{\vartheta}{(m+\mu)\,T}\right] t^2 .\, \Delta,$$

so dass

$$18)\quad \frac{M+\mathsf{M}}{T} = \left[1 + \frac{\vartheta}{(m+\mu)\,T}\right] t^2 \cdot \frac{DR^5 - \Delta\mathsf{P}^5}{2(R^2 - \mathsf{P}^2)}.$$

Die in dieser Gleichung vorkommende Grösse $\frac{\vartheta}{(m+\mu)\,T}$ ist das durch die Versuche erhaltene Torsionsverhältniss, da auch bei diesen das Moment der Nadel nicht $m$, sondern $m+\mu$ ist.

Da man im ersten Theile des Versuchs $(M+\mathsf{M})T$ gefunden hat, so ergiebt sich durch Division mit dem aus Gleichung 18) resultirenden $(M+\mathsf{M}):T$ das gesuchte $T$ selbst ohne einen durch Induction verursachten Fehler. Es fragt sich nur, ob Gleichung 15) richtig ist.

In der Theorie über die drehbaren Molecularmagnete und die Abhängigkeit des Magnetismus im weichen Eisen von der magnetisirenden Kraft stellt W. Weber* die Gleichung auf

$$19)\quad Y = n\mathfrak{m}\frac{X}{\sqrt{X^2+Z^2}}\cdot\frac{X^4 + \frac{7}{6}X^2Z^2 + \frac{2}{3}Z^4}{X^4 + X^2Z^2 + Z^4}.$$

---

* Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über Diamagnetismus. Abhandlungen der königl. sächs. Ges. d. Wissensch., math.-phys. Cl., Bd. I S. 572.

Darin ist m (bei Weber $\mu$) das der Axe eines Molecularmagneten parallel genommene Moment desselben (dieses Moment ist für alle Moleküle gleich vorausgesetzt), $n$ die Anzahl der Moleküle in dem zu magnetisirenden Stück, $Z$ (bei Weber $D$) die Resultante der auf das Molekül wirkenden Molecularkräfte, $X$ die magnetisirende Kraft (Magnetpol, elektrischer Strom) und $Y$ das in dem Eisen in Richtung der Kraft $X$ durch dieselbe hervorgerufene Moment. Ist $X$ klein gegen $Z$, so kann man in Gleichung 19) die Factoren im Nenner nach Potenzen von $\frac{X}{Z}$ entwickeln und die höheren Potenzen vernachlässigen. Man erhält dann

$$20)\qquad Y = n\mathrm{m}\frac{2}{3}\frac{X}{Z} \text{ für } X < Z.$$

Ist dagegen $X$ gross gegen $Z$, so entwickelt man nach $\frac{Z}{X}$ und erhält

$$21)\qquad Y = n\mathrm{m}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{Z^2}{X^2}\right) \text{ für } X > Z.$$

Diese beiden Gleichungen haben auch durch Versuche im Wesentlichen Bestätigung gefunden. Aus der ersten derselben geht hervor, dass, wenn $X$ klein gegen $Z$, das entstehende magnetische Moment proportional der einwirkenden Kraft ist. Die Gleichung gilt zwar für weiches Eisen, und in unserem Falle handelt es sich um gut gehärtete Stahlmagnete; aber da gerade bei diesen die Directionskraft der Moleküle sehr gross gegenüber der einwirkenden Kraft ist, so wird es gestattet sein, Gleichung 20) als richtig anzusehen und demnach die Aenderung des Moments im Magneten proportional der einwirkenden Kraft zu setzen. Es sei dies Hypothese I. Darauf, dass dieselbe absolut richtig ist, kommt es nicht an, da die Folgerungen daraus nur dazu dienen sollen, die Gleichheit der Grössen $\mu_1 T$ und $2\mathsf{M}mR^{-3}$ nachzuweisen, und diese an und für sich nicht sehr gross sind. Die Voraussetzung, dass das entstehende magnetische Moment der einwirkenden Kraft proportional ist, liegt auch der Poisson'schen Theorie der Induction zu Grunde, welche z. B. von F. Neumann (Vater) weiter entwickelt worden ist.*

Die Momentenänderungen $\mu$ und $\mu_1$, welche die schwingende Nadel durch die Erde und den festen Magneten erfährt, werden sich demnach verhalten wie die Kräfte, welche Erde und Magnet auf ein magnetisches Theilchen $e$ der Nadel ausüben. Die erstere Kraft ist $Te$, die letztere berechnet man leicht, indem man die durch höhere Potenzen als $R^3$ dividirten Glieder weglässt, zu $\frac{2M}{R^3}\cdot e$. Es ergiebt sich also die Proportion

$$\mu : \mu_1 = Te : \frac{2M}{R^3}e$$

oder

---

* Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus, namentlich über die Theorie der magnetischen Induction. Herausgegeben von C. Neumann (Sohn). Leipzig 1881. S. 30.

22)
$$\mu_1 T = \frac{2 M \mu}{R^3}.$$

Diese Gleichung würde mit 15) übereinstimmen, wenn statt $M\mu$ das Product $\mathsf{M}m$ darin stünde. Wir müssen daher weiter untersuchen, wie dieselbe Kraft $X$ auf verschiedene Eisenmassen wirkt. Wir können voraussetzen, dass die beiden zu Versuchen benützten Magnete aus gleich gutem Stahle bestehen (so dass die Kraft $Z$ in beiden dieselbe Grösse hat) und dass sie mit gleicher Sorgfalt magnetisirt worden sind. Dann wird unzweifelhaft der grössere Magnet durch eine gewisse Kraft eine grössere Momentenänderung erfahren, als der kleinere Magnet durch dieselbe Kraft, es werden mit anderen Worten die Momentenänderungen $\mathsf{M}$ und $\mu$ proportional den Momenten $M$ und $m$ sein (Hypothese II). Diese Behauptung können wir noch in anderer Weise stützen. Wenn auf das Eisen eine unendlich grosse Kraft $X$ einwirkte, so würde nach Gleichung 21) das Moment sein Maximum $n\mathfrak{m}$ erreichen, in dem einen Magneten also $\mathfrak{N}.\mathfrak{m}$, in dem andern $\mathfrak{n}.\mathfrak{m}$, wenn $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{n}$ die Anzahl der Moleküle im festen und schwingenden Magneten bedeuten. Nun sind zwar unsere Magnete nicht bis zum Maximum magnetisirt; aber vorausgesetzt, dass ihre Magnetisirung mit gleicher Sorgfalt vorgenommen ist, wird der Magnetismus der Nadeln um analoge Werthe vom Maximum entfernt sein, die vorhandenen Momente werden gleiche Bruchtheile der Maximalmomente bilden, d. h.

$$M : m = (\mathfrak{N}.\mathfrak{m}) : (\mathfrak{n}.\mathfrak{m}).$$

Ferner ist aber das entstehende Moment oder die Momentenänderung nach Gleichung 20) und 21) proportional mit $n.\mathfrak{m}$, d. h.

$$\mathsf{M} : \mu = (\mathfrak{N}.\mathfrak{m}) : (\mathfrak{n}.\mathfrak{m}).$$

Aus beiden Proportionen folgt

$$\mathsf{M} : \mu = M : m$$

oder

23)
$$M\mu = \mathsf{M}m,$$

und dies ist wieder obige Behauptung. Dass die Gleichung ganz genau der Wirklichkeit entspricht, ist für unsern Zweck nicht nöthig.

Nunmehr geht Gleichung 22) über in

$$\mu_1 T = \frac{2 \mathsf{M} m}{R^3},$$

und dies ist Gleichung 15), deren Richtigkeit früher vorausgesetzt wurde. Wir erhalten also durch die Methode der Schwingungen direct das wahre $T$, während es bei Anwendung der Ablenkungsmethode mit dem unbekannten Factor $\sqrt{1 + \frac{\mathsf{M}}{M}}$ multiplicirt ist, dessen Grösse, wenn man die möglichste Schärfe des Resultats erreichen will, durch besondere Versuche festgestellt werden muss.

Grimma. Dr. Th. Häbler.

## VIII. Notiz zur Differentialgleichung

$$1)\ (a_3+b_3x+c_3x^2+d_3x^3)\frac{d^3y}{dx^3}+(a_2+b_2x+c_2x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+(a_1+b_1x)\frac{dy}{dy}+a_0y=0.$$

Bekanntlich ist für diese nicht unwichtige Gleichung die Integration in einigen speciellen Fällen geleistet worden. Man vergl. die Arbeiten von Hossenfelder — Annalen Bd. IV; Pochhammer — Journal f. d. reine u. angew. Mathematik Bd. LXXI; Thomae — Zeitschrift f. Math. u. Phys. Bd. XXI.

Wir machen hier auf folgenden neuen integrablen Fall aufmerksam: Genügt der Gleichung 1) partikulär

$$y=(x-\varkappa)^\lambda,$$

unter $\varkappa$ eine Wurzel der Gleichung

$$a_3+b_3\varkappa+c_3\varkappa^2+d_3\varkappa^3=0$$

verstanden, so kann jene Differentialgleichung mittels der Substitution

$$y=(x-\varkappa)^\lambda\int(x-\varkappa)^{-\lambda-1}z\,dx$$

in die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe transformirt werden.

Setzt man, was keine Beschränkung ist, $a_3=0$ voraus und wählt $\varkappa=0$, so lautet Gleichung 1) einfacher

$$1a)\ x(b_3+c_3x+d_3x^2)y'''+(a_2+b_2x+c_2x^2)y''+(a_1+b_1x)y'+a_0y=0,$$

und diese letzte Gleichung kann man sich entstanden denken durch Elimination einer Variabelen $z$ aus folgenden beiden Gleichungen:

$$\alpha)\qquad xy'-\lambda y=z,$$

$$\beta)\qquad (\alpha_2+\beta_2x+\gamma_2x^2)z''+(\alpha_1+\beta_1x)z'+\alpha_0z=0.$$

Für die auf diese Weise hergeleitete (reducible) Differentialgleichung ist nun charakteristisch, dass sie mit der reducirten Gleichung $\alpha$) ein Integral gemein haben muss, d. h. dass ihr $y=x^\lambda$ partikulär genügt. — Gleichzeitig folgt aus $\alpha$)

$$y=x^\lambda\int x^{-\lambda-1}z\,dx,$$

durch welchen Ausdruck die Gleichung dritter Ordnung — ihrer Entstehung gemäss — nothwendig auf die Gleichung $\beta$) zurückführbar ist. Hiermit ist unsere anfänglich aufgestellte Behauptung erwiesen.

Um nun die Transformation an der Gleichung 1a) auszuführen, stellen wir zunächst die Bedingungen fest, dass jener Gleichung $y=x^\lambda$ partikulär genügt. Man findet

$$2)\qquad \left.\begin{aligned} d_3\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)+c_2\lambda(\lambda-1)+b_1\lambda+a_0&=0\\ c_3(\lambda-1)(\lambda-2)+b_2(\lambda-1)+a_1&=0\\ b_3(\lambda-2)+a_2&=0\end{aligned}\right\}.$$

Aus der letzten dieser Gleichungen folgt **ein** Werth für $\lambda$, die anderen beiden Gleichungen geben zwei Coefficientenbedingungen, unter denen die partikuläre Lösung $y=x^\lambda$ überhaupt existirt.

Substituirt man weiter in Gleichung 1a) auch

$$y=x^\lambda\int x^{-\lambda-1}z\,dx,\quad y^{(n)}=x^{\lambda-n}\int x^{-\lambda+n-1}z^{(n)}\,dx,\quad n=1,2,3,$$

so entsteht nach passender Anordnung der Glieder und Berücksichtigung der Partikularlösung

$$\begin{aligned}&x^2(b_3+c_3x+d_3x^2)z''+x[(\lambda-2)(b_3+c_3x+d_3x^2)+(a_2+b_2x+c_2x^2)]z'\\&+[(\lambda-1)(\lambda-2)(b_3+c_3x+d_3x^2)+(\lambda-1)(a_2+b_2x+c_2x^2)+(a_1+b_1x)x]z=0.\end{aligned}$$

Beachtet man, dass zufolge der Bedingungen 2) die letzte Differentialgleichung durch $x^2$ theilbar wird, so kommt man zu der Gleichung

$$\text{3)}\quad\begin{aligned}&(b_3+c_3x+d_3x^2)z''+[(\lambda-2)(c_3+d_3x)+b_2+c_2x]z'\\&\qquad+[(\lambda-1)(\lambda-2)d_3+(\lambda-1)c_2+b_1]z=0,\end{aligned}$$

wie vorausbestimmt war. Sind $z_1$ und $z_2$ die partikulären Integrale von 3), so genügt der Gleichung 1a) folgender Ausdruck:

$$y=x^\lambda\left\{C_0+C_1\int x^{-\lambda-1}z_1\,dx+C_2\int x^{-\lambda-1}z_2\,dx\right\}.$$

In ähnlicher Weise gelangt man auch zu folgendem Satze: Genügt der Differentialgleichung

$$(a_3+b_3x)\frac{d^3y}{dx^3}+(a_2+b_2x)\frac{d^2y}{dx^2}+(a_1+b_1x)\frac{dy}{dx}+(a_0+b_0x)y=0$$

partikulär

$$y=e^{\lambda x},$$

so lässt sie sich durch die Substitution

$$y=e^{\lambda x}\int e^{-\lambda x}z\,dx,\quad y^{(n)}=e^{\lambda x}\int e^{-\lambda x}z^{(n)}\,dx,\quad n=1,2,3,$$

in eine Gleichung von der Form

$$(\alpha_2+\beta_2x)z''+(\alpha_1+\beta_1x)z'+(\alpha_0+\beta_0x)z=0$$

verwandeln.

Es sei schliesslich noch ausdrücklich darauf hingewiesen, dass der Vortheil der angegebenen Transformation nicht darin zu suchen ist, dass eine Gleichung dritter Ordnung mit Hilfe eines ersten Integrals auf eine Gleichung zweiter Ordnung herabgesetzt werden kann — was selbstverständlich ist —, sondern darin, dass man in den erwähnten Fällen auf Gleichungen geführt wird, deren Integration bereits erledigt ist.

Woldemar Heymann.

# VI.

## Beziehungen zwischen den Krümmungen reciproker räumlicher Gebilde.

Von

Dr. L. Geisenheimer,
Bergschuldirector in Tarnowitz.

Hierzu Taf. V Fig. 1.

In einer früheren, ebenfalls in dieser Zeitschrift veröffentlichten Abhandlung wurde die Beziehung zwischen den Krümmungsradien reciproker, collinearer und inverser ebener Curven untersucht.* Zweck der vorliegenden Arbeit ist, diese Untersuchung auf reciproke räumliche Systeme, also auf die einer beliebigen Raumcurve oder Fläche entsprechenden reciproken Gebilde auszudehnen. Als Specialfälle der erhaltenen Resultate werden sich Beziehungen zwischen den Krümmungen der auf einer Fläche zweiter Ordnung enthaltenen Curve und ihrer Abwickelungsfläche, ferner Eigenschaften der Krümmungslinien und der Centrafläche für die genannten quadratischen Flächen, insbesondere eine Construction für das Centrum der zu einer Krümmungslinie gehörigen Schmiegungskugel ergeben.

### § 1.

Im Folgenden werde immer vorausgesetzt, dass die betrachteten reciproken Gebilde in involutorische Lage gebracht seien, das eine derselben also das Polarsystem des andern in Bezug auf eine als Directrix dienende Fläche zweiter Ordnung darstelle; die Allgemeinheit der Untersuchung wird durch diese Annahme nicht beschränkt.

Um die einer Raumcurve entsprechende reciproke Figur zu erhalten, können wir die Curve sowohl als den Ort ihrer Punkte, wie als die Einhüllende ihrer Schmiegungsebenen betrachten. Im ersten Falle bildet das reciproke Gebilde eine von den entsprechenden Polarebenen umhüllte abwickelbare Fläche, im zweiten Falle die Rückkehrkante (Cuspidal- oder Strictionscurve) derselben. Wenn, was im Weitern geschehen soll, unter den Krümmungen einer abwickelbaren Fläche längs einer Erzeugenden die

* Bd. XXV S. 300.

Krümmungen im berührten Elemente dieser Rückkehrkante verstanden werden, braucht in der vorliegenden Untersuchung diese verschiedenartige Bildung des einer Raumcurve reciproken Systems nicht beachtet zu werden und können wir uns kurz dahin ausdrücken, dass einer Raumcurve als reciprokes System wieder eine solche Curve entspreche. Bezüglich der Krümmungen in einem Elemente der Raumcurve unterscheiden wir: 1 die Krümmung des Elements in seiner Schmiegungsebene gleich dem reciproken Werthe des (ersten) Krümmungsradius; 2. die Krümmung des Elements in seinem Punkte gleich dem reciproken Werthe der Neigung des Schmiegungskegels, so dass, falls dieser Kegel in eine Gerade degenerirt, seine Krümmung unendlich gross, die einer Ebene null wird; 3. das Product dieser beiden Krümmungen gleich dem reciproken Werthe des Windungsradius (Radius der zweiten Krümmung).

Die zu einem Punkte $P_1$ der Raumcurve $k_1$ gehörige Schmiegungsebene werde mit $\pi_1$, der in ihr liegende Krümmungsradius mit $\varrho_1$, der Windungsradius mit $R_1$, die Neigung des Schmiegungskegels mit $tg H_1 = \frac{R_1}{\varrho_1}$, die gleichnamigen Grössen der reciproken Curve durch gleiche Buchstaben mit dem Index 2 bezeichnet, so dass also $P_1$ und $\pi_2$, $P_2$ und $\pi_1$ polare Elemente darstellen.

Wir denken uns die Schmiegungsebene $\pi_1$ verlängert und vom osculirenden Elemente des Schmiegungskegels des entsprechenden Elements in der reciproken Curve durchsetzt, so ist bei Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen von mindestens dritter Ordnung, also bis auf die Krümmungsradien genau, das in $\pi_1$ fallende Element von $k_1$ dem Element der Schnittfigur reciprok, wobei die Schnittcurve der Schmiegungsebene $\pi_1$ mit der Directrixfläche der räumlichen Involution die Directrix des jetzt bestimmten ebenen Polarsystems bildet. Daher ist nach der vorhin angeführten Abhandlung*:

$$\varrho_1 \cdot \varrho'_2 = \frac{a_1^4 . b_4^4}{n_1^3 . n'^3_2},$$

wo $\varrho'_2$ den Krümmungsradius für das Schnittelement des Schmiegungskegels, $a_1 b_1$ die halben Hauptaxen der in $\pi_1$ liegenden Directrix, $n_1$ und $n'_2$ die Entfernungen der Tangenten $t_1$ und $t'_2$ der reciproken Curvenelemente vom Mittelpunkte dieses Kegelschnittes bedeuten. Die Tangente $t'_2$ fällt mit dem Schnitte der beiden Schmiegungsebenen $\pi_1$ und $\pi_2$ zusammen.

Die von $P_2$ bis zu ihrer Spur in $\pi_1$ mit $t_2$ bezeichnete Tangente an $k_2$ bilde mit $\pi_1$ den Winkel $\chi_2$, mit der Geraden $|\pi_1 \pi_2|$ den Winkel $\psi_2$, so wird der Hauptkrümmungsradius des Schmiegungskegels im Endpunkte von $t_2$, also der Krümmungsradius des zu $t_2$ normalen Schnittes, $t_2 . tg H_2$. Die in dieser Normalebene und in $\pi_1$ liegenden Schnittelemente des zweiten Schmiegungskegels dürfen bis auf unendlich kleine Grössen einschliesslich

* a. a. O. S. 308.

zweiter Ordnung als affin betrachtet werden, und zwar ist $t_2$ der Affinitätsstrahl. Das Verhältniss zwischen den Krümmungsradien entsprechender Punkte in zwei affinen Curven ist gleich dem Cubus aus dem Verhältniss der entsprechenden Tangentenstrecken, dividirt durch das Affinitätsverhältniss*. Hiernach ergiebt sich:

$$\frac{\varrho'_2}{t_2 \,.\, tg\, H_2} = \frac{\sin \chi_2}{\sin \psi_2^{\,3}},$$

und in Verbindung mit der vorstehend entwickelten Gleichung:

$$1)\qquad \varrho_1 \,.\, tg\, H_2 = \frac{a_1^{\,4} \,.\, b_1^{\,4}}{n_1^{\,3} \,.\, n'^{\,3}_2} \cdot \frac{\sin \psi_2^{\,3}}{t_2 \,.\, \sin \chi_2}.$$

Eine entsprechende Gleichung kann für $\varrho_2 \,.\, tg\, H_1$ aufgestellt werden. Die Formel lässt sich in verschiedene Formen überführen, von welchen wir zwei näher betrachten.

Wir legen durch den Mittelpunkt $S$ der Directrixfläche eine zu $\pi_1$ parallele Ebene $\pi'_1$; die halben Hauptaxen des in derselben inducirten Mittelpunktskegelschnittes seien $a'_1$ und $b'_1$, die von ihr und $P_2$ begrenzte Strecke auf der Tangente an $k_2$ sei $l_2$, ferner die normale Entfernung der Schnittgeraden $|\pi'_1\, \pi_2|$ von $S$ gleich $n''_2$, so wird nach bekannten Sätzen:

$$\frac{a_1^{\,4} \,.\, b_1^{\,4}}{n'^{\,3}_2 \,.\, t_2} = \frac{a'^{\,4}_1 \,.\, b'^{\,4}_1}{n''^{\,3}_2 \,.\, l_2}.$$

Die vom Involutionsmittelpunkte $S$ auf die Schmiegungsebenen $\pi_1$ und $\pi_2$ gefällten Senkrechten seien mit $p_1$ und $p_2$, der längs $SP_2$ fallende Halbmesser der Directrixfläche mit $c_1$ bezeichnet. Es ist:

$$n''_2 = p_2 \cdot \frac{\sin \psi_2}{\sin \chi_2} \quad \text{und} \quad l_2 \sin \chi_2 = \frac{c_1^{\,2}}{p_1} \cdot \sin^2 (\pi_1, c_1).$$

Diese Werthe in Formel 1) einsetzend, kommt:

$$\varrho_1 \; tg\, H_2 = \frac{a'^{\,4}_1 \,.\, b'^{\,4}_1 \,.\, c_1^{\,4} \sin^4 (\pi_1, c_1)}{p_1^{\,2} \,.\, p_2^{\,3} \,.\, l_2^{\,2} \,.\, n_1^{\,3}}.$$

Der Zähler des rechtsstehenden Ausdruckes ist constant, nämlich gleich $a_0^{\,4} \,.\, b_0^{\,4} \,.\, c_0^{\,4}$, wo $a_0$, $b_0$, $c_0$ die halben Hauptaxen der Directrix sind. Demnach wird:

$$2)\qquad \varrho_1 \,.\, tg\, H_2 = \frac{a_0^{\,4} \,.\, b_0^{\,4} \,.\, c_0^{\,4}}{p_1^{\,2} \,.\, p_2^{\,3} \,.\, l_2^{\,3} \,.\, n_1^{\,3}},$$

welche Gleichung auf ihrer rechten Seite keine Winkelgrössen enthält. Unter $n_1$ kann auch die Länge der Senkrechten verstanden werden, welche vom Involutionsmittelpunkte $S$ auf die Schnittgerade der Ebene $\pi'_1$ mit der dem Endpunkte von $l_2$ entsprechenden Polarebene gefällt wird. —

Eine andere bemerkenswerthe Umformung folgt aus der Betrachtung des der Geraden $|\pi_1 \pi_2|$ conjugirten Mittelpunktskegelschnittes in der Ebene $SP_1P_2$ (Fig. 1); die in diese Ebene fallenden Mittelpunkte der in $\pi_1$, $\pi_2$

* a. a. O. S. 215.

und $|\pi_1 \pi_2|$ inducirten Involutionen seien bezüglich mit $O_1$, $O_2$ und $O$, der zu $|\pi_1 \pi_2|$ parallele Halbmesser der Directrixfläche mit $d$ bezeichnet. Da

$$t_2 = l_2 \frac{O_1 P_2}{S P_2},$$

wird nach Formel 1):

$$\varrho_1 . tg H_2 . l_2 \cdot \frac{\sin \chi_2}{\sin \psi_2^3} = \frac{a_1^4 . b_1^4}{n_1^3 . n'^3_2} \cdot \frac{S P_2}{O_1 P_2}.$$

Weiter ist $a_1^4 . b_1^4 = (O_1 O . O_1 P_1)^2 \cdot \left(d^2 \cdot \frac{O_1 P_2}{S P_2}\right)^2 \cdot \sin^4(d, OP_1)$, da $O_1 O . O_1 P_1$ die Potenz des nach $O_1 P_1$ fallenden Durchmessers, $d^2 \cdot \frac{O_1 P_2}{S P_2}$ die Potenz des hierzu conjugirten Durchmessers in $\pi_1$ darstellt. Ferner ist:

$$n_1 = O_1 P_1 . \sin \varphi_1,$$

wo $\varphi_1$ den Winkel der Tangente $t_1$ mit $O_1 P_1$ bedeutet,

$$n'_2 = O_1 O . \sin(d, OP_1).$$

Diese Werthe einsetzend, kommt:

$$\varrho_1 . tg H_2 . l_2 \cdot \frac{\sin \chi_2}{\sin \psi_2^3} = \frac{O_1 P_2 . d^4}{O_1 O . O_1 P_1 . S P_2} \cdot \frac{\sin(d, OP_1)}{\sin^3 \varphi_1}.$$

Der um das Tripel $P_1 O P_2$ gelegte Kreis schneide $S P_2$ zum zweiten Male in $Q$, so ist $\frac{O_1 O . O_1 P_1}{O P_2} = O_1 Q$, und $O_1 Q . S P_2 = S P_2 (SQ - SO_1) = SP_2 . SQ - SP_2 . SO_1$. Nun ist $SP_2 . SQ$ die Potenz des Mittelpunktes $S$ in Bezug auf den dem Tripel umschriebenen Kreis und daher nach einem bekannten Satze gleich $c_1^2 + c'^2_1$, wenn $c'_1$ der im Polarsystem der Ebene $S P_1 P_2$ zu $c_1$ conjugirte Halbmesser ist; ferner ist $SP_2 . SO_1 = c_1^2$, und somit wird

$$\frac{O_1 P_2}{O_1 O . O_1 P_1 . S P_2} = \frac{1}{c'^2_1}.$$

Weiter ist, wie vorhin schon benutzt wurde, $l_2 \sin \chi_2 = \frac{c_1^2}{p_1} \sin^2(\pi_1, c_1)$, daher

$$\varrho_1 . tg H_2 = \frac{d^4 . p_1}{c_1^2 . c'^2_1 \sin^2(\pi_1, c_1)} \cdot \frac{\sin(d, OP_1) . \sin \psi_2^3}{\sin^3 \varphi_1}.$$

Indem der rechtsstehende Ausdruck mit $d^2 . \sin^2(P_1 O_1 P_2)$ erweitert und berücksichtigt wird, dass für die bei $O_1$ gebildete körperliche Ecke die Gleichung stattfindet:

$$\sin(d, P_1 O_1 P_2) . \sin(P_1 O_1 P_2) = \sin(c_1, \pi_1) . \sin(d, O_1 P_1),$$

und dass

$$c_1^2 . c'^2_1 . \sin^2(P_1 O_1 P_2) . d^2 . \sin^2(d, P_1 O_1 P_2) = a_0^2 . b_0^2 . c_0^2,$$

ergiebt sich die umgestaltete Formel:

3) $\left\{ \begin{array}{l} \varrho_1 . tg H_2 = \dfrac{d^6}{a_0^2 b_0^2 c_0^2} \cdot \left(\dfrac{\sin(d, OP_1) . \sin \psi_2}{\sin \varphi_1}\right)^3 \cdot p_1 . \\ \text{In genau entsprechender Weise gilt:} \\ \varrho_2 . tg H_1 = \dfrac{d^6}{a_0^2 b_0^2 c_0^2} \cdot \left(\dfrac{\sin(d, OP_2) . \sin \psi_1}{\sin \varphi_2}\right)^3 \cdot p_2 . \end{array} \right.$

In diesen Formeln bedeuten also die Bestimmungsstücke $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\psi_1$, $\psi_2$ der reciproken Curventangenten die Winkel derselben mit den Halbmessern $O_1 P_1$ bezüglich $O_2 P_2$ der in den Schmiegungsebenen inducirten Involutionen und mit $|\pi_1 \pi_2|$, bezüglich den aus $O_1$ und $O_2$ hierzu gezogenen Parallelen.

Ein weiteres interessantes Resultat wird durch Multiplication der beiden letzten Formeln gewonnen. Man erhält:

$$R_1 . R_2 = \frac{d^{12}}{a_0^4 . b_0^4 . c_0^4} \cdot \left(\frac{\sin(d, OP_1) . \sin(d, OP_2) . \sin\psi_1 . \sin\psi_2}{\sin\varphi_1 . \sin\varphi_2}\right)^3 \cdot p_1 p_2 .$$

Bezeichnet man die Potenz der auf $|\pi_1 \pi_2|$ hervorgerufenen Involution mit $k^2$, so ergiebt sich

$$\frac{\sin\psi_1 . \sin\psi_2}{\sin\varphi_1 . \sin\varphi_2} = \frac{OP_1 . OP_2}{k^2} = \frac{2\Delta(P_1 O P_2)}{k^2 \sin(P_1 O P_2)} .$$

Es ist $\frac{k^2}{d^2} = \frac{OO_3}{SO_3} = \frac{\Delta(P_1 O P_2)}{\Delta(P_1 S P_2)}$, daher:

$$4) \qquad \frac{\sin\psi_1 . \sin\psi_2}{\sin\varphi_1 . \sin\varphi_2} = \frac{2\Delta(P_1 S P_2)}{d^2 . \sin(P_1 O P_2)} .$$

Wir drücken $\Delta(P_1 S P_2)$ in folgender Weise aus: Bedeuten $s_1$, $s_2$, $s_3$ die aus $S$ auf die Seiten des Tripels $OP_1$, $OP_2$, $P_1 P_2$ gefällten Senkrechten, $a$, $b$ die halben Hauptaxen des zu diesem Tripel gehörigen Kegelschnittes, so ist bekanntlich, wenn $r$ der Radius des dem Tripel umschriebenen Kreises*:

$$2 s_1 s_2 s_3 r = a^2 b^2 ;$$

und da $r = \frac{P_1 P_2}{2 \sin(P_1 O P_2)}$, wird

$$\Delta(P_1 S P_2) = \frac{a^2 b^2 \sin(P_1 O P_2)}{2 . s_1 s_2} .$$

Die Ebene $P_1 O P_2$ werde im Folgenden mit $\mu$ bezeichnet. Es ist $s_1 = \frac{p_1}{\sin(\mu, \pi_1)}$, $s_2 = \frac{p_2}{\sin(\mu, \pi_2)}$, daher:

$$\frac{\sin\psi_1 . \sin\psi_2}{\sin\varphi_1 . \sin\varphi_2} = \frac{a^2 b^2 \sin(\mu, \pi_1) \sin(\mu, \pi_2)}{d^2 p_1 p_2} .$$

Wird Zähler und Nenner der rechten Seite mit $d^2 \sin^2(d\mu)$ multiplicirt, so folgt:

$$5) \qquad \frac{\sin\psi_1 . \sin\psi_2}{\sin\varphi_1 . \sin\varphi_2} = \frac{a_0^2 . b_0^2 . c_0^2}{d^4 p_1 p_2 \sin(d, OP_1) \sin(d, OP_2)} .$$

Die in den Ebenen $\pi_1$ und $\pi_2$ liegenden, durch $P_1$ und $P_2$ laufenden reciproken Tangenten bilden zwei projectivische Strahlbüschel, so dass $P_2 O$ einer Parallelen zu $d$, die aus $P_2$ parallel zu $d$ gelegte Gerade mit $P_1 O$ projectivisch ist. Gleichung 5) liefert den constanten Werth des Doppelschnittverhältnisses, welches durch die Strahlen $t_1$, $t_2$ mit den ebenerwähnten Strahlen der Büschel gebildet wird. Falls $P_1$ und $P_2$ auf ihren bezüg-

* Vergl. Schröter, Theorie der Kegelschnitte, S. 194.

lichen Durchmessern $SP_1$ und $SP_2$ fortrücken, wobei $\pi_1$ und $\pi_2$ parallel zu sich selbst verschoben werden, bleibt Winkel $P_1OP_2$ und $\Delta(P_1SP_2)$, daher auch $p_1p_2$ und nach Formel 5) der Werth dieses Doppelschnittverhältnisses ungeändert. Wird sein Werth in den für $R_1.R_2$ erhaltenen Ausdruck eingesetzt, so kommt:

$$6)\qquad R_1.R_2 = \frac{a_0^2 b_0^2 c_0^2}{p_1^2 p_2^2}.$$

Das Product aus den Radien der zweiten Krümmung räumlich reciproker involutorischer Curven ist dem Quadrat aus dem Product der ihren Schmiegungsebenen angehörigen Entfernungen vom Involutionsmittelpunkte umgekehrt proportional. Rücken beide sich entsprechende Punkte der involutorischen Curven auf ihren bezüglichen Durchmessern fort, so bleibt das Product dieser Krümmungsradien constant.

Der vorstehende Satz bildet ein Analogon zu dem für die Krümmungsradien ebener involutorisch-reciproker Curven hergeleiteten.

Wird der aus Formel 5) für $d$ zu entnehmende Werth in 3) eingesetzt, so nehmen diese Gleichungen die später zu verwendende Form an:

$$7)\qquad \left\{\begin{aligned} \varrho_1 \, tg\, H_2 &= \frac{a_0 b_0 c_0}{p_1^{1/2} p_2^{3/2}} \left(\frac{sin(d, OP_1)\, sin\,\varphi_2\, sin\,\psi_2}{sin(d, OP_2)\, sin\,\varphi_1\, sin\,\psi_1}\right)^{1/2}, \\ \varrho_2 \, tg\, H_1 &= \frac{a_0 b_0 c_0}{p_1^{3/2} p_2^{1/2}} \left(\frac{sin(d, OP_2)\, sin\,\varphi_1\, sin\,\psi_1}{sin(d, OP_1)\, sin\,\varphi_2\, sin\,\psi_2}\right)^{1/2}. \end{aligned}\right.$$

Aus den vorstehenden Gleichungen ergiebt sich ferner:

Sind die Schmiegungsebenen und Richtungen zweier reciproken Curvenelemente gegeben, so ist die ebene Krümmung des einen der räumlichen Krümmung des entsprechenden Elements umgekehrt proportional. Das Product zweier sich derartig entsprechender Krümmungen bleibt ungeändert, wenn die Curvenelemente parallel zu sich selbst auf den Durchmessern der Directrix verschoben werden.

Die Bezeichnung der beiden bezüglich einer Fläche zweiter Ordnung polaren Systeme als „reciproke Figuren" findet hiernach durch die Betrachtung der Krümmungen ihre Rechtfertigung.

## § 2.

Zur Bestimmung des zwischen den Bogenelementen $ds_1$ und $ds_2$ herrschenden Verhältnisses gehen wir wieder von der Betrachtung der in $\pi_1$ liegenden involutorischen reciproken Curvenelemente aus. Das Element, welches durch den an $k_2$ gelegten Schmiegungskegel in $\pi_1$ ausgeschnitten

wird, ist gleich $\frac{t_2 . d\vartheta_2}{\sin\psi_2}$, wo $d\vartheta_2$ den ebenen Contingenzwinkel der Curve $k_2$ bedeutet. Hiernach wird:*

$$\frac{ds_1}{t_2\, d\vartheta_2}\sin\psi_2 = \sqrt{\frac{\varrho_1 n_1}{\varrho'_2 n'_2}} = \sqrt{\frac{\varrho_1 n_1 \sin\psi_2^{\,3}}{t_2\, tg H_2\, n'_2 \sin\chi_2}}.$$

Es ist $d\vartheta_2 = \frac{ds_2}{\varrho_2}$, $\frac{t_2}{n'_2} = \frac{l_2}{n''_2} = \frac{l_2 . \sin\chi_2}{p_2 . \sin\psi_2}$, $\varrho_1 . tg H_2 = \frac{a_0^4 b_0^4 c_0^4}{p_1^2 p_2^3 l_2^3 n_1^3}$ (Formel 2), daher:

$$8)\qquad \frac{ds_1}{ds_2} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\,\frac{p_1 p_2 l_2^2 n_1^2}{a_0^2 b_0^2 c_0^2}.$$

Entsprechend müsste sein $\frac{ds_2}{ds_1} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\,\frac{p_1 p_2 l_1^2 n_2^2}{a_0^2 b_0^2 c_0^2}$, so dass sich durch Multiplication der beiden letzten Formeln ergiebt:

$$(l_2 n_1)(l_1 n_2) = \frac{a_0^2 b_0^2 c_0^2}{p_1 p_2},$$

und mit Hilfe dieser Beziehung folgt:

$$9)\qquad \frac{ds_1}{ds_2} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\,\frac{l_2 n_1}{l_1 n_2}.$$

Nach Formel 2) ist

$$(l_2 n_1)^3 = \frac{a_0^4 b_0^4 c_0^4}{\varrho_1\, tg H_2\, p_1^2 p_2^3} \text{ und entsprechend } (l_1 n_2)^3 = \frac{a_0^4 b_0^4 c_0^4}{\varrho_2\, tg H_1\, p_1^3 p_2^2},$$

daher

$$10)\qquad \frac{ds_1}{ds_2} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\sqrt[3]{\frac{p_1 \varrho_2\, tg H_1}{p_2 \varrho_1\, tg H_2}} = \sqrt[3]{\frac{p_1 \varrho_1 R_1}{p_2 \varrho_2 R_2}},$$

welche Formel der für ebene Systeme entwickelten analog ist. Dieselbe lässt sich in folgender Weise umformen. Bedeuten $d\eta_1$, $d\eta_2$ die räumlichen Contingenzwinkel (Winkel der unendlich nahen Schmiegungsebenen) in beiden reciproken Curven, so wird

$$\frac{ds_1}{ds_2} = \sqrt[3]{\frac{p_1}{p_2}\,\frac{ds_1^2 . d\vartheta_2 . d\eta_2}{ds_2^2 . d\vartheta_1 . d\eta_1}}$$

oder

$$11)\qquad \frac{ds_1 . d\vartheta_1 . d\eta_1}{p_1} = \frac{ds_2 . d\vartheta_2 . d\eta_2}{p_2}.$$

$\frac{1}{6}\, ds\, d\vartheta\, d\eta$ bedeutet aber die normale Entfernung des um $ds$ weiter liegenden Punktes einer Raumcurve von der vorhergehenden Schmiegungsebene. Formel 11) liefert hiernach den Satz:

In räumlich-involutorischen Systemen verhalten sich die unendlich kleinen Strecken, um welche zwei reciproke Curven bei entsprechendem Fortschreiten aus den Schmiegungsebenen heraustreten, wie die Entfernungen dieser Schmiegungsebenen vom Mittelpunkte der Involution.

* Diese Zeitschrift Bd. XXV S. 310.

Der entsprechende Satz für ebene Systeme lautet:

In ebenen involutorisch liegenden reciproken Curven verhalten sich die Bogenhöhen unendlich kleiner entsprechender Curvenelemente wie die Entfernungen der ihnen zugehörigen Tangenten vom Mittelpunkte der Involution.

Gleichung 9) giebt noch zu der Entwickelung Anlass:

$$\frac{ds_1}{ds_2}=\frac{\varrho_1\,tg\,H_1}{\varrho_2\,tg\,H_1}\cdot\frac{l_2 n_1}{l_1 n_2}=\frac{R_1}{\varrho_2\,tg\,H_1}\cdot\frac{l_2 n_1}{l_1 n_2},$$

woraus sich unter Benutzung von 2) und 6) ergiebt:

$$12)\qquad \frac{ds_1}{ds_2}=\frac{R_1 p_1}{l_2 n_1}.$$

Sind die Schmiegungsebenen und Richtungen zweier reciproken Curvenelemente gegeben, so ist deren Verhältniss $\frac{ds_1}{ds_2}$ dem Windungsradius $R_1$ proportional, vom Krümmungsradius $\varrho_1$ unabhängig.

Bei involutorischen Systemen in der Ebene wird das Verhältniss $\frac{ds_1}{ds_2}$ dem Krümmungsradius $\varrho_1$ proportional. —

Der vorhin entwickelte Satz über das Verhältniss der Abweichungen von der Schmiegungsebene ist nur der specielle Fall eines sich auf endliche Werthe beziehenden und für beliebige reciproke Systeme giltigen Gesetzes, welches im Folgenden unter Voraussetzung orthogonaler Coordinaten hergeleitet werden soll.

Die Gleichung einer dem ersten System angehörigen Ebene $\alpha_1$ sei

$$x\cos\lambda_1+y\cos\mu_1+z\cos\nu_1=p_1,$$

die Gleichung einer zum zweiten involutorisch-reciproken System gerechneten Ebene $\beta_2$ sei

$$x\cos\lambda_2+y\cos\mu_2+z\cos\nu_2=p_2.$$

Fallen die Coordinatenaxen mit den Hauptaxen der Involution $2a_0$, $2b_0$, $2c_0$ zusammen, so werden die Coordinaten der diesen Ebenen entsprechenden Punkte $A_2$ und $B_1$ bezüglich:

$$\frac{a_0^2}{p_1}\cos\lambda_1,\quad \frac{b_0^2}{p_1}\cos\mu_1,\quad \frac{c_0^2}{p_1}\cos\nu_1 \quad\text{und}\quad \frac{a_0^2}{p_2}\cos\lambda_2,\quad \frac{b_0^2}{p_2}\cos\mu_2,\quad \frac{c_0^2}{p_2}\cos\nu_2.$$

Die von $B_1$ auf die Ebene $\alpha_1$ gefällte Senkrechte sei $B_1\alpha_1$, so wird:

$$\frac{B_1\alpha_1}{p_1}=\frac{p_1-\frac{a_0^2}{p_2}\cos\lambda_1\cos\lambda_2-\frac{b_0^2}{p_2}\cos\mu_1\cos\mu_2-\frac{c_0^2}{p_2}\cos\nu_1\cos\nu_2}{p_1}$$

$$=1-\frac{a_0^2}{p_1p_2}\cos\lambda_1\cos\lambda_2-\frac{b_0^2}{p_1p_2}\cos\mu_1\cos\mu_2-\frac{c_0^2}{p_1p_2}\cos\nu_1\cos\nu_2.$$

Aus der symmetrischen Bildung des letzten Ausdrucks folgt:

$$\frac{B_1\alpha_1}{p_1}=\frac{A_2\beta_2}{p_2}.$$

Die Entfernung irgend eines Punktes von einer beliebigen Ebene verhält sich zur Entfernung der reciproken Elemente, wie die Abstände der beiden so erhaltenen Ebenen vom Mittelpunkte der Involution.

Dieser Satz ist die Verallgemeinerung des in Formel 11) gefundenen Gesetzes; die für circular-reciproke Systeme benutzte Proportion $\frac{B_1\alpha_1}{SB_1}=\frac{A_2\beta_2}{SB_2}$ ist ein specieller Fall desselben; ebenso benutzt Graves in Crelle's Journal Bd. XLII S. 279 einen speciellen Fall dieses Satzes.

## § 3.

Falls das Curvenelement $k_1$ die Fläche der Directrix berührt, vereinfachen sich die vorstehend entwickelten Formeln. Die Tangente $t_1$ fällt alsdann mit der Schnittlinie $|\pi_1\pi_2|$, $t_2$ mit $OP_2$, Punkt $P_1$ mit $O$ zusammen und es wird:

$$\sphericalangle(d,OP_1)=\varphi_1,\quad \psi_1=0,\quad \psi_2=\sphericalangle(t_1t_2)=\sphericalangle(d,OP_2),\quad \varphi_2=0,$$
$$l_1=\infty,\quad n_2=0.$$

Die zu den conjugirten Tangenten $t_1$ und $t_2$ parallelen Halbmesser der Directrix seien $d_1$ und $d_2$, so ist

$$d_1d_2p_2\sin\psi_2=a_0b_0c_0.$$

Nach Formel 3) wird:

$$\varrho_1\,tg\,H_2=\frac{d_1^6}{a_0^2b_0^2c_0^2}p_1\sin^3\psi_2.$$

Ferner wird

$$\frac{ds_1}{ds_2}=\sqrt[3]{\frac{p_1\varrho_1R_1}{p_2\varrho_2R_2}}=R_1d_1^2\sin\psi_2\sqrt[3]{\frac{p_1^2}{a_0^2b_0^2c_0^2(R_1.R_2)^2.p_2}}=\frac{p_1^2p_2d_1^2R_1}{a_0^2b_0^2c_0^2}$$
$$=\frac{p_1^2R_1}{p_2d_2^2\sin\psi_2}.$$

Anderseits ist nach Formel 12)

$$\frac{ds_1}{ds_2}=\frac{p_1R_1}{l_2n_1},$$

und da im vorliegenden Falle die Proportion stattfindet

$$t_2:l_2=n_1:n'_1,$$

kommt

$$l_2n_1=t_2n'_1=\frac{t_2p_2}{\sin(\pi_1\pi_2)}\quad\text{und somit}\quad\frac{ds_1}{ds_2}=\frac{p_1R_1}{p_2t_2}\sin(\pi_1\pi_2).$$

Die Vergleichung beider für das Verhältniss der Bogendifferentiale gefundenen Formeln liefert:

$$t_2=\frac{d_2^2}{p_1}\sin\chi_2,$$

eine sich auch aus der Figur leicht ergebende Gleichung. $\frac{p_1}{\sin\chi_2}$ bedeutet den Abschnitt der $\pi_1$ auf $d_2$.

Wenn endlich $k_1$ in die Directrix fällt, geht die reciproke Curve $k_2$ in die Strictions- oder Rückkehrcurve der abwickelnden Fläche über, deren Krümmungen und Bogendifferential sich also nach den vorstehenden Formeln aus denen der abzuwickelnden Curve $k_1$ bestimmen. Setzt man in die Formel $tg H_2 = \frac{d_1^6}{a_0^2 b_0^2 c_0^2} \frac{p_1}{\varrho_1} \sin^3\psi_2$ für $\varrho_1$ seinen Werth $\frac{d_1^2}{p_2}\sin(\pi_1\pi_2)$, so ergiebt sich:

$$tg H_2 = \frac{\varrho_1 \sin^3\psi_2}{t_2 \sin\chi_2},$$

welche für die Abwickelung irgend eines Curvenelements von einer beliebigen Fläche giltige Gleichung wie Formel 1) durch die Betrachtung des abwickelnden Kegels abgeleitet werden kann. Hierbei ergiebt sich weiter die Gleichung:

$$13)\qquad \frac{ds_1}{d\vartheta_2} = \frac{ds_1}{ds_2}\varrho_2 = \frac{t_2}{\sin\psi_2},$$

welche Beziehung mit den früheren Gleichungen übereinstimmt, falls für $\varrho_2$ der sich nach dem Vorstehenden ergebende Werth eingesetzt wird.

In sämmtlichen Formeln dieses Paragraphen treten $p_1$, $p_2$ und die vorkommenden Sinus als positive Grössen ein, so dass mit der Wahl eines Vorzeichens für $ds_1$ die weiteren Variablen der Grösse und Richtung nach bestimmt sind. Für eine parabolische Directrix, für welche die Durchmesser $p_1$ und $p_2$ unendlich werden und daher die Gleichungen in unbestimmter Form auftreten, lassen sich durch sehr einfache Grenzbetrachtungen statt der Durchmesser die Parameter der durch die Hauptaxe gelegten Schnitte $\lim\limits_{a=\infty}\frac{d^2}{a}$, statt der Entfernungen $p_1$ und $p_2$ die Winkel der Schmiegungsebenen $\pi_1$ und $\pi_2$ mit dem Durchmesser der Directrix einführen. Hierbei ergiebt sich in entsprechender Weise wie für ebene Systeme der Satz:

Das Product aus den Windungsradien zweier parabolisch-reciproken Curvenelemente bildet den reciproken Werth aus dem geometrischen Mittel der Krümmungsmaasse in denjenigen Punkten der Directrix, welche mit den Curvenelementen in einen Durchmesser fallen.

Wird die Directrix eine Kugelfläche mit dem Radius $a_0$, so wird $\varphi_1 + \pi_1 = 90^0$, $\varphi_2 + \psi_2 = 90^0$, daher die in Formel 5) gefundene Beziehung für das Doppelschnittsverhältniss der reciproken Tangenten:

$$tg\psi_1 . tg\psi_2 = \frac{a_0^2}{p_1 p_2} = \frac{1}{\cos(P_1 S P_2)}.$$

Die übrigen Formeln nehmen folgende Gestalt an.

1. Für beliebige Lage eines Curvenelements:

$$\varrho_1\, tg\, H_2 = p_1 \left(\frac{\sin\psi_2}{\cos\psi_1}\right)^3, \quad \varrho_2\, tg\, H_1 = p_2 \left(\frac{\sin\psi_1}{\cos\psi_2}\right)^3,$$

$$R_1 . R_2 = \frac{a_0^6}{p_1^2 p_2^2} = \left(\frac{a_0}{\cos(P_1 S P_2)}\right)^2.$$

2. Falls ein Curvenelement die Directrix berührt:

$$\varrho_1\, tg H_2 = p_1, \quad \varrho_2\, tg H_1 = \frac{a_0^4}{p_1^3}, \quad R_1 . R_2 = \frac{a_0^4}{p_1^2}. \quad \frac{ds_1}{ds_2} = \frac{p_1^2 R_1}{a_0^3} = \frac{a_0}{R_2}.$$

3. Liegt die Curve $k_1$ in der als Directrix benutzten Kugelfläche, so ergiebt sich aus der Formel $tg H_2 = \frac{p_1}{\varrho_1}$, dass die abwickelnde Regelfläche stets normal zu dem Kegel steht, welcher durch $k_1$ und den Mittelpunkt $S$ gelegt wird, welche Folgerung sich auch unmittelbar aus der Figur herleitet. $k_2$ ist bekanntlich in diesem Falle eine geodätische Linie eines durch den Kugelmittelpunkt als Scheitel gelegten Kegels. —

Die für die Abwickelung einer Curve von einer Fläche zweiter Ordnung gewonnenen Formeln werden im Nachstehenden für die Betrachtung der Krümmungslinien solcher Flächen Verwendung finden. In einem Punkte $P$ mögen sich die drei confocalen Flächen $F'$, $F''$, $F'''$, deren primäre halbe Axen bezüglich mit $a'$, $a''$, $a'''$ bezeichnet seien, durchschneiden; die Durchschnittscurve der Flächen $F'$ und $F''$ werde mit $k_{12}$, der Flächen $F'$ und $F'''$ mit $k_{13}$ angedeutet. Aus der Eigenschaft confocaler Systeme, dass für jeden Punkt die Hauptebenen der durch die Flächen des Systems in ihm inducirten Polarsysteme coincidiren, folgt, dass sich $F'$, $F''$, $F'''$ in $P$ orthogonal durchschneiden und daher $k_{12}$ normal zu $F'''$ steht. Wird $k_{12}$ von $F''$ abgewickelt, so bilden die Erzeugenden der Abwickelungsfläche ein System von Normalen zu $F'$, von welchen sich zwei benachbarte bis auf unendlich kleine Grössen dritter Ordnung schneiden. Der Schnittpunkt zweier derartiger benachbarter Normalen heisse $M'_{12}$; derselbe bildet den Krümmungsmittelpunkt des $k_{12}$ tangirenden Normalschnittes auf $F'$. Der Krümmungsradius dieses Normalschnittes werde mit $\varrho'_{12}$, der Krümmungsradius eines andern durch $P$ gelegten Hauptschnittes auf einer der drei Flächen durch entsprechende Indices bezeichnet. Rücken wir auf $k_{12}$ von $P$ aus um eine unendlich kleine Strecke nach derjenigen Richtung fort, welche ausserhalb $F'''$ fällt, und bilden alsdann für den zu $P$ benachbarten Punkt gleichfalls die Normale zu $F'$. Die zur neuen Normalen bezüglich einer der Flächen, also auch bezüglich der $F'''$, conjugirte Gerade fällt in die Tangentialebene des neuen Punktes an $F'$. Um die conjugirte Gerade zu finden, ziehen wir eine beliebige Tangente dieser Ebene, welche $F'''$ schneidet. Hierbei bilden sich auf der Tangente im Polarsystem von $F'''$ vier harmonische Punkte, von welchen drei unendlich nahe liegen; bis auf Grössen höherer Ordnung wird also die Strecke zwischen dem Berührungspunkte und dem diesem be-

züglich $F'''$ conjugirten Punkte von $F'''$ halbirt, und hieraus folgt, dass die Gerade, welche sich durch diesen conjugirten Punkt und den ursprünglichen Punkt $P$ legen lässt, stets nur einen unendlich kleinen Winkel mit der an $F'$ gelegten Tangente bilden kann. Der geometrische Ort der erwähnten conjugirten Punkte ist die zur Nachbarnormalen conjugirte Gerade, die hierdurch und $P$ gelegte Ebene daher die Polarebene des Schnittpunktes $M'_{12}$, in welchem sich diese benachbarten Normalen treffen, bezüglich $F'''$; und da nach dem Vorstehenden diese Polarebene in der Grenze mit der Tangentialebene an $F'$ in $P$ zusammenfällt, ergiebt sich in synthetischer Herleitung der bekannte Satz:

Die Hauptkrümmungscentra sind die Pole der Tangentialebenen in Bezug auf die beiden durch den Berührungspunkt gehenden confocalen Flächen.

$M'_{12}$ fällt also mit dem Pol der Tangentialebene an $F'$ bezüglich $F'''$, $M'_{13}$ mit dem Pol dieser Ebene bezüglich $F''$ zusammen.

Wird die Krümmungscurve $k_{12}$ von $F''$ abgewickelt, so bilden die Erzeugenden der Abwickelungsfläche als Normalen zu $F'$ eine der von Mannheim als „Normalie" bezeichneten Flächen*. Die Strictionscurve dieser Normalie ist also der Ort der Krümmungscentra $M'_{12}$; derselbe ist bekanntlich eine geodätische Linie auf der zu $F'$ gehörigen Centrafläche. Die Normale zu $F'$ berührt diese Centrafläche ausser in $M'_{12}$ noch in $M'_{13}$, welchem letztern Punkte die Tangentialebene $\tau_1$ als Polarebene in Bezug auf $F''$ entspricht. Und da diese Ebenen $\tau'$ die Fläche zweiter Ordnung $F'$ umhüllen, so liegen auch diese Krümmungscentra $M'_{13}$ auf einer Fläche zweiter Ordnung, nämlich der Reciproken von $F'$ bezüglich $F''$ als Directrix. Hierbei entspricht dem Punkte $P$, zu $F'$ gerechnet, in der Reciproken die Ebene $\tau''$, welche die Fläche der zu $F'$ gehörigen Krümmungscentra in $M'_{13}$ berührt. Demnach bildet die betrachtete Normalie die Abwickelungsfläche einer Schaar Flächen zweiter Ordnung, und hiernach ist der geometrische Ort der Krümmungscentra $M'_{13}$ eine Raumcurve vierter Ordnung, längs welcher sich die Centrafläche zu $F'$, die Normalie und eine Fläche zweiter Ordnung (nämlich die ebenerwähnte Reciproke zu $F'$ in Bezug auf $F''$) berühren.

Dem Hauptschnitte längs $k_{12}$ gehört auf $F''$ Punkt $M''_{12}$ als Krümmungscentrum an. Wickeln wir mit Hilfe der Tangentialebene $\tau'''$ an $F'''$ die geodätische Linie der $M'_{12}$ von der eben genannten Centrafläche ab, so erhalten wir in der Geraden $|M'_{12} M''_{12}|$ eine Erzeugende der an die Centrafläche längs der geodätischen Linie geführten Developpabeln, welche auch die zu $F''$ gehörige Centrafläche in der durch $M''_{12}$ gehenden, ebenfalls der Krümmungslinie $k_{12}$ entsprechenden geodätischen Linie berührt. Für die Centrafläche der $F'$ sind, da $|M'_{12} M''_{12}|$ ein Curvenelement derselben

* Mannheim, Cours de Géométrie Descriptive, p. 273.

längs der Normalen $|PM'_{12}|$ abwickelt, diese Normale und $|M'_{12}M''_{12}|$ conjugirte Tangenten.

Wird diese beide Centraflächen einhüllende Developpable abgewickelt, so gehen die erwähnten geodätischen Linien der Centraflächen in zwei zu einander senkrechte gerade Linien, die Normalen zu $F'$ und $F''$, über. Da die abwickelnden Ebenen die Normalebenen der Krümmungslinie $k_{12}$ bilden, fallen die Erzeugenden $|M'_{12}M''_{12}|$ mit den Krümmungsaxen, die Strictionscurve der aus ihnen gebildeten Developpabeln mit dem geometrischen Ort für die Centra der Schmiegungskugeln dieser Krümmungslinie zusammen. Durch diese Betrachtung ist ein Weg gebahnt, um den Krümmungs- und Windungsradius wie das Centrum der Schmiegungskugel für $k_{12}$ aufzufinden.

Wir bezeichnen im Folgenden:

mit $t_{12}$, $\pi_{12}$, $R_{12}$, $ds_{12}$ die Tangente, die Schmiegungsebene, den Windungsradius und das Bogenelement der Krümmungslinie $k_{12}$;

mit $p'$, $p''$, $p'''$, $p_{12}$ die stets positiv zu rechnenden Entfernungen der Tangentialebenen $\tau'$, $\tau''$, $\tau'''$ und der Schmiegungsebene $\pi_{12}$ vom Mittelpunkte $S$;

mit $d'_{13}$, $d''_{23}$ die in den Flächen $F'$, $F''$ parallel den zu $t_{12}$ senkrechten Tangenten dieser Flächen gezogenen Halbmesser.

Den Krümmungsradius von $k_{12}$ erhalten wir in der vom Punkte $P$ auf die Krümmungsaxe $|M'_{12}M''_{12}|$ gefällten Senkrechten. Projicirt man $p'$ und $p''$ auf diese Gerade, so folgt:

$$p'\varrho'_{12} - p''\varrho''_{12} = |M'_{12}M''_{12}|\, p_{12}.$$

Nach den bekannten Formeln ist:

$$\varrho'_{12} = \frac{a'^2 - a'''^2}{p'}, \quad \varrho''_{12} = \frac{a''^2 - a'''^2}{p''}, \quad d'^2_{13} = a'^2 - a''^2 = -d''^2_{23},$$

daher:

$$p_{12} = \frac{d'^2_{13}}{|M'_{12}M''_{12}|}, \tag{14}$$

welche Formel die Entfernung der Schmiegungsebene $\pi_{12}$ von $S$ bestimmt.

Behufs der Bestimmung des Windungsradius $R_{12}$ gehen wir von den Gleichungen aus:

$$\varrho'_{12} = \frac{a'^2 - a'''^2}{p'} \quad \text{und} \quad p'^2(a'^2 - a'''^2) = Const. \text{ längs } k_{12},$$

daher längs dieser Krümmungslinie:

$$\varrho'_{12} = \frac{Const.}{p'^3} \quad \text{und} \quad d\varrho'_{12} = -3\frac{Const.}{p'^4}\, dp'.$$

Aus der Figur folgt $dp' = p'''\, d\sigma$, wo $d\sigma$ die Projection des zur Krümmungslinie $k_{12}$ gehörigen Contingenzwinkels auf die Ebene $\tau''$ bedeutet, also $d\sigma = \frac{ds_{12}}{\varrho'_{12}}$ ist. Hiernach wird:

$$15)\qquad d\varrho'_{12} = -3\frac{Const.}{p'^4}p'''\frac{ds_{12}}{\varrho'_{12}} = -3\frac{p'''}{p'}ds_{12}.$$

Indem man $k_{12}$ von $F''$ abwickelt, erhält man $d\varrho'_{12}$ als Bogenelement der zu $k_{12}$ reciproken Curve und daher unter Anwendung von Gleichung 10) in der nach § 3 umgewandelten Gestalt:

$$d\varrho'_{12} = \frac{d''_{23}{}^2 p''}{p_{12}{}^2 R_{12}} ds_{12}.$$

Die Vergleichung beider Gleichungen liefert:

$$R_{12} = -\tfrac{1}{3}\frac{d''_{23}{}^2 p'p''}{p_{12}{}^2 p'''} = \tfrac{1}{3}\frac{d'_{13}{}^2 p'p''}{p_{12}{}^2 p'''},$$

welche Formel sich mit Hilfe von 14) umwandelt in:

$$16)\qquad R_{12} = \tfrac{1}{3}\frac{p'p''}{p'''p_{12}}|M'_{12}M''_{12}|.$$

Das durch diese Gleichung sich ergebende Vorzeichen von $R_{12}$ stimmt mit dem durch Gleichung 14) erhaltenen von $|M'_{12}M''_{12}|$ überein und giebt an, ob bei einem Fortschreiten auf $k_{12}$ sich die Schmiegungsebene dieser Curve dem Mittelpunkte $S$ ab- oder zudreht.

Um das Centrum der Schmiegungskugel zu finden, wickeln wir die Krümmungslinien $k_{12}$ einmal von $F''$, dann von $F'$ ab. Die Elemente der hierbei erhaltenen, zu $k_{12}$ reciproken Curven sind $d\varrho'_{12}$ und $d\varrho''_{12}$, wo sich die Differentialzeichen auf die Veränderung der Krümmungsradien bei einem Fortrücken nach der ihnen zugehörigen Krümmungsrichtung beziehen. Sehen wir $d\varrho'_{12}$ und $d\varrho''_{12}$ als die Geschwindigkeiten der Endpunkte der Geraden $|M'_{12}M''_{12}|$ an, so erhalten wir nach dem Vorstehenden im Schnitt zweier unendlich nahen Lagen dieser Geraden, also im Gleitpunkte derselben, das Centrum der Schmiegungskugel, in der Gleitungsgeschwindigkeit das halbe Bogenelement für den Ort dieser Centra. Nun ist nach 15)

$$d\varrho'_{12} = -3\frac{p'''}{p'}ds_{12} \text{ und entsprechend } d\varrho''_{12} = -3\frac{p'''}{p''}ds_{12}.$$

$$17)\qquad \frac{d\varrho'_{12}}{d\varrho''_{12}} = \frac{p''}{p'}.$$

Bei der Aufsuchung des Gleitpunktes können $d\varrho'_{12}$ und $d\varrho''_{12}$ durch die ihnen proportionalen Grössen $p''$ und $p'$ ersetzt werden. Der Gleitpunkt der Geraden $|M'_{12}M''_{12}|$ kann dann bestimmt werden, indem man diese Gerade als ein ähnlich-veränderliches System auffasst. Eine auf anderem Princip beruhende Construction liefert folgende Ueberlegung. Lassen wir in der Ebene $\tau'''$ auf $P$ die Kräfte $p'$ und $p''$ senkrecht zu den gleich bezeichneten Abständen wirken, so theilt deren Resultante, also auch die in $t_{12}$ zur Ebene $|St_{12}|$ normal errichtete Ebene, die Gerade $|M'_{12}M''_{12}|$ nach einem Verhältnisse, welches gemäss den Gesetzen des Hebels der reciproke Werth des durch den Gleitpunkt hervorgerufenen Schnittverhältnisses ist; bei Vertau-

schung der Abschnitte ergiebt sich also dieses Schnittverhältniss $\frac{p''}{p'}$ selbst. Zusammenfassend kommt:

Der Gleitpunkt der Geraden $|M'_{12}M''_{12}|$, auf deren Endpunkte $M'_{12}$ und $M''_{12}$ längs der zugehörigen Normalen zwei den Abständen $p''$ und $p'$ gleiche Geschwindigkeiten wirken, bildet das Centrum für die Schmiegungskugel der Krümmungslinie $k_{12}$. Dasselbe wird auch erhalten, indem man zu dem Schnittpunkte der Geraden $|M'_{12}M''_{12}|$ mit der zur Ebene $[St_{12}]$ in $t_{12}$ errichteten Normalebene bezüglich der Endpunkte der genannten Geraden den symmetrischen Punkt sucht.

Die letztgenannte Construction liefert bei Krümmungslinien einer Kugel deren Mittelpunkt, bei Parallelkreisen einer Rotationsfläche einen variablen Punkt der Rotationsaxe als Mittelpunkt der Schmiegungskugel, welcher mit der Projection des Flächenpunktes auf diese Drehaxe in einer Involution steht, deren Doppelpunkte die reellen oder imaginären Brennpunkte des Meridians in dieser Axe sind. Der Involution gehören also auch $M'_{12}$ und $M''_{12}$ als conjugirte Punkte an. Die Uebertragung der so erhaltenen speciellen Figur auf den allgemeinen Fall liefert den Satz:

Das Centrum der Schmiegungskugel und der Krümmungsmittelpunkt für $k_{12}$, ferner $M'_{12}$ und $M''_{12}$ bilden zwei Paare zugeordneter Punkte einer Involution, deren Mittelpunkt in die Ebene $[St_{12}]$ fällt.

Die vorstehenden Entwickelungen lassen ferner ein Element, also die Indicatrix bezüglich die Krümmungen der zu einer Fläche zweiter Ordnung, etwa $F'$, gehörigen Centrafläche bestimmen. Bei Abwickelung der $k_{12}$ von $F'''$ ist nach Formel 13), wenn der Krümmungsradius des Schnittes der Centrafläche mit Ebene $\tau''$ in $M'_{12}$ durch $\mathsf{P}$ bezeichnet wird:

$$\mathsf{P}\frac{ds_{12}}{d\varrho'_{12}} = \varrho'_{12}, \quad \text{also} \quad \mathsf{P} = -3\frac{p'''}{p'}\varrho'_{12}.$$

Das positive oder negative Vorzeichen von $\mathsf{P}$ bestimmt, ob die Curve der Centrafläche von deren Tangentialebene $\tau'''$ in zu $p'''$ entgegengesetztem oder gleichem Sinne abweicht. Um den Krümmungsradius eines weiteren Schnittes zu gewinnen, rücken wir auf der zweiten Krümmungslinie $k_{13}$ um die Strecke $ds_{13}$ weiter und ziehen dann wieder die Flächennormale, welche die vorhergehende bis auf unendlich kleine Grössen dritter Ordnung in $M'_{13}$ trifft. Auf der neuen Normalen erhält man einen dem Punkte $M'_{12}$ benachbarten Punkt der Centrafläche, indem man aus $M'_{13}$ durch $M'_{12}$ einen Kreis schlägt und von dessen Schnittpunkt mit der zweiten Normalen $\delta\varrho'_{12}$ abträgt, wo sich also $\delta\varrho'_{12}$ auf die Variation von $\varrho'_{12}$ bezieht, welche ein Fortschreiten auf $k_{13}$ bedingt. Da $\varrho'_{12} = \frac{a'^2 - a'''^2}{p'}$, wird $\delta\varrho'_{12} = -\frac{a'^2 - a'''^2}{p'^2}\delta p'$. Aus der

Figur folgt $\delta p' = p'' \frac{ds_{13}}{\varrho'_{13}}$, daher $\delta \varrho'_{12} = -\frac{a'^2 - a'''^2}{p_1^2} p'' \frac{ds_{13}}{\varrho'_{13}} = -\frac{p''}{p'} \frac{\varrho'_{12}}{\varrho'_{13}} ds_{13}$.
Die Abweichung der Krümmungslinie $k_{13}$ von der Ebene $\tau'''$ ist $\frac{ds_{13}^2}{2\varrho'''_{13}}$, demnach die Abweichung der Centrafläche in dem zu $M'_{13}$ benachbarten Punkte $d\nu = \frac{\varrho'_{13} - \varrho'_{12}}{\varrho'_{13}} \frac{ds_{13}^2}{2\varrho'''_{13}}$ oder $d\nu = \frac{p'''}{p'} \frac{ds_{13}^2}{2\varrho'_{13}}$. Der Kreisbogen zwischen den zwei betrachteten unendlich nahen Normalen ist gleich $\frac{\varrho'_{13} - \varrho'_{12}}{\varrho'_{13}} ds_{13} =$ $-\frac{p''}{p'} \frac{\varrho''_{12}}{\varrho'_{13}} ds_{13}$, daher die Entfernung der benachbarten Punkte der Centrafläche als Hypotenuse des aus diesem Bogen und $\delta \varrho'_{12}$ gebildeten rechtwinkligen Dreiecks gleich $\frac{p''}{p'} \frac{|M'_{12} M''_{12}|}{\varrho'_{13}} ds_{13}$ und somit der Krümmungsradius des durch diese Strecke gelegten Normalschnittes der Centrafläche gleich $\frac{p''^2}{p' p'''} \frac{\varrho'^2_{12} + \varrho''^2_{12}}{\varrho'_{13}}$. Für die Neigung dieses Normalschnittes gegen die nach dem Krümmungsmittelpunkte $M'_{12}$ gerichtete Normale der $F'$ ergiebt sich $\frac{\varrho''_{12}}{\varrho'_{12}}$; der Normalschnitt geht also durch $|M'_{12} M''_{12}|$, ist zu dem erstbetrachteten, in der Ebene $\tau''$ liegenden Schnitte conjugirt und hiermit die Indicatrix der Centrafläche im Punkte $M'_{12}$ bestimmt. Für das der Scheitelhöhe $d\nu$ entsprechende Element der Indicatrix längs der Normalen von $F'$ folgt $\sqrt{2\mathrm{P}\,d\nu} = \frac{p''}{p'} \sqrt{-3\frac{\varrho'_{12}}{\varrho'_{13}}} ds_{13}$. Falls der in diesem Ausdruck enthaltene Wurzelwerth imaginär wird, besitzen die Scheitelhöhe $d\nu$ und die Bogenhöhe des letztberechneten Elements entgegengesetzte Richtung; die Indicatrix der Centrafläche wird also eine Hyperbel. Hiermit folgt:

Die sich entsprechenden Punkte auf einer Fläche zweiter Ordnung und ihrer Centrafläche sind stets verschiedener Art, so dass einem elliptischen Punkte ein hyperbolischer und umgekehrt entspricht.

Einem ebenen unendlich kleinen Schnitte oder der Indicatrix der einen kann daher niemals ein gleichfalls ebener Schnitt der andern Fläche entsprechen. Der ferner bei der vorstehenden Entwickelung benutzte Satz, dass $|M'_{12} M''_{12}|$ und die Normale von $F'$ conjugirte Tangenten der Centrafläche sind, findet seine Verallgemeinerung in dem schon an anderer Stelle* hergeleiteten Gesetze, nach welchem die Verbindungslinie des Krümmungsmittelpunktes einer Krümmungslinie mit dem zugehörigen Krümmungscentrum der Fläche, also die von letzterem auf die Schmiegungsebene der Krümmungslinie gefällte Senkrechte, bezüglich der Centrafläche zur Normalen conjugirt ist.

* Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. XXVIII S. 56.

## § 4.

Die in § 1 gefundenen Formeln, obgleich für die Systeme reciproker Raumcurven entwickelt, haben eine weitergehende Bedeutung. Die Schnittlinie zweier sich folgenden Schmiegungsebenen bildet mit der Tangente den halben Contingenzwinkel; dies berücksichtigend, gelten die dort gebildeten Gleichungen überhaupt für die unendlich kleinen Ortsveränderungen reciproker Elemente.

Wir recapituliren die gebrauchten Bezeichnungen nochmals. Bedeuten $P_1$ und $P_2$ zwei conjugirte Punkte, $\pi_2$ und $\pi_1$ deren Polarebenen, $t_1$ und $t_2$ zwei in $\pi_1$ bezüglich $\pi_2$ liegende, durch $P_1$ bezüglich $P_2$ gehende gerade Linien; $d\vartheta_1$, $d\vartheta_2$ die sich entsprechenden unendlich kleinen Drehungen dieser Geraden in der Ebene $\pi_1$, $\pi_2$ um $P_1$, $P_2$; $d\eta_1$, $d\eta_2$ die Neigung (der Torsionswinkel) zweier durch diese Geraden gelegten, von $\pi_1$ und $\pi_2$ unendlich wenig abweichenden Ebenen gegen $\pi_1$ und $\pi_2$; $ds_1$ und $ds_2$ die unendlich kleinen Entfernungen der den neuen Ebenen zugehörigen Pole von $P_1$ im ersten, bezüglich von $P_2$ im zweiten System; ferner $d$ den zur Schnittlinie $|\pi_1\pi_2|$ parallele Halbmesser der Directrix, $O$ die Spur dieser Schnittlinie mit der zu $d$ conjugirten Durchmesserebene $[P_1SP_2]$; $\varphi_1$, $\psi_1$ die Winkel der Geraden $t_1$ mit $OP_1$ und $|\pi_1\pi_2|$; $\varphi_2$, $\psi_2$ die entsprechenden Grössen für $t_2$, so gelten, wenn wir noch der Kürze wegen die Winkel von $|\pi_1\pi_2|$ mit $OP_1$ und $OP_2$ durch $\mu_1$ und $\mu_2$ bezeichnen, nach § 1 folgende Formeln:

$$\frac{\sin\psi_1 . \sin\psi_2}{\sin\varphi_1 . \sin\varphi_2} = \frac{a_0^2 b_0^2 c_0^2}{d^4 p_1 p_2 \sin\mu_1 \sin\mu_2},$$

$$\frac{ds_1}{d\vartheta_1} . \frac{d\vartheta_2}{d\eta_2} = \frac{a_0 b_0 c_0}{p_1^{1/2} p_2^{1/2}} \left(\frac{\sin\mu_1 \sin\varphi_2 \sin\psi_2}{\sin\mu_2 \sin\varphi_1 \sin\psi_1}\right)^{1/2},$$

$$\frac{ds_1}{d\eta_1} . \frac{ds_2}{d\eta_2} = \frac{a_0^2 b_0^2 c_0^2}{p_1^2 p_2^2},$$

$$\frac{ds_1 . d\vartheta_1 . d\eta_1}{ds_2 . d\vartheta_2 . d\eta_2} = \frac{p_1}{p_2},$$

wo $a_0$, $b_0$, $c_0$ die halben Hauptaxen der Directrix, $p_1$, $p_2$ die Entfernungen der Ebenen $\pi_1$, $\pi_2$ vom Mittelpunkte $S$ der Involution sind. Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\frac{d\vartheta_2}{d\vartheta_1} = \frac{\sin\mu_1 \sin\varphi_2 \sin\psi_2}{\sin\mu_2 \sin\varphi_1 \sin\psi_1},$$

$$\frac{ds_1}{d\eta_2} = \frac{a_0 b_0 c_0}{p_1^{1/2} p_2^{1/2}} \left(\frac{\sin\mu_1 \sin\varphi_2 \sin\psi_2}{\sin\mu_2 \sin\varphi_1 \sin\psi_1}\right)^{1/2},$$

$$\frac{ds_2}{d\eta_1} = \frac{a_0 b_0 c_0}{p_1^{1/2} p_2^{1/2}} \left(\frac{\sin\mu_2 \sin\varphi_1 \sin\psi_1}{\sin\mu_1 \sin\varphi_2 \sin\psi_2}\right)^{1/2},$$

welche Beziehungen sich auch in die fortlaufende Proportion zusammenfassen lassen:

$$18)\quad ds_1 : \frac{d\vartheta_1}{p_1^{1/2}\left(\frac{\sin\varphi_1 \sin\psi_1}{\sin\mu_1}\right)^{3/2}} : \frac{a_0 b_0 c_0}{p_1^2} d\eta_1 : \frac{du}{\left(p_1 \frac{\sin\varphi_1 \sin\psi_1}{\sin\mu_1}\right)^{1/2}}$$
$$= \frac{a_0 b_0 c_0}{p_2^2} d\eta_2 : \frac{d\vartheta_2}{p_2^{1/2}\left(\frac{\sin\varphi_2 \sin\psi_2}{\sin\mu_2}\right)^{3/2}} : ds_2 : \frac{du}{\left(p_2 \frac{\sin\varphi_2 \sin\psi_2}{\sin\mu_2}\right)^{1/2}},$$

wo $du$ irgend eine Urvariable bedeutet.

Die zu $d\vartheta_1$ gehörige Richtung von $d\vartheta_2$ bestimmt sich am einfachsten durch die auf $|\pi_1 \pi_2|$ durch $t_1$ und $t_2$ gebildete Involution, wodurch auch die Vorzeichen von $\sin\varphi_1$ und $\sin\varphi_2$ bestimmt sind; die Richtung von $ds_2$ entweder durch die auf $t_2$ inducirte Involution oder nach dem durch Formel 11) entwickelten Satze über das Verhältniss entsprechender Abstände in reciproken Systemen. $p_1$, $p_2$, $\sin\mu_1$, $\sin\mu_2$, $\sin\psi_1$ und $\sin\psi_2$ werden stets positiv genommen. (Vergl. S. 138.)

Für ebene involutorisch-reciproke Systeme findet man:

$$ds_1 : \frac{a_0^2 b_0^2}{p_1^2 p_2} d\vartheta_1 : du = \frac{a_0^2 b_0^2}{p_1 p_2^2} d\vartheta_2 : ds_2 : du,$$

wo $p_1$, $p_2$ wieder die Entfernungen der entsprechenden Tangenten vom Involutionscentrum bedeuten. —

Nach dieser vorgängigen Entwickelung wenden wir uns zur Betrachtung reciproker Flächen. Lassen wir bei der ersten Fläche $\Phi_1$ die Tangentialebene längs einer Curve $k_1$ gleiten, so bilden die den Tangentialebenen reciproken Punkte auf der entsprechenden Fläche $\Phi_2$ eine zweite Curve $k_2$; in diesem Sinne können wir sagen, dass jedem Punkte auf $\Phi_1$ ein solcher auf $\Phi_2$, jeder Curve $k_1$ auf $\Phi_1$ eine solche $k_2$ auf $\Phi_2$ entspreche. Die Tangente an $k_1$ als Verbindungslinie unendlich naher Punkte auf $\Phi_1$ entspricht hierbei der Schnittlinie benachbarter Berührungsebenen längs $k_2$.

Bei sich entsprechenden Curven zweier reciproken Flächen sind die Tangenten der einen Curve reciprok zu den, den Elementen der entsprechenden Curve conjugirten Richtungen.

Hieraus ergiebt sich sofort:

Die in entsprechenden Punkten zweier reciproken Flächen durch deren Tangenten gebildeten Strahlbüschel sind projectivisch verwandt, und zwar entspricht einer Asymptote der einen eine Asymptote der projectivischen Strahlinvolution.

Da hiernach zu einer reellen Haupttangente an $\Phi_1$ eine gleiche an $\Phi_2$ reciprok ist, folgt:

Bei zwei reciproken Flächen entspricht einem elliptischen oder hyperbolischen Punkte der einen stets ein Punkt gleicher Art auf der zweiten Fläche; hiernach ist die Reciprokalfläche einer Regelfläche wieder eine Regelfläche.

Da die Ordnung und Classe einer Regelfläche stets durch dieselbe Zahl ausgedrückt werden, ist der Grad der Reciprokalfläche gleich dem der erstgegebenen Regelfläche, ein von Cayley aufgefundener Satz.

Im Punkte einer Fläche fallen drei Schnittpunkte für jede Haupttangente dieses Punktes zusammen; nach dem Vorstehenden coincidiren in der Tangentialebene eines Flächenpunktes drei durch eine Haupttangente desselben an die Fläche gelegte Berührungsebenen.

Legen wir durch $\Phi_1$ in unendlich kleinem Abstande zweiter Ordnung von der Tangentialebene $\pi_1$ eine hierzu parallele Schnittebene, so entspricht dieser im reciproken System ein der Fläche $\Phi_2$ unendlich naher Punkt, aus welchem sich ein reeller Tangentialkegel an letztere Fläche legen lässt, dessen halbe Oeffnung unendlich wenig von einem Rechten abweicht und dessen Berührungscurve mit $\Phi_2$ bis auf Grössen höherer Ordnung ein zur Indicatrix in $\pi_2$ ähnlicher Kegelschnitt ist, dessen Ebene bis auf einen Winkel zweiter Ordnung zur Tangentialebene $\pi_2$ parallel ist. Da nun $\pi_2$ die Höhe dieses Kegels zwischen seinem Scheitelpunkte und letzterer Ebene halbirt, folgt unter Benutzung des S. 137 hergeleiteten Satzes:

Einem unendlich kleinen ebenen Schnitte der einen entspricht ein gleichartiger ebenfalls ebener Schnitt der Reciprokalfläche; die Scheitelhöhen derartiger sich entsprechenden unendlich kleinen Flächentheile verhalten sich wie die Entfernungen ihrer Tangentialebenen vom Mittelpunkte der Involution.

Der vorstehende Satz wird für diejenigen Flächenpunkte, welche in einer der Haupttangente benachbarten Richtung liegen, hinfällig. Für derartige Punkte gilt überhaupt der Satz nicht mehr, dass sie bis auf Grössen höherer Ordnung in einem der Indicatrix ähnlichen Kegelschnitte liegen.

Um eine Beziehung zwischen den Krümmungen sich entsprechender Flächendifferentiale zu gewinnen, gehen wir von den Coordinatengleichungen derselben aus. Als $Z$-Axe werde in beiden Systemen die bezügliche Flächennormale, als $X$- und $Y$-Axe zwei sich entsprechende Paare conjugirter Flächentangenten gewählt; es mögen sich also die Richtungen von $X_1$ und $X_2$, $Y_1$ und $Y_2$ auf den reciproken Flächen entsprechen, in welchem Falle $X_1$ und $Y_2$, $Y_1$ und $X_2$ reciproke Gerade sind. Hiernach laute die Gleichung von $\Phi_1$:

$$z_1 = \frac{r_1}{2} x_1^2 + \frac{s_1}{2} y_1^2 + \dots$$

und diejenige von $\Phi_2$:

$$z_2 = \frac{r_2}{2} x_2^2 + \frac{s_2}{2} y_2^2 + \dots$$

Nach dem eben gefundenen Satze über die Scheitelhöhen reciproker Elemente muss sein:

$$\frac{\frac{r_1}{2}x_1^2+\frac{s_1}{2}y_1^2}{p_1}=\frac{\frac{r_2}{2}x_2^2+\frac{s_2}{2}y_2^2}{p_2},$$

wo $p_1$ und $p_2$ nach früherer Bezeichnung die Entfernung der Tangentialebenen $\pi_1$ und $\pi_2$ vom Involutionsmittelpunkte darstellen. Da für $y_1=0$ auch nach der Wahl der Coordinatensysteme $y_2=0$ wird, kommt $\frac{x_1}{x_2}=\sqrt{\frac{r_2 p_1}{r_1 p_2}}$.

Anderseits erhält man, wenn der Berührungspunkt der Tangentialebene an $\Phi_2$ längs $X_2$ um $x_2$ verschoben wird, als Gleichung der letztern:

$$z-z_2=r_2 x_2(x-x_2),$$

demnach als Torsionswinkel der um $Y_2$ gedrehten Tangentialebene gegen $\pi_2$:

$$d\eta_2=\frac{r_2 x_2}{sin(X_2 Y_2)}.$$

Dieser Drehung um $Y_2$ entspricht im ersten System die Verschiebung $ds_1=x_1$ längs $X_1$; daher wird nach Formel 18) in abgekürzter Schreibweise:

$$\frac{ds_1}{d\eta_2}=A_{x_1 y_2},$$

wo sich die in $A_{x_1 y_2}$ auftretenden Winkelgrössen $\varphi_1$, $\psi_1$ auf $X_1$ als Verschiebungs-, $\varphi_2$, $\psi_2$ auf $Y_2$ als Drehaxe beziehen; oder:

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{r_2}{sin(X_2 Y_2)}\cdot A_{x_1 y_2}.$$

Der Vergleich mit dem vorhin entwickelten Werthe für $\frac{x_1}{x_2}$ giebt:

$$\sqrt{r_1 r_2}=\sqrt{\frac{p_1}{p_2}\cdot\frac{sin(X_2 Y_2)}{A_{x_1 y_2}}}.$$

Die Krümmungsradien der Normalschnitte von $\Phi_1$ und $\Phi_2$ längs der Coordinatenaxen $X_1$, $Y_1$, $X_2$, $Y_2$ seien $\varrho_{x_1}$, $\varrho_{y_1}$, $\varrho_{x_2}$, $\varrho_{y_2}$; nach letzter Gleichung wird:

$$\sqrt{\varrho_{x_1}\cdot\varrho_{x_2}}=\sqrt{\frac{p_2}{p_1}\cdot\frac{A_{x_1 y_2}}{sin(X_2 Y_2)}}.$$

Indem wir in dieser Gleichung einmal die Indices 1 und 2, dann $x$ und $y$ vertauschen, ergeben sich die entsprechend gebildeten Gleichungen:

$$\sqrt{\varrho_{x_1}\cdot\varrho_{x_2}}=\sqrt{\frac{p_1}{p_2}\cdot\frac{A_{x_2 y_1}}{sin(X_1 Y_1)}},$$

$$\sqrt{\varrho_{y_1}\cdot\varrho_{y_2}}=\sqrt{\frac{p_2}{p_1}\cdot\frac{A_{y_1 x_2}}{sin(X_2 Y_2)}},$$

$$\sqrt{\varrho_{y_1}\cdot\varrho_{y_2}}=\sqrt{\frac{p_1}{p_2}\cdot\frac{A_{y_2 x_1}}{sin(X_1 Y_1)}}.$$

Nennen wir die sich entsprechenden unendlich kleinen Drehungen der $X$- und $Y$-Axen innerhalb der Berührungsebenen $d\vartheta_{x_1}$, $d\vartheta_{y_1}$, $d\vartheta_{x_2}$, $d\vartheta_{y_2}$, so können diese vier Gleichungen nach 18) auch geschrieben werden:

$$
19)\quad \left\{
\begin{aligned}
\sqrt{\varrho_{x_1}\cdot\varrho_{x_2}} &= \frac{a_0 b_0 c_0}{p_1 p_2 \sin(X_2 Y_2)}\cdot\sqrt{\frac{d\vartheta_{y_2}}{d\vartheta_{x_1}}},\\
\sqrt{\varrho_{x_1}\cdot\varrho_{x_2}} &= \frac{a_0 b_0 c_0}{p_1 p_2 \sin(X_1 Y_1)}\cdot\sqrt{\frac{d\vartheta_{y_1}}{d\vartheta_{x_2}}},\\
\sqrt{\varrho_{y_1}\cdot\varrho_{y_2}} &= \frac{a_0 b_0 c_0}{p_1 p_2 \sin(X_2 Y_2)}\cdot\sqrt{\frac{d\vartheta_{x_2}}{d\vartheta_{y_1}}},\\
\sqrt{\varrho_{y_1}\cdot\varrho_{y_2}} &= \frac{a_0 b_0 c_0}{p_1 p_2 \sin(X_1 Y_1)}\cdot\sqrt{\frac{d\vartheta_{x_1}}{d\vartheta_{y_2}}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Die Gleichsetzung der ersten und zweiten oder der dritten und vierten dieser Gleichungen liefert die Proportion:

$$\frac{d\vartheta_{y_2}}{\sin(X_2 Y_2)}:\frac{d\vartheta_{x_1}}{\sin(X_1 Y_1)}=\frac{\sin(X_2 Y_2)}{d\vartheta_{x_2}}:\frac{\sin(X_1 Y_1)}{d\vartheta_{y_1}},$$

welche Proportion auch aus der Projectivität der reciproken Strahlbüschel der Tangenten hätte erschlossen werden können.

Die Multiplication aller vier Gleichungen liefert:

$$20)\qquad \varrho_{x_1}\cdot\varrho_{y_1}\,.\sin^2(X_1 Y_1)\,.\,\varrho_{x_2}\cdot\varrho_{y_2}\,.\sin^2(X_2 Y_2)=\frac{a_0^4 b_0^4 c_0^4}{p_1^4 p_2^4}.$$

Das Product aus den totalen Krümmungen zweier reciproken Flächenelemente ist der vierten Potenz des Productes ihrer Entfernungen vom Involutionsmittelpunkte proportional.

Bezeichnen wir die Absolutwerthe (Moduln) des geometrischen Mittels aus den Hauptkrümmungsradien für die beiden reciproken Flächen mit $R_1$, $R_2$, so folgt:

$$R_1\,.\,R_2=\frac{a_0^2 b_0^2 c_0^2}{p_1^2 p_2^2}.$$

Für einen elliptischen Punkt bedeuten $R_1$, $R_2$ die Radien zweier die reciproken Elemente berührenden Kugeln, auf welche sich die erwähnten Flächenelemente abwickeln lassen; für einen hyperbolischen Punkt erhalten wir in $R_1$ und $R_2$ die Windungsradien der auf $\Phi_1$ und $\Phi_2$ verlaufenden und zu einander reciproken asymptotischen Curven, deren Tangenten und Schmiegungsebenen also mit den Haupttangenten und Berührungsebenen der reciproken Flächen zusammenfallen. In der letztentwickelten Gleichung ist durch die Wahl des Vorzeichens in beiden Fällen die Richtung von $R_1$ und $R_2$ berücksichtigt. Für reelle asymptotische Linien folgen die vorstehenden Sätze ohne Weiteres aus Formel 6). Der vorstehend geführte Beweis ist von dieser Reellität unabhängig. Der Satz selbst liefert wieder eine Bestätigung für die Berechtigung des für die untersuchte Art der Abhängigkeit gewählten Namens der „Reciprocität“; bei gegebenen Tangentialebenen bleibt das Product aus den Krümmungen der Flächenelemente **constant.**

Sowohl aus den allgemeinen Beziehungen zwischen den Verschiebungen sich beliebig entsprechender Punkte, wie aus den bisherigen Entwickelungen folgt, dass sich die Schnittlinien beider reciproken Flächen mit einer ihrer Tangentialebene parallelen und unendlich nahen Ebene als affine Curven entsprechen. Für das Verhältniss entsprechender Flächentheile der beiden ebenen Systeme und hiermit für ihren Affinitätscoefficienten folgt $\frac{p_1 R_1}{p_2 R_2}$; das Verhältniss entsprechender Bogendifferentiale ergiebt sich nach Seite 148:

$$\frac{x_1}{x_2} = \sqrt{\frac{p_1 \varrho_{x_1}}{p_2 \varrho_{x_2}}}. -$$

Für Bogenelemente, welche die asymptotische Curve berühren, gelten diese Entwickelungen nicht mehr. In diesem Falle erhält man die entsprechenden Beziehungen, wenn man die Haupttangenten der Flächenelemente als Coordinatenaxen annimmt und, unter Berücksichtigung der Glieder dritter Ordnung, wieder von dem Satze über das Verhältniss zwischen den Entfernungen reciproker Elemente Gebrauch macht. Diese Rechnung liefert folgendes Resultat:

Das Verhältniss zweier entsprechenden, die Asymptoten berührenden Curvenelemente ist constant, also gleich dem nach Formel 10) oder 12) ausdrückbaren Verhältnisse zwischen den Bogendifferentialen der reciproken asymptotischen Curven.

Bezeichnen ferner $R^{(I)} \varrho^{(I)}$, $R^{(II)} \varrho^{(II)}$ die Windungs- und Krümmungsradien der berührenden, $R_1 \varrho_1$, $R_2 \varrho_2$ die entsprechenden Grössen für die einander reciproken asymptotischen Curven, so gilt noch folgende Gleichung:

$$21) \qquad \frac{\varrho_1}{\varrho^{(I)}} + \frac{\varrho_2}{\varrho^{(II)}} = 2.$$

Falls zwischen der betrachteten Curve und der Haupttangente an $\Phi_1$ bezüglich $\Phi_2$ eine zweipunktige Berührung stattfindet, fällt die Schmiegungsebene der ersteren ebenfalls in die Berührungsebene der Fläche und es finden die weiteren Gleichungen statt:

$$22) \qquad R^{(I)} = \frac{R_1 \varrho_1}{3 \varrho_1 - 2 \varrho^{(I)}}, \text{ bezüglich } R^{(II)} = \frac{R_2 \varrho_2}{3 \varrho_2 - 2 \varrho^{(II)}}.$$

Wir entnehmen diesen Beziehungen einige Folgerungen.

Eine beliebige durch die Haupttangente gelegte Ebene schneidet $\Phi_1$ in einer diese Tangente osculirenden Curve, für welche also $\varrho^{(I)} = \infty$ ist. Das reciproke Gebilde ist der aus einem Punkte der reciproken Asymptote an $\Phi_2$ gelegte Tangentialkegel, für dessen Berührungscurve sich nach dem Vorstehenden $\varrho^{(II)} = \frac{\varrho_2}{2}$, $R^{(II)} = \frac{R_2}{2}$, also beide Grössen als constant ergeben.

Falls die Spitze dieses Kegels in die Fläche $\Phi_2$ selbst fällt, wird diese Betrachtung hinfällig. In diesem Falle ist die Sehne der Kegelberührungs-

curve zu deren Tangente conjugirt; und da die conjugirten Halbmesser einer Hyperbel bei der Annäherung an eine Asymptote in der Grenze mit dieser gleiche Winkel bilden, folgt, dass der Contingenzwinkel der asymptotischen Curve das arithmetische Mittel zu den unendlich kleinen Drehungen der einander conjugirten Sehne und Tangente, also $\frac{3}{4}$ des Contingenzwinkels der Kegelberührungscurve bildet. Für letztere ist daher $\varrho^{(II)} = \frac{3}{4}\varrho_2$ und somit $R^{(II)} = \frac{3}{4}R_2$. Für das reciproke Gebilde, nämlich für den entsprechenden Zweig des Schnittes von $\Phi_1$ mit der Berührungsebene, folgt $\varrho^{(I)} = \frac{3}{2}\varrho_1$, $R^{(I)} = \infty$. Die Krümmungen der beiden durch einen hyperbolischen Flächenpunkt laufenden asymptotischen Curven bestimmen also in sehr einfacher Weise die Krümmungen in den sie berührenden Zweigen der erwähnten ebenen Schnitt- und der Kegelberührungscurve.

## § 5.

Die bisherigen Entwickelungen sind für den Fall, dass der betrachtete Flächenpunkt auf $\Phi_1$ ein parabolischer (ein Wendepunkt) sei, zu ergänzen, wobei zunächst einige Eigenschaften der Fläche in der Nähe dieses Punktes entwickelt werden.

Die Gleichung einer Fläche in der Nähe eines parabolischen Punktes kann stets in der Form gegeben werden:

$$z = \frac{r}{2}x^2 + \left(\frac{t}{6}x^3 + \frac{u}{2}x^2y + \frac{w}{6}y^3\right) + \ldots,$$

wo die Doppelasymptote des Wendepunktes zur $Y$-Axe und, was immer möglich ist, die $X$-Axe derart gewählt wurde, dass der Coefficient $\frac{v}{2}$ des Gliedes $xy^2$ verschwindet.

Sämmtliche Wendepunkte der Fläche bilden deren Wendecurve, welche die weitere Gleichung $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ erfüllt. Als zweite Gleichung dieser Curve erhalten wir hiernach:

$$r \, . \, wy = u^2x^2 + \ldots$$

Die gewählte $X$-Axe ist also die Tangente der Wendecurve.

Wird aus einem beliebigen Punkte $\xi\eta$ der Berührungsebene ein Tangentialkegel an die Fläche gelegt, so ergiebt sich als zweite Gleichung seiner Berührungscurve:

$$z = \frac{\partial z}{\partial x}(x-\xi) + \frac{\partial z}{\partial y}(y-\eta).$$

Die Ausführung der Rechnung liefert, indem wir uns auf die niedrigsten Potenzen beschränken:

$$r\xi x = -\frac{w}{2}\eta y^2 + \ldots$$

Die Berührungscurve tangirt hiernach die Doppelasymptote; für alle Punkte einer durch den Wendepunkt laufenden Geraden $\eta = m\xi$ wird ihr Krümmungs-

radius gleich $-\frac{r}{w \, . \, m \sin(xy)}$, der Parameter längs der $X$-Axe $\left(\lim \frac{y^2}{2x}\right)$ gleich $-\frac{r}{wm}$. Das Strahlbüschel der Tangenten durch den Wendepunkt ist der Punktreihe der Krümmungsmittelpunkte projectivisch zugeordnet; jede Tangente schneidet auf der zur $X$-Axe parallelen Geraden $y = -\frac{r}{w}$ den Parameter ab, welcher den Berührungscurven der aus ihren Punkten an die Fläche gelegten Tangentialkegel angehört. Die der Tangente der Wendecurve angehörigen Berührungscurven osculiren die Doppelasymptote.

Die vorstehende Entwickelung wird für $m = \infty$, also für die Punkte der Doppelasymptote, ungiltig. In diesem Falle ergiebt sich für die Berührungscurve die Gleichung:

$$\left(\frac{r}{2} - \frac{u}{2}\eta\right) - \frac{w}{2}\eta\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \ldots = 0, \quad \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{r - u\eta}{w\eta}.$$

Die Berührungscurve besitzt diesmal im parabolischen Punkte der Fläche einen isolirten oder Doppelpunkt, dessen Tangenten eine Involution mit der $X$- und $Y$-Axe als Asymptoten bilden. Die Doppelasymptote ist ein isolirter oder Doppelstrahl des Berührungskegels, dessen beide Mäntel einander osculiren, da ihre $z$-Ordinaten sich längs der $X$-Axe nur um Grössen dritter Ordnung von denjenigen der Wendecurve unterscheiden. Die Schmiegungsebene dieser Berührungscurve fällt im Allgemeinen nicht in die $XY$-Ebene, so dass auch der Tangentialkegel diese Ebene nicht osculirt. Falls die Zweige der Berührungscurve sich den Asymptoten der Involution nähern, geht die Schmiegungsebene in die Berührungsebene der Fläche über.

Die diesen Asymptoten entsprechenden Punkte der Doppelasymptote $Y$, nämlich $\eta = 0$ und $\eta = \frac{r}{u}$, verlangen eine besondere Betrachtung. Für den ersten, also für den parabolischen Flächenpunkt selbst, ergeben sich die Gleichungen der Berührungscurve:

$$\frac{r}{2}x^2 + \frac{w}{3}y^3 + \ldots = 0, \qquad z = -\frac{w}{6}y^3 + \ldots$$

Die Curve bildet längs des positiven oder negativen Theils der $Y$-Axe eine Schnabelspitze (Cuspidalpunkt), für welche die Schmiegungsebene mit der $XY$-Ebene zusammenfällt. Die Singularität stimmt mit derjenigen überein, welche der Schnitt der Fläche mit ihrer Berührungsebene im Wendepunkte zeigt.

Für den zweiten Ausnahmefall, $\eta = \frac{r}{u}$, wird für die Berührungscurve des Tangentialkegels gefunden:

$$\frac{wr}{2u}y^2 = \left(\frac{t}{3} - \frac{b_4}{6} \cdot \frac{r}{u}\right)x^3 + \ldots,$$

wo $\frac{b_4}{6}$ den Coefficienten von $x^3y$ in der Flächengleichung bedeutet. Die Curve bildet diesmal längs der $X$-Axe eine Spitze, deren Schmiegungsebene wieder in die Berührungsebene der Fläche fällt. Im Punkte $\eta = \frac{r}{u}$ selbst schneiden sich drei aufeinander folgende, längs der Wendecurve gelegte Berührungsebenen der Fläche; derselbe gehört also der Cuspidallinie der aus den Doppelasymptoten gebildeten abwickelbaren Fläche an.

Die Discussion der Gleichung $\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{r - u\eta}{w\eta}$ zeigt, dass, wenn $u$ und $w$ gleiches Vorzeichen haben, $\frac{y}{x}$ für alle Punkte zwischen $\eta = 0$ und $\eta = \frac{r}{u}$ reell, für alle ausserhalb liegenden imaginär wird; besitzen aber $u$ und $w$ ungleiches Vorzeichen, so wird umgekehrt $\frac{y}{x}$ und hiermit der zugehörige Berührungskegel für die Punkte der $Y$-Axe zwischen 0 und $\frac{r}{u}$ imaginär, für alle Punkte ausserhalb dieser Strecke reell.

Für eine Regelfläche fallen die parabolischen Punkte in die unendlich ferne Ebene. Die Fläche der Doppelasymptoten wird in diesem Falle durch den Ort der zur Regelfläche gehörigen Asymptoten, die Cuspidalcurve des letztern durch den geometrischen Ort der Centra der die Regelfläche osculirenden Hyperboloide ersetzt. —

Um das einem im Endlichen gelegenen Flächenwendepunkte entsprechende räumliche Gebilde zu erhalten, suchen wir zunächst im ebenen System das Curvenelement, welches dem eine Gerade osculirenden ebenen Curvenelement reciprok ist. Lautet die Gleichung des letztern für orthogonale Axen $y_1^3 = 3a_1x_1$, so ergiebt sich für den normalen Abstand der zur Wendetangente benachbarten Tangente vom Coordinatenanfangspunkte $n_1 = \frac{2}{3}\frac{y_1^3}{a_1}$. Bezieht man das reciproke Element gleichfalls auf orthogonale Axen, so dass seine $Y$-Axe dem Wendepunkte entspricht, so folgt:

$$x_2 = n_1 \frac{p_2}{p_1} = \frac{2}{3}\frac{y_1^3}{a_1} \cdot \frac{p_2}{p_1},$$

ferner für den Contingenzwinkel $\vartheta_2$ des zweiten Elements:

$$\vartheta_2 = \frac{p_1 p_2^2}{a_0^2 b_0^2} y_1,$$

und somit als Bedingung des zweiten Elements:

$$x_2 = \frac{2}{3} \frac{a_0^6 b_0^6}{a_1 p_1^4 p_2^5} \cdot \vartheta_2^3,$$

woraus sich dessen Gleichung in Coordinaten ergiebt:

$$y_2^{3/2} = \frac{3}{2} a_2 x_2, \quad \text{wo} \quad a_2^2 = \frac{a_0^6 b_0^6}{a_1 p_1^4 p_2^5}.$$

Einem ebenen Curvenelement mit Wendepunkt $y_1^3 = 3a_1 x_1$ entspricht als reciprokes Gebilde ein ebenes Element mit einem Cuspidalpunkte $y_2^{3/2} = \frac{3}{2} a_2 x_2$.

Für eine räumliche Involution folgt, dass einem Kegel mit Wendeberührungsebene das Element einer **ebenen** Curve mit Cuspidalpunkt entspricht.

Hiernach lässt sich das dem parabolischen Punkte entsprechende Gebilde bestimmen. Rückt die Spitze des Berührungskegels auf einer beliebigen Tangente dieses Punktes (mit Ausnahme der Doppelasymptote) fort, so osculirt der Tangentialkegel die Berührungsebene der Fläche. Das reciproke Gebilde entsteht also durch die Bewegung eines Curvenelements mit Cuspidalpunkt; die Curve, welche zu der aus den Doppelasymptoten von $\Phi_1$ gebildeten Developpabeln reciprok ist, bestimmt in der reciproken Fläche $\Phi_2$ eine Cuspidalcurve, welche in dem früher erläuterten Sinne der Wendecurve auf $\Phi_1$ entspricht.

Um die Gleichung der Fläche $\Phi_2$ in der Nähe eines derartigen Cuspidalpunktes zu bestimmen, wählen wir die Tangente der Cuspidalcurve zur $X$-, die zur Tangente der Wendecurve auf $\Phi_1$ reciproke Gerade zur $Y$-Axe und nehmen die $Z$-Axe in der Schmiegungsebene der Cuspidalcurve $\left(\text{letztere reciprok zum Punkte } \eta = \frac{r}{u}\right)$ beliebig an. Je drei sich folgende Berührungsebenen an $\Phi_2$ schneiden sich in einem Punkte $y_0$ der $Y$-Axe. Das Element der Cuspidalcurve habe die Gleichung $x^2 = 2pz$, so lautet die Gleichung des aus $y_0$ durch dieses Element gelegten Kegels:

$$2pz = y_0 \frac{x^2}{y_0 - y}.$$

Indem den Strahlen dieses Kegels eine Cuspidalspitze aufgesetzt wird, ergiebt sich als Gleichung der Fläche $\Phi_2$ in der Nähe eines Punktes ihrer Cuspidalcurve:

$$2pz = y_0 \frac{x^2}{y_0 - y} - \sqrt{c}(y + ax^3 + \ldots)^{3/2},$$

wo $a$ und $c$ Constanten; oder nur die Glieder niedrigster Ordnung nehmend:

$$x^2 - 2pz = \sqrt{c}(y + ax^3)^{3/2}.$$

Das Krümmungsmaass dieser Fläche und jedes durch den betrachteten Punkt gelegten Schnittes ist unendlich gross; eine Ausnahme bilden die Schnitte durch die Cuspidaltangente, deren Krümmungen endlich sind. Für den Coordinatenanfangspunkt wird:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = -\frac{3\sqrt{c}}{8p^2} \lim (y + ax^3)^{-1/2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{3\sqrt{c}}{8p} \lim (y + ax^3)^{-1/2}.$$

Hieraus folgt durch Transformation auf ein beliebiges Coordinatensystem:

Für jeden Punkt in der Cuspidalcurve einer Fläche werden die zweiten Ableitungen $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ und das Krümmungsmass unendlich gross in der $\frac{1}{2}^{\text{ten}}$ Ordnung eines Ausdrucks, welcher für die Cuspidalcurve verschwindet und in der Grenze die zur Cuspidalcurve conjugirte Entfernung des Punktes von dieser Curve darstellt. Das Verhältniss zwischen einer beliebigen linearen Verbindung der zweiten Ableitungen und dem Krümmungsmaasse bleibt im Allgemeinen endlich.

Im Folgenden sind die sich auf die Singularitäten der Wende- und der ihr entsprechenden (nicht reciproken) Cuspidalcurve beziehenden Sätze gegenübergestellt, wobei unter Osculation eine Berührung zweiter Ordnung, unter einer Cuspidalspitze die mittels der Gleichung $\lim \frac{y^3}{x^2} = Const.$ definirte Singularität verstanden wird. Unter der ganzen oder gebrochenen Ordnung einer Berührung ist die Ordnung des unendlich kleinen Winkels gemeint, welchen zwei aus dem Berührungspunkte der Curven gezogene, gegen Null convergirende gleiche Sehnen bilden.

Die Schnittcurve jeder die Doppelasymptote enthaltenden Ebene osculirt die Doppelasymptote im Wendepunkte der Fläche $\Phi_1$.

Der Berührungskegel aus jedem Punkte einer im Wendepunkte an die Fläche $\Phi_1$ gelegten Tangente osculirt die Berührungsebene von $\Phi_1$ im Wendepunkte.

Die Krümmung der Kegelberührungscurve ist für alle Punkte einer solchen Tangente im Wendepunkte constant, so dass die Punktreihe der Krümmungsmittelpunkte dem Strahlbüschel der Tangenten des Wendepunktes projectivisch ist.

Der aus einem beliebigen Punkte der Cuspidaltangente an $\Phi_2$ gelegte Berührungskegel besitzt in der genannten Tangente einen Cuspidalstrahl.

Jede durch einen Cuspidalpunkt gelegte Ebene schneidet $\Phi_2$ in einer Curve mit Cuspidalpunkt. Die den letztern enthaltenden Schnittcurvenelemente des durch eine Tangente gelegten Ebenenbüschels werden alle durch dasselbe Element einer Kegelfläche, welcher der Cuspidalpunkt als Spitze, die Cuspidaltangente als Strahl angehört, von $\Phi_2$ abgewickelt, so dass die Krümmung dieser Kegelelemente (bezüglich die Punktreihe der Krümmungsmittelpunkte, welche den Schnitten der Kegelelemente mit einer

beliebigen Ebene entsprechen) zum Strahlbüschel der Tangenten im Cuspidalpunkte projectivisch ist.

Jeder Tangente im Wendepunkte einer Fläche (ausser der Doppelasymptote) ist also ein die Doppelasymptote im Allgemeinen zweipunktig berührendes Curvenelement conjugirt.

Jeder Tangente einer Fläche im Cuspidalpunkte (ausser der Cuspidaltangente) ist also ein die Cuspidaltangente im Allgemeinen als einfachen Strahl enthaltendes Kegelelement mit dem Cuspidalpunkt als Spitze conjugirt.

Ferner folgt aus dem letzten Satze:

Jedem die Doppelasymptote zweipunktig berührenden Curvenelement erster Ordnung in $\Phi_1$ entspricht ein gegen die Cuspidaltangente geneigtes Curvenelement unendlich klein zweiter Ordnung in $\Phi_2$.

Als specieller Fall ergiebt sich:

Das zur Tangente der Wendecurve conjugirte Curvenelement osculirt die Doppelasymptote.

Für die Erzeugende der die Cuspidalcurve von $\Phi_2$ abwickelnden Fläche bildet das conjugirte Kegelelement längs der Cuspidaltangente einen Cuspidalstrahl.

Für die Punkte der Doppelasymptote bezüglich der Cuspidaltangente folgt:

Der aus einem beliebigen Punkte der Doppelasymptote an $\Phi_1$ gelegte Berührungskegel zerfällt in zwei reelle oder imaginäre sich osculirende Zweige, welche bis auf Grössen dritter Ordnung das Element der Wendecurve enthalten und deren Berührungsrichtungen auf $\Phi_1$ eine hyperbolische Involution bilden, welcher die Doppelasymptote und die Tangente der Wendecurve als Asymptoten angehören. Die Doppelasymptote wird durch den Wendepunkt und ihren Schnittpunkt mit der benachbarten

Eine beliebige durch die Cuspidaltangente gelegte Ebene schneidet $\Phi_2$ in der Nähe des Cuspidalpunktes in zwei reellen oder imaginären, sich osculirenden Curvenelementen, welche auf einem Cylinder liegen, dessen Strahlen mit der Erzeugenden der die Cuspidalcurve abwickelnden Fläche parallel laufen. Die zu den Elementen der Schnittcurven conjugirten Richtungen (in den Erzeugenden ihrer Abwickelungsflächen erhalten) bilden eine hyperbolische Involution, deren Asymptoten die Cuspi-

Doppelasymptote in zwei Abschnitte getrennt, so dass sich aus den Punkten des einen nur reelle, aus denen des andern Abschnittes nur imaginäre Kegelzweige durch den Wendepunkt legen lassen.

daltangente und die dem Element der Cuspidalcurve conjugirte Richtung sind. Die Berührungsebene der Fläche $\Phi_2$ und die Schmiegungsebene der Cuspidalcurve trennen die Ebenen, welche die Fläche in reellen Curvenelementen treffen, von den in imaginären Zweigen schneidenden.

Demnach entspricht einem gegen die Doppelasymptote geneigten Curvenelement in $\Phi_1$ ein die Cuspidaltangente im Allgemeinen zweipunktig berührendes Curvenelement gleicher Ordnung in $\Phi_2$.

Für die Grenzpunkte bezüglich Grenzebenen findet man:

Der Tangentialkegel aus einem parabolischen Punkte der Fläche hat mit deren Berührungsebene längs der Doppelasymptote eine Berührung dritter Ordnung. Seine Berührungscurve mit der Fläche $\Phi_1$ bildet längs der Doppelasymptote einen Cuspidalpunkt in einem nicht ebenen Elemente.

Die Gleichung dieses Kegelelements lautet unter Anwendung der für $\Phi_1$ früher gebrauchten Bezeichnungen:

$$x^4 = \frac{8w}{3r^2} y^3 z.$$

Die Berührungscurve des aus dem Schnittpunkte zweier sich folgenden Doppelasymptoten an die Fläche $\Phi_1$ gelegten Tangentialkegels bildet längs der Wendecurve eine nicht in der Ebene liegende Cuspidalspitze. Die beiden Zweige des Berührungskegels, dessen Krümmung sich wieder durch das bis auf Grössen höherer als zweiter Ordnung von $x$ in ihn fallende Element der Wendecurve ergiebt, berühren sich längs der als singulärer Strahl enthaltenen Doppelasymptote nach höherer (gebrochener) Ordnung.

Die Tangentialebene der Fläche $\Phi_2$ im Cuspidalpunkte schneidet die Fläche in einer Curve, welche den Cuspidalpunkt und die Cuspidaltangente als singuläre Elemente enthält. Die Abwickelungsfläche dieses Schnittes berührt längs der Cuspidaltangente die Berührungsebene der Fläche in einem Cuspidalstrahl.

Die Gleichung dieser Curve in der Nähe des Cuspidalpunktes lautet nach den auf S. 154 angewendeten Bezeichnungen:

$$x^{4/3} = c^{1/3} . y.$$

Die Schmiegungsebene der Cuspidalcurve schneidet die Fläche $\Phi_2$ in einer Curve, welche in der Nähe des Cuspidalpunktes in zwei die Cuspidalcurve osculirende Zweige zerfällt, die sich in dem der Schnittcurve als singulärer Punkt angehörigen Cuspidalpunkte nach höherer (gebrochener) Ordnung berühren. Ihre Abwickelungsfläche osculirt die der Cuspidalcurve längs der Erzeugenden (der $Y$-Axe).

Die Schnittcurve dieses Kegelelements mit der $XZ$-Ebene besitzt die Gleichung:

$$z = \frac{r}{2} x^2 + \frac{Const. r}{2\eta} \cdot x^{7/2},$$

wo

$$\eta = \frac{r}{u}, \quad Const. = \left(\frac{2ut - b_4 r}{3wr}\right)^{1/2}.$$

Die Gleichung dieser Schnittcurve heisst:

$$x^2 - 2pz = \sqrt{ca^3} \, . \, x^{1/2}.$$

Sowohl aus dieser Gleichung wie aus der Betrachtung der Figur folgt, dass beide Zweige der Schnittcurve, entsprechend den beiden Zweigen des nebenstehend erwähnten reciproken Kegels, im Cuspidalpunkte abbrechen.

Endlich ergeben sich noch die Sätze:

Die Tangentialebene des parabolischen Punktes schneidet die Fläche $\Phi_1$ in einer die Doppelasymptote berührenden Cuspidalspitze.

Der von einem Cuspidalpunkte an die Fläche $\Phi_2$ gelegte Tangentialkegel osculirt die Berührungsebene dieses Punktes längs der Cuspidaltangente.

# VII.

## Ueber einige Flächen, welche Schaaren von Kegelschnitten enthalten.

Von

Dr. A. Weiler

in Hottingen-Zürich.

---

1. Bringt man die Flächen zweiten Grades eines einstufigen Systems in Zuordnung mit den Ebenen einer Torse und schneidet man die entsprechenden Flächen und Ebenen, so entsteht eine Schaar von Kegelschnitten und als deren Gesammtheit eine Fläche. Sind die Ebenen der Torse $n^{ter}$ Classe und die Flächen des Systems, von denen je $\mu$ durch einen Punkt gehen, je $\nu$ eine Ebene berühren, [1, 1]-deutig aufeinander bezogen, so ist die Fläche der Kegelschnittschaar von der Ordnung $2n+\mu$.

Die Anzahl der Geradenpaare der Kegelschnittschaar ist gleich derjenigen der Ebenen der Torse, welche ihre entsprechenden Flächen berühren. Eine Ebene E der Torse berührt $\nu$ Flächen F des Systems, denen $\nu$ Ebenen E′ der Torse entsprechen. Umgekehrt entspricht der Ebene E′ eine Fläche F, an welche $2n$ Ebenen E der Torse gelegt werden können. Die „berührenden" Ebenen E und die „entsprechenden" Ebenen E′ sind somit in $[2n, \nu]$-deutiger Beziehung; es sind $2n+\nu$ Ebenen, welche die ihnen entsprechenden Flächen berühren, und die Kegelschnittschaar enthält somit $2n+\nu$ Paare von Geraden. — Ist im Falle der Berührung F eine Kegelfläche, so vereinigen sich die Geraden des Paares und man erhält auf der erzeugten Fläche eine Gerade mit stationärer Tangentialebene. Das Nämliche wird eintreten, wenn F in ein Ebenenpaar ausartet und die entsprechende Ebene E durch die Schnittlinie geht, oder wenn F zu einer Doppelebene wird. — Wenn eine Fläche F in zwei Ebenen $E_1$, $E_2$ zerfällt und ihr in der Torse die eine dieser Ebenen, $E_1$, entspricht, so erniedrigt sich die Ordnung der entstehenden Fläche um 1 und die Zahl der Geradenpaare in der Kegelschnittschaar um 2; $E_1$ berührt die entsprechende Fläche doppelt und giebt bei der Bestimmung der Geradenpaare eine doppelte (wegfallende) Coincidenz.

Wenn eine Curve $c$ allen Flächen des Systems gemeinsam ist, so muss sie eine $n$-fache Curve der entstehenden Fläche $F^{2n+\mu}$ sein. Denn durch einen Punkt $P$ auf $c$ gehen $n$ Ebenen $E_1, \ldots, E_n$ der Torse, denen $n$ Flächen $F_1, \ldots, F_n$ des Systems entsprechen; durch $P$ gehen alsdann $n$ Kegel-

schnitte $E_1F_1, \ldots, E_nF_n$, und keine anderen. Legt man in $P$ an $c$ und an $E_iF_i$ die Tangenten, so bestimmen beide zusammen eine Tangentialebene an $F^{2n+\mu}$ in $P$. Diese stimmt überein mit der Tangentialebene in $P$ an $F_i$, d. h.: die $n$ Mäntel der Fläche $F^{2n+\mu}$ in einem Punkte $P$ der $n$-fachen Curve $c$ berühren die $n$ Flächen zweiter Ordnung, welche den durch $P$ gehenden Ebenen der Torse entsprechen. — So oft dieser Punkt $P$ von $c$ auf der durch die Torse gebildeten developpabeln Fläche liegt, fallen zwei dieser Tangentialebenen zusammen und $P$ wird zu einem Pinchpunkt (hierbei abgesehen von den $n-2$ übrigen, durch $P$ gehenden Mänteln). Ist $c$ jener developpabeln Fläche aufgeschrieben, so ist sie eine Rückkehrcurve der erzeugten Fläche.

2. Zu den hier erzeugten Flächen gehören immer die $F^{2n+1}$, welche eine $n$-fache Curve vierter Ordnung erster Species, $c^4$, haben. Jede Fläche zweiter Ordnung F durch $c^4$ schneidet aus $F^{2n+1}$ ausser $c^4$ einen Kegelschnitt heraus; hierdurch wird jeder Fläche F eine Ebene E zugeordnet, die auch jenen Kegelschnitt enthält. Die Torse jener Ebenen muss von der $n^{\text{ten}}$ Classe sein, ihr Geschlecht ist gleich 0.

Für diese Fläche ergeben sich unmittelbar folgende Eigenschaften. Weil durch einen Punkt im Raume nur eine Fläche des Büschels geht, so geht durch jeden Punkt auf $F^{2n+1}$ nur ein Kegelschnitt der Schaar, durch einen Punkt auf $c^4$ deren $n$. Weil die von der Torse eingehüllte Developpable von der Ordnung $2(n-1)$ ist, so liegen auf $c^4$ im Ganzen $8(n-1)$ Pinchpunkte. Die Kegelschnittschaar enthält $2n+3$ Geradenpaare, von denen höchstens vier aus coincidirenden Geraden bestehen können. Jeder Kegelschnitt der Schaar trifft $c^4$ in vier Punkten, jede Gerade in zweien. Eine beliebige Ebene der Torse schneidet $F^{2n+1}$ in einem Kegelschnitt $c^2$ und in einer Curve $c^{2n-1}$. Beide schneiden sich in vier Punkten auf $c^4$, welche $n-1$-fache von $c^{2n-1}$ sind. Von sämmtlichen Schnittpunkten beider Curven sind ausser jenen vier nur noch zwei einfache, welche Berührungspunkte jener Ebene mit $F^{2n+1}$ sind. Die Ebenen der Torse sind also doppelte, die der $2n+3$ zerfallenden Kegelschnitte dreifache Tangentialebenen von $F^{2n+1}$.

Längs $c^4$ hat $F^{2n+1}$ eine umschriebene Developpable, deren Classe bestimmt werden soll; wir untersuchen, wieviele ihrer Ebenen durch einen Punkt $O$ des Raumes gehen. Sei $P$ ein Punkt auf $c^4$; die Gerade $OP$ wird in $P$ von einer Fläche F des Büschels berührt, dieser entspricht eine Ebene E der Torse, welche $c^4$ in vier Punkten $P'$ schneidet. Fällt einer dieser Punkte $P'$ nach $P$, so erhält man jedesmal eine Ebene der gesuchten Developpabeln. Zu $P'$ gehören nun $n$ Ebenen E der Torse, denen $n$ Flächen F entsprechen, an welche aus $O$ im Ganzen $4n$, sie an $c^4$ (in Punkten $P$) berührende Linien gehen. Die Beziehung der Punkte $P$, $P'$ ist also $[4n, 4]$-deutig, woraus folgt, dass die der $F^{2n+1}$ längs $c^4$ umschriebene Developpable von der $4(n+1)^{\text{ten}}$ Classe ist.

Jede Gerade, welche $c^4$ zweimal schneidet, trifft $F^{2n+1}$ noch einmal. Daher sind die Punkte der Fläche eindeutig auf die Strahlen der Congruenz der Secanten von $c^4$ bezogen, also im Allgemeinen auf eine Congruenz zweiter Ordnung sechster Classe.

Für $n=1$ entsteht eine Fläche dritter Ordnung $F^3$; die Torse ist jetzt ein Ebenenbüschel. Wenn seine Axe $a$ die Grundcurve $c^4$ des Flächenbüschels schneidet, so ist der Schnittpunkt beider ein Doppelpunkt von $F^3$, die Seiten des zugehörigen Berührungskegels ergeben sich sehr einfach als Schnittlinien projectiver Ebenenbüschel. Sind diese Ebenenbüschel in perspectiver Zuordnung, so wird der Knoten biplanar u. s. f. Umgekehrt führt jeder Büschel von Flächen zweiter Ordnung, dessen Grundcurve eine $c^4$ auf $F^3$ ist, auf eine Schaar von Kegelschnitten, deren Ebenen einen Büschel bilden.

Für $n=2$ entsteht eine Fläche $F^5$, auf welcher nach Clebsch* 64 nicht zu der Schaar gehörende Kegelschnitte liegen. Diese Fläche entsteht dadurch, dass man die Flächen zweiter Ordnung eines Büschels in projectivische Zuordnung bringt mit den Ebenen eines Kegels zweiter Classe. Unter den sehr zahlreichen Specialfällen soll hier nur einer näher betrachtet werden: Wir setzen voraus, der Kegel zweiter Classe $K^2$ sei ein doppelt projicirender Kegel der Grundcurve $c^4$ des Flächenbüschels. Aus Nr. 1 folgt, dass jetzt $c^4$ eine Rückkehrcurve von $F^5$ ist. In bekannter Weise findet man: Die Torse der Tangentialebenen an $F^5$ längs $c^4$ ist von der sechsten Classe, sie besitzt eine Doppelcurve dritter Classe mit Doppeltangente (weil sie vom Geschlecht 0 sein muss). Die Ebene S der Doppelcurve ist diejenige, welche der Spitze $S$ des Kegels $K^2$ mit Bezug auf $c^4$ und mit Bezug auf alle Flächen des Büschels conjugirt ist.

Es sei E die Tangentialebene von $K^2$ längs der Seite $e$, $e$ schneide $c^4$ in zwei Punkten $E_1$, $E_2$, in denen $t_1$, $t_2$ die Tangenten an $c^4$ sein mögen. Die der Ebene E entsprechende Fläche F schneidet E in einem Kegelschnitte $e^2$ der Schaar, welcher $t_1$, $t_2$ in $E_1$, $E_2$ berührt. Daraus folgt, dass zwei Punkte auf $e^2$, welche auf einem Strahl aus $S$ liegen, durch $S$ und S harmonisch getrennt sind. Und weil durch jeden Punkt auf $F^5$ ein Kegelschnitt $e^2$ geht, welcher stets einen vierten harmonischen mit Bezug auf $S$, S liefert, welcher mit jenem auf einem Strahl aus $S$ liegt, so folgt: Die Fläche $F^5$ entspricht sich selbst in einer involutorischen centrischen Collineation, deren Centrum die Kegelspitze $S$ und deren Ebene S die gemeinsame Polarebene von $S$ für alle Flächen des Büschels ist.

Die Ebene E hat ausser $e^2$ mit $F^5$ noch eine Curve $e^3$ gemein. Dieselbe ergiebt sich wie folgt. Die Flächen des Büschels schneiden E in

---

* Göttinger Nachrichten 1869; Abhandlungen der königl. Ges. zu Göttingen, XV, 1870. — Nöther, Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen; Math. Annalen III, S. 98.

Kegelschnitten $c^2$, welche in $E_1$, $E_2$ die Linien $t_1$, $t_2$ berühren. Die entsprechenden Ebenen von $K^2$ schneiden E in Geraden $g$ aus $S$, die Kegelschnitte $c^2$ und diese Geraden $g$ bilden zwei projective Büschel, wobei ersichtlich dem früher genannten Kegelschnitte $e^2$ die Linie $e = E_1 E_2 S$ entspricht. Die Schnittpunkte $gc^2$ bilden nun in ihrer Gesammtheit eine Curve dritter Ordnung $e^3$, welche in $S$ einen Wendepunkt hat. Sie geht durch die Grundpunkte des Kegelschnittbüschels, berührt also $t_1$, $t_2$ in $E_1$, $E_2$. Mit $c^2$ hat sie $E_1$ und $E_2$ doppelt zählend und die beiden Punkte $gc^2$ gemein. Für den Kegelschnitt $e^2$ des Büschels fällt $g$ in $e$, die Punkte $gc^2$ fallen hier nach $E_1$, $E_2$. Hieraus folgt, dass $e^3$ mit $e^2$ in den beiden Punkten $E_1$, $E_2$ je drei gemeinsame Punkte hat, dass also $e^2$ und $e^3$ sich in $E_1$, $E_2$ berühren und schneiden.* Wenn somit in einer Ebene E der Kegelschnitt $e^2$ der Schaar zu einem Geradenpaare wird, so sind diese Geraden in $E_1$, $E_2$ Wendetangenten an $e^3$.

Unter allen Ebenen E des Kegels ist diejenige ausgezeichnet, welche dem Kegel $K^2$, als Fläche des Büschels betrachtet, entspricht. In ihr zerfällt $e^2$ in ein coincidirendes Linienpaar, $e$ doppelt gezählt. Hieraus folgt, dass die in dieser Ebene gelegene $e^3$ in $E_1$, $E_2$ Wendetangenten hat, welche mit $e = E_1 E_2$ zusammenfallen. Also ist jetzt $e$ ein Bestandtheil von $e^3$,** der Rest ist ein Kegelschnitt $f^2$ auf $F^5$, welcher der Schaar nicht angehört. Er geht durch $E_1$, $E_2$ und lässt sich construiren, wie früher $e^3$ construirt wurde. Auch die Punkte von $f^2$ (wie früher von $e^3$) sind durch $S$S paarweise harmonisch getrennt. Durch Einführung von $f^2$ ergiebt sich sofort folgende Erzeugungsweise der Kegelschnittschaar auf $F^5$: Eine Curve vierter Ordnung erster Species, $c^4$, hat einen doppelt projicirenden Kegel $K^2$ von der Spitze $S$, deren conjugirte Ebene nach $c^4$ S sein soll. In einer festen Ebene von $K^2$ liegt ein Kegelschnitt $f^2$, welcher $c^4$ in zwei Punkten schneidet und für welchen die Polare von $S$ in S fällt. Nun lege man alle Ebenen an $K^2$ und construire in jeder von ihnen den Kegelschnitt, welcher $c^4$ doppelt berührt und $f^2$ (in zwei Punkten) schneidet. Diese Kegelschnitte sind die auf $F^5$ gelegene

* Hat allgemein eine Fläche F eine Rückkehrcurve $c$ und längs derselben eine berührende developpable Fläche D, so schneidet eine Ebene durch eine Tangente $t$ an $c$ aus F daselbst zwei Aeste, die sich berühren und schneiden. Die Berührung beider Aeste folgt aus der Berührung mit $t$. Beide schneiden sich, denn wenn man auf dem äussern Mantel der Fläche F längs der Tangente $t$ über den Berührungspunkt hinwegschreitet, so gelangt man auf den innern Mantel, weil innerer und äusserer Mantel längs $c$ zusammenhängen.

** Diese ausgezeichneten Elemente E, $e$ liefern für beliebige Querschnitte von $F^5$ je einen Wendepunkt mit seiner Tangente und speciell E für die $\infty^1$ Curven $e^3$ je die Wendetangente in $S$. Die Schaar der Curven $e^3$ entsteht ähnlich der Schaar der Curven $e^2$ durch einen Büschel von Flächen dritter Ordnung in projectiver Zuordnung mit den Ebenen von K.

Schaar. Der Kegelschnitt der Schaar wird bei seiner Bewegung zweimal $f^3$ berühren, viermal mit $c^4$ vier consecutive Punkte gemein haben und viermal zu einem Geradenpaar werden, einmal zu einer Doppelgeraden.

3. Es sei wieder ein Büschel von Flächen zweiten Grades mit den Ebenen einer Torse $n^{ter}$ Classe in projectives Entsprechen gebracht. Jedoch soll im Büschel eine in zwei Ebenen P, Q zerfallende Fläche vorkommen, welcher die eine ihrer Ebenen, P, entspreche. Abgesehen von P entsteht als Erzeugniss eine Fläche $2n^{ter}$ Ordnung $F^{2n}$. In den Ebenen P, Q seien $p^2$, $q^2$ die Grundcurven des Flächenbüschels, sie sind auf $F^{2n}$ bezüglich $n-1$-fache und $n$-fache Curve. Die Fläche ist die allgemeinste dieser Art. Längs $p^2$, $q^2$ besitzt sie berührende Developpabeln von der Classe $2n$, $2(n+1)$, auf $p^2$, $q^2$ liegen $4(n-2)$, $4(n-1)$ Pinchpunkte. Die Kegelschnitte der Schaar schneiden $p^2$, $q^2$ je in zwei Punkten, unter ihnen sind $2n$ Geradenpaare, jede Gerade trifft $p^2$ und $q^2$. Die $F^{2n}$ wird von der Schaar einfach überdeckt. — Die Punkte der Fläche sind umkehrbar eindeutig bezogen auf die Strahlen der Congruenz zweiter Ordnung vierter Classe der Treffgeraden von $p^2$, $q^2$.

Eine solche Fläche ist die Fläche vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt. Jede Doppeltangentialebene schneidet aus ihr zwei Kegelschnitte $k^2$, $l^2$. Zwei Schnittpunkte $k^2$, $l^2$ liegen auf dem doppelten Kegelschnitte $c^2$, die übrigen sind die Berührungspunkte der Ebene. Aus $k^2$, $l^2$ lassen sich zwei Schaaren von Kegelschnitten herleiten, welche aus $F^4$ durch Flächenbüschel herausgeschnitten werden mit $c^2$, $k^2$; $c^2$, $l^2$ als Grundcurven. Alle Flächen durch $c^2$ und $k^2$ schneiden $F^4$ in Kegelschnitten der Schaar, zu welcher $l^2$ gehört; in der That wird $l^2$ durch die Fläche herausgeschnitten, welche in die beiden Ebenen von $c^2$ und $k^2$ zerfällt: Je zwei Kegelschnitte (eventuell Geradenpaare) der beiden adjungirten Schaaren liegen mit dem Doppelkegelschnitt auf einer Fläche zweiten Grades. Hierbei kommt es $\infty^1$-mal vor, dass zwei adjungirte Kegelschnitte in einer Ebene liegen, und die Enveloppe solcher Ebenen ist ein Kummer'scher Kegel. Die letzteren Kegelschnittpaare haben allemal zwei Schnittpunkte auf $c^2$, die anderen liegen auf der Berührungslinie ihrer Ebene mit dem Kegel, weshalb dieser Kegel die $F^4$ längs einer Curve vierter Ordnung erster Species berührt. Auf $c^2$ sind vier Pinchpunkte, nämlich die Schnittpunkte mit dem genannten Kegel. — Jede Kegelschnittschaar enthält vier Paare von Geraden. Ein Geradenpaar wird von den vier Geradenpaaren der andern Schaar geschnitten. Daraus folgt, dass eine der 16 Geraden allemal von 5 anderen geschnitten wird.

Nach Kummer hat die Fläche fünf Kegel doppelt berührender Ebenen.* Zu jedem gehören ($\infty^1$-mal) zwei Büschel von Flächen zweiter Ordnung,

* Vergl. Zeuthen, Math. Annal. X, S. 540. — Folgende Betrachtung führt sofort auf das Vorhandensein der fünf Kegel. Eine Kegelschnittschaar hat eine „adjungirte“, weil die Ordnung der Fläche gleich 4 ist; jede Schaar hat vier Ge-

welche mit den Ebenen des Kegels in bekannter Weise die Fläche erzeugen.* Alle diese Kegel gehen durch die Pinchpunkte, weshalb z. B. die 16 Schnittpunkte der Geraden auf der Fläche mit $c^2$ auf fünf Arten zu je zwei verbunden acht Tangenten eines durch die Pinchpunkte gehenden Kegelschnittes liefern.

Die Punkte der Fläche lassen sich hier ausnahmsweise eindeutig beziehen auf die Strahlen einer Congruenz erster Ordnung zweiter Classe, deren Brenncurven der doppelte Kegelschnitt und eine Gerade der Fläche sind.

Wenn speciell die Spitze eines Kummer'schen Kegels in die Ebene von $c^2$ fällt (was höchstens dreimal eintreten kann), so wird einer der vorhin genannten fünf Kegelschnitte zu einem Doppelbüschel, die 16 Schnittpunkte der Geraden auf $F^4$ mit $c^2$ und die Pinchpunkte bilden alsdann zehn Paare einer Involution und umgekehrt. (Die beiden adjungirten Kegelschnittschaaren, welche zu diesem ausgezeichneten Kegel gehören, schneiden $c^2$ in Paaren der genannten Involution.) Wie in Nr. 2, folgt, dass in diesem Falle $F^4$ sich selbst entspricht in einer involutorischen, centrischen Collineation, deren Centrum die Spitze jenes ausgezeichneten Kegels ist.

Zurückkommend auf eine beliebige $F^4$ mit Doppelkegelschnitt, mag noch bemerkt werden, dass jede Kegelschnittschaar die Fläche einfach überdeckt, dass aber der doppelte Kegelschnitt keiner Schaar angehört. — Wenn ein Kegelschnitt einer Schaar in zwei coincidirende Gerade ausartet, so berühren alle adjungirten Kegelschnitte die zu der Geraden gehörende stationäre Ebene an der Geraden selbst, die Geradenpaare in der adjungirten Schaar schneiden sich auf dieser Geraden.

4. Wenn im Flächenbüschel zwei in Ebenenpaare zerfallende Flächen vorkommen, so ist seine Grundcurve ein windschiefes Vierseit. Den in die Ebenenpaare A, B; C, D zerfallenden Flächen sollen in der Torse die Ebenen B und D entsprechen, so besteht das eigentliche Erzeugniss aus einer $F^{2n-1}$, welche die Gerade AC zur $n$-fachen, die Geraden AD und BC zu $n-1$-fachen, endlich BD zur $n-2$-fachen Geraden hat. Deshalb lassen sich die

---

radenpaare, beide zusammen ergeben die 16 Geraden der Fläche. Da jede Gerade von fünf anderen geschnitten wird, so hat man 40 Schnittpunkte oder 40 sich schneidende Geradenpaare im Ganzen. Je zwei sich schneidende Geraden führen aber auf eine Kegelschnittschaar, mit Hilfe der Flächen durch sie und den doppelten Kegelschnitt. So erhält man 40 Schaaren von Kegelschnitten, jede Schaar aber viermal, weil in jeder Schaar vier sich schneidende Geradenpaare sind. Also giebt es zehn Schaaren resp. fünf adjungirte Schaaren und dazu gehörend fünf Kummer'sche Kegel.

* Der Querschnitt der Fläche mit einer Ebene des Kegels wird gefunden wie in Nr. 2; er besteht aus zwei Kegelschnitten, von denen zwei Schnittpunkte in der Berührungsseite der Ebene mit dem Kegel liegen; die übrigen fallen in den Doppelkegelschnitt. (Von den ersteren Schnittpunkten liegen auf jeder Kegelseite zwei, keiner von allen fällt in die Kegelspitze.)

Punkte der Fläche umkehrbar eindeutig beziehen auf die Strahlen der linearen Congruenzen mit den Directricen AC und BD oder AD und BC. Die Kegelschnitte der Schaar treffen im Allgemeinen alle Seiten des Vierseits (für $n=1$ nur AC, für $n=2$ alle ausser BD, auf welcher alsdann die Kegelspitze $S$ liegt); unter ihnen sind $2n-3$ Geradenpaare. — Die Developpabeln von $F^{2n-1}$ längs AC, AB und BC, BD sind bezüglich von der Classe $n+1$, $n$, $n-1$; auf diesen Geraden sind bezüglich $2n-2$, $2n-4$, $2n-6$ Pinchpunkte. — Flächen zweiter Ordnung durch drei und Flächen dritter Ordnung durch die vier mehrfachen Geraden ergeben mit $F^{2n-1}$ bemerkenswerthe Schnittcurven.

5. Der Büschel von Flächen zweiten Grades enthalte eine Doppelebene P, welche der Torse $n^{\text{ter}}$ Classe angehören und sich selbst entsprechen soll. Das Erzeugniss ist eine $F^{2n}$, welche die in P gelegene Grundcurve $p^2$ des Büschels zur $n$-fachen Curve hat. (Wir betrachten hier im Vergleich zu Nr. 3 den zweiten Fall, dass sich gegenüber Nr. 2 von $F^{2n+1}$ eine Ebene absondert; dieser Fall ist allerdings als ein specieller von Nr. 3 aufzufassen, wenn nämlich dort P und Q zusammenfallen. Die Veränderungen gegenüber Nr. 3 sind aber so intensiv, dass eine besondere Behandlung des vorliegenden Falles berechtigt erscheint.) Durch einen Punkt $Q$ auf $p^2$ gehen $n-1$ von P verschiedene Ebenen der Torse; die Tangentialebenen in $Q$ an die $n-1$ entsprechenden Flächen fallen zusammen: Der Kegel, welcher längs $p^2$ alle Flächen berührt, ist $n-1$-fach gezählt für $F^{2n}$ eine längs $p^2$ umschriebene Developpable. Ausser demselben existirt aber noch ein einfach zählender Kegel zweiter Classe durch $p^2$, welcher ebenfalls zu dieser Developpabeln gehört. Nämlich es entspricht der P consecutiven Ebene der Torse ein Kegelschnitt, welcher durch diese Ebene aus einer unendlich schmal gewordenen Fläche des Büschels herausgeschnitten wird. Dieser Kegelschnitt ist $p^2$ unendlich benachbart, er trifft $p^2$ in zwei Punkten und bestimmt mit $p^2$ einen Kegel, welcher in der Nähe von $p^2$ einen einzelnen Mantel der Fläche $F^{2n}$ darstellt. (Man erkennt, dass nunmehr $p^2$ der Kegelschnittschaar angehört.) Der $n-1$-fache und der einfache Mantel an $p^2$ berühren sich in zwei Punkten, welche auf der zu P gehörenden Berührungsseite der Torse liegen. Es kann der Fall eintreten, dass die beiden betrachteten Kegel zusammenfallen. Alsdann gehen durch $p^2$ $n-1$ Mäntel der Fläche, welche an $p^2$ denselben Kegel berühren; zudem ist $p^2$ eine Rückkehrcurve von $F^{2n}$.

In der Kegelschnittschaar sind $2n$ Geradenpaare. Jede Gerade berührt in ihrem Schnittpunkte mit $p^2$ den $n-1$-fach berührenden Kegel der Fläche.

Die analytische Darstellung des allgemeinen Falles ist hier folgende. Der Flächenbüschel sei dargestellt durch

$$1)\qquad \lambda\varphi - p^2 = 0,$$

wo $\varphi=0$ eine beliebige Fläche des Büschels, $p=0$ die Ebene P ist. Die Torse $n^{ter}$ Classe soll für $\lambda=0$ die Ebene $p=0$ liefern, ihre Gleichung sei demnach

$$2)\qquad \lambda^n a+\lambda^{n-1}b+\ldots+\lambda^2 k+\lambda l+p=0,$$

worin $a, \ldots, l$ lineare Ausdrücke sind. Die Gleichung von $F^{2n}$ ist

$$3)\qquad ap^{2n-1}+bp^{2n-3}\varphi+\ldots+kp^3\varphi^{n-2}+lp\varphi^{n-1}+\varphi^n=0.$$

Längs $p^2$ $(p=\varphi=0)$ wird $F^{2n}$ von $\varphi=0$ berührt, resp. $n-1$ Mäntel von $F^{2n}$ berühren dort $\varphi=0$. Um den letzten Mantel zu finden, setze man in 1) und 2) an Stelle von $\lambda$ einen unendlich kleinen Werth $d\lambda$, so entsteht der Kegelschnitt der Schaar

$$\varphi\, d\lambda-p^2=l\, d\lambda+p=0,$$

welcher $p^2$ unendlich benachbart ist. Durch ihn und durch $p^2$ geht die Fläche zweiter Ordnung $\varphi+lp=0$, welche $\varphi=0$ nicht längs $p^2$ berührt; dagegen berührt sie $F^{2n}$ längs $p^2$ einfach. [Lässt man in 3) $\varphi$ und $p$ zu Null werden, so bleiben als niedrigste Glieder $lp\varphi^{n-1}+\varphi^n=\varphi^{n-1}(lp+\varphi)$ übrig.] Der $n-1$-fache Mantel $(\varphi=0)$ und der einfache $(\varphi+lp=0)$ berühren sich in den singulären Punkten $\varphi=p=l=0$ und beide Mäntel sind identisch, wenn $l=0$ mit $p=0$ zusammenfällt.

Für $n=2$ erhält man wieder eine Fläche vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt, auf welcher zunächst eine Kegelschnittschaar liegt

$$4)\qquad \lambda\varphi-p^2=0,\quad \lambda^2 a+2\lambda b+p=0;$$

die Gleichung der Fläche ist

$$5)\qquad ap^3+2bp\varphi+\varphi^2=ap^3+\varphi(\varphi+2bp)=0.$$

Zu der Schaar 4) giebt es eine adjungirte, welche man erhält, wenn man 5) mit der Ebene in 4) schneidet und den Schnitt mit $\lambda\varphi-p^2=0$ weglässt. Diese adjungirte Schaar ist

$$6)\qquad \lambda(\varphi+2bp)+p^2=0,\quad \lambda^2 a+2\lambda b+p=0.$$

Offenbar wird $F^4$ längs $p^2$ von $\varphi=0$ und von $\varphi+2bp=0$ berührt: Die Developpable längs der Doppelcurve zerfällt hier in zwei Kegel zweiter Classe. Beide berühren sich in zwei Punkten $(\varphi=b=p=0)$, in welchen je zwei Pinchpunkte sich vereinigt haben. — Die beiden Kegelschnittschaaren haben $p^2$ gemeinsam und durchschneiden sich in demselben (für die übrigen Schaaren ist dieses natürlich nicht der Fall).

Die Ebenen $\lambda^2 a+2\lambda b+p=0$ umhüllen einen Kummer'schen Kegel, dessen Spitze in der Ebene der Doppelcurve liegt, als Folge davon, dass die Developpable längs $p^2$ zerfällt. Wenn umgekehrt die Kegelschnitte von zwei adjungirten Schaaren auf $F^4$ den doppelten Kegelschnitt $p^2$ in Paaren einer Involution schneiden und die Pinchpunkte sich paarweise so vereinigen, dass ein Paar derselben Involution entsteht, so muss die Developpable längs $p^2$ in zwei Kegel zerfallen.

Damit endlich die $F^4$ längs $p^2$ berührenden Kegel zusammenfallen, hat man $b=p$ zu setzen. Die Gleichung der Fläche wird zu

7) $$ap^3 + 2p^2\varphi + \varphi^2 = ap^3 + \varphi(\varphi + 2p^2) = 0;$$

sie enthält die Kegelschnittschaaren

8) $$\lambda\varphi - p^2 = 0, \quad \lambda^2 a + 2\lambda p + p = 0, \quad \lambda(\varphi + 2p^2) + p^2 = 0.$$

Die Flächen zweiter Ordnung in 8) gehören demselben Büschel an, indem alle $\varphi = 0$ an $p = 0$ berühren. Die Torse der Ebenen $\lambda^2 a + 2\lambda b + p = 0$ wird zu einem Ebenenbüschel. Dieser Büschel erscheint zweimal mit dem Flächenbüschel in solche Zuordnung gebracht, dass je einer Ebene ein Flächenpaar, einer Fläche eine einzelne Ebene entspricht und wobei die Flächenpaare eine Involution bilden. Diese Involution ist beidemal dieselbe, weil in einer Ebene des Büschels nur zwei Kegelschnitte von $F^4$ liegen. Man kann deshalb die Gleichungen 8) auf eine andere Form bringen, indem man eine Ebene des Büschels mit $\varrho a + p = 0$ (an Stelle von $\lambda^2 a + 2\lambda p + p = 0$) bezeichnet. Alsdann gehen 8) übereinstimmend über in

9) $$\varrho a + p = 0, \quad \{\varrho + \sqrt{\varrho(1+\varrho)}\}\varphi - p^2 = 0.$$

Offenbar handelt es sich jetzt um eine Fläche vierter Ordnung mit Cuspidalkegelschnitt. Gegenüber $F^4$ mit Doppelkegelschnitt ist hier die Erzeugungsweise ausgeartet. An Stelle der Ebenen des ausgezeichneten Kegels treten die Ebenen eines Büschels; die getrennten Flächenbüschel sind die zu Paaren einer Involution geordneten Flächen, welche sich (und $F^4$) längs des Cuspidalkegelschnittes berühren. In der Ebene des Cuspidalkegelschnittes fällt eine Ebene zusammen mit dem entsprechenden Flächenpaar. In jeder Ebene des Büschels liegen zwei Kegelschnitte von $F^4$, herausgeschnitten aus dem der Ebene entsprechenden Flächenpaar. Diese Kegelschnitte berühren sich in den Schnittpunkten der Axe des Ebenenbüschels mit dem Cuspidalkegelschnitt, welche infolge dessen Clospunkte sind. Die Axe liefert für beide Kegelschnitte denselben Pol und der Ort dieser Pole ist die Schnittlinie der Tangentialebenen an $F^4$ in den Clospunkten, nennen wir sie die „Conjugirte der Axe“. Wenn somit ein Kegelschnitt der (Involutions-) Schaar zu einem Paar von Geraden wird, so schneiden sich dieselben auf der Conjugirten der Axe. — Es mag hier im Voraus zusammenfassend gesagt sein, dass die Involutionsschaar, welche die Stelle von zwei adjungirten Schaaren vertritt, folgende ausgezeichneten Kegelschnitte enthält: 1. $p^2$; 2. ein Kegelschnitt, der mit dem in seiner Ebene liegenden zusammenfällt, weil in der Involution von Flächen noch eine selbstentsprechende Fläche vorkommt; 3. vier Geradenpaare; 4. drei Kegelschnitte, in denen jedes Mal $F^4$ von einem Kegel zweiter Classe berührt wird, dessen Scheitel auf der Conjugirten der Axe liegt. — Aus dem Vorstehenden geht auch hervor, dass die Fläche mit sich selbst in involutorischer Centralcollineation steht für jeden Punkt der Axe (wobei die Collineationsebene durch die Conjugirte der Axe geht) und für jeden Punkt auf der Conjugirten der

Axe (wobei je die Collineationsebene durch die Axe geht). Daraus folgt auch, dass die Punkte der Fläche in geschaarter Involution sind für die Axe und ihre Conjugirte.*

In der Involutionsschaar kommen nach Vorigem acht gerade Linien vor $a_1, b_1, \ldots, a_4, b_4$. Es sollen die $a_i$ in der einen, $b_i$ in der andern Tangentialebene in den Clospunkten liegen und die Linien von übereinstimmendem Index sich auf der Conjugirten der Axe schneiden. Alsdann lassen sich die Kummer'schen Kegel ableiten wie folgt: Flächen zweiten Grades durch $p^2$, $a_i$, $b_i$ schneiden $F^4$ in Kegelschnitten, deren Ebenen dem Büschel $a = p = 0$ angehören; sie führen immer auf die Involutionsschaar und damit auf den zerfallenden (doppelt zählenden) Kummer'schen Kegel. Legt man dagegen einen Büschel von Flächen zweiten Grades durch $p^2$, $a_i$, $a_k$, so erhält man eine Kegelschnittschaar, zu welcher $a_l a_m$, ferner $b_i b_k$ als zerfallende Kegelschnitte gehören. Zu der adjungirten Schaar gehören ebenso $a_i a_k$, $b_l b_m$ $(i, k, l, m = 1, 2, 3, 4)$. Beide Schaaren veranlassen denselben doppelt berührenden Kegel, dessen Spitze auf der Conjugirten zur Axe liegen muss (die Ebenen A der $a_i$ und B der $b_i$ sind Ebenen des Kegels). Stellt man die $a_i$ (oder die $b_i$) auf alle Weisen zu je zweien zusammen, so entstehen sechs Kegelschnittschaaren, welche drei doppelt berührende eigentliche Kummer'sche Kegel veranlassen.

Ein solcher Kegel $K^2$ geht immer durch den Cuspidalkegelschnitt $p^2$ von $F^4$, zu ihm gehören $\infty^1$-mal zwei Flächenbüschel durch $p^2$ etc. Jeder Kegelschnitt einer dieser sechs Schaaren berührt daher den Cuspidalkegelschnitt. Zwei adjungirte Kegelschnitte in einerlei Ebene haben an $p^2$ drei consecutive Punkte gemein (Nr. 2), ausserdem einen Punkt auf der zugehörigen Berührungsseite des Kegels $K^2$. Rückt ihre Ebene, unter Beibehaltung des Kegels $K^2$, nach einer Tangentialebene in einem Clospunkte, so zerfallen die adjungirten Kegelschnitte in zwei Geradenpaare aus dem Clospunkte; in dieser speciellen Lage fallen also alle vier Schnittpunkte der Kegelschnitte in den Clospunkt. Betrachtet man daher die Berührungscurve von $K^2$ mit $F^4$, welche im allgemeinen Falle eine Curve vierter Ordnung war, so findet man, dass sie in den Cuspidalkegelschnitt und einen Kegelschnitt durch die Clospunkte zerfällt: Die drei eigentlichen Kummer'schen Kegel, welche ihre Spitze auf der Conjugirten der Axe haben, gehen durch den Cuspidalkegelschnitt und berühren $F^4$ an drei Kegelschnitten der Involutionsschaar.

Diese Fläche mit Cuspidalkegelschnitt wird auch erzeugt durch einen Büschel von Flächen zweiten Grades, in welchem ein Ebenenpaar vorkommt und eine Torse zweiter Classe von Ebenen, die den Cuspidalkegelschnitt berührt, wobei eine selbstentsprechende Ebene auftritt. Geht man aus

---

* Vergl. Tötössy, Mathem. Annalen XIX.

von einem beliebigen Kegelschnitte einer der sechs Schaaren, so hat man als Grundcurve des Flächenbüschels zwei sich berührende Kegelschnitte $p^2$, $k^2$, die Kegelspitze liegt in der Ebene von $k^2$ und diese Ebene entspricht sich selbst bei der noch festzusetzenden projectiven Zuordnung. Ersetzt man hierbei $k^2$ durch zwei Gerade $k_1$, $k_2$, welche, in einer Tangentialebene von $p^2$ liegend, sich auf $p^2$ schneiden, so entsteht die nämliche Fläche.

Auf die Flächen vierter Ordnung mit Cuspidalkegelschnitt, welche ausserdem Doppelpunkte haben oder vereinigte Clospunkte besitzen, werde ich im nachstehenden Aufsatze zurückkommen.

---

## VIII.

# Ueber Flächen vierter Ordnung mit Doppel- und mit Cuspidalkegelschnitt.

Von

Dr. A. Weiler

in Hottingen-Zürich.

Hierzu Taf. V Fig. 2.

In dem vorangegangenen Aufsatze habe ich auf eine methodische Untersuchung der obgenannten Flächen hingewiesen, welche hier näher ausgeführt und ergänzt werden soll. Ich beschränke mich im Wesentlichen auf drei Hauptfälle, nämlich auf die allgemeine Fläche mit Doppelkegelschnitt, mit Cuspidalkegelschnitt und den Specialfall der letzteren Fläche, in welchem die Clospunkte zusammenfallen. Die Untersuchung fördert einige neue Resultate zu Tage und setzt bereits bekannte Eigenschaften in leicht übersehbaren Zusammenhang. — Specialfälle der drei genannten Typen werden gelegentlich berührt. Allerdings ist die angewandte Methode derart, dass aus ihr alle Specialfälle entspringen würden; aber eine solche Durchführung wäre augenscheinlich mühsam und es würden in den meisten Fällen verschiedene Dispositionen bezüglich der erzeugenden projectiven Gebilde auf nicht von einander verschiedene Flächen führen. Eine systematische Classification dieser Flächen ist übrigens soeben durch Herrn Segre ausgeführt worden,* seine Methode giebt weiterhin das Mittel, die Frage nach der Realität dieser Gebilde zu erledigen.

---

1. Ueber die Fläche vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt habe ich unter Anderem folgende Eigenschaften angegeben. Die Fläche wird von jeder Kegelschnittschaar einfach überdeckt, somit haben im Allgemeinen zwei Kegelschnitte derselben Schaar keinen Punkt gemein. Zwei Kegelschnitte, welche einer Schaar und ihrer adjungirten entnommen sind, schneiden sich stets in zwei Punkten, deren Verbindungslinie durch den Scheitel $S$ des zugehörenden Kummer'schen Kegels $K^2$ geht. Liegen sie

* Mathem. Annalen XXIV, S. 313, woselbst eine vollständige Literaturangabe zu finden ist.

zudem in einer Ebene, so schneiden sie sich in vier Punkten. Zwei davon liegen auf dem Doppelkegelschnitte $c^2$, die übrigen auf der Berührungsseite $s$ ihrer Ebene E mit dem Kegel $K^2$. Also wird ein Kegelschnitt von allen Kegelschnitten der adjungirten Schaar in Punktepaaren einer Involution geschnitten, deren Pol in $S$ fällt. — Durch einen beliebigen Punkt auf unserer Fläche $F^4$ gehen zehn Kegelschnitte, nämlich fünfmal je zwei adjungirte, welche sich nochmals in einem Punkte treffen. Andere Kegelschnitte unter diesen zehn gelangen nicht fernerhin zum Schnitt. Zwei Kegelschnitte, welche verschiedenen, aber nicht adjungirten Schaaren zugehören, haben stets einen Punkt gemein.

Es seien nun $a_1$, $a_2$ in der Ebene A, $b_1$, $b_2$ in B, $c_1$, $c_2$ in C drei Geradenpaare der ersten Kegelschnittschaar $I$, so schneiden sich A, B, C in $S_1$; alle Kegelschnitte der adjungirten Schaar $I^*$ liegen in Ebenen aus $S_1$ und schneiden die sechs Geraden $a_i$, $b_i$, $c_i$*. Hierdurch ist die Schaar $I^*$ völlig bestimmt und es ist $F^4$ die Fläche derjenigen Kegelschnitte, deren Ebenen durch einen Punkt $S_1$ gehen und welche die in drei Ebenen aus $S_1$ liegenden Geradenpaare $a_1$, $a_2$; $b_1$, $b_2$; $c_1$, $c_2$ schneiden. In den drei Ebenen sind die Geradenpaare in allgemeiner Lage, womit sich die Zahl der Constanten der Fläche auf 21 beläuft.

Eine Ebene E schneide nun $a_i$, $b_i$, $c_i$ in sechs Punkten eines Kegelschnittes. Diese Punkte sind drei Paare der Involution vom Pol $S_1$. Construirt man zu $S_1$ mit Bezug auf die drei Paare die vierten harmonischen Punkte, so liegen dieselben auf der Polaren des Punktes $S_1$ mit Bezug auf diesen Kegelschnitt. Indem man aber die Paare $a_i$, $b_i$, $c_i$ mit allen Ebenen aus $S_1$ schneidet und je den vierten harmonischen Punkt von $S_1$ für jedes herausgeschnittene Punktepaar bestimmt, entstehen die drei Geraden $a_0$, $b_0$, $c_0$, die Polaren von $S_1$ mit Bezug auf die drei degenerirten Kegelschnitte $a_1a_2$, $b_1b_2$, $c_1c_2$ der Schaar $I$. Bei der Erzeugung der Schaar $I^*$ aus $S_1$, $a_i$, $b_i$, $c_i$ hat man offenbar Ebenen durch $S_1$ zu legen, welche $a_0$, $b_0$, $c_0$ je in drei Punkten einer Geraden schneiden; eine solche Ebene schneidet alsdann die sechs Geraden $a_i$, ... in sechs Punkten eines Kegelschnittes. Man construire somit die $\infty^1$ Transversalen zu $a_0$, $b_0$, $c_0$, sie sind die Polaren von $S_1$ für die Kegelschnitte der Schaar $I^*$ und die aus $S_1$ nach ihnen gelegten Ebenen bilden den Kummer'schen Kegel $K_1^2$: Die Polaren des Scheitels eines Kummer'schen Kegels mit Bezug auf die Kegelschnitte der einen zugehörigen Kegelschnittschaar bilden stets eine Regelschaar zweiten Grades. (Der Scheitel $S_1$ des Kegels liegt nur dann auf dieser Regelschaar, wenn $S_1$ auf $F^4$ liegt; ein solcher Punkt ist nach Früherem ein Knotenpunkt der Fläche, durch welchen alle Kegel-

* Dass die beiden adjungirten Schaaren $I$, $I^*$ genannt werden, sei der Bequemlichkeit des Ausdrucks wegen gestattet; die hier abzuleitenden Resultate können auf gleichberechtigte Kegelschnittschaaren übertragen werden.

schnitte der Schaar hindurchgehen; die genannte Regelschaar geht über in seinen Berührungskegel.)

Der Kegelscheitel $S_1$ liefert für die zugeordneten Schaaren $I$, $I^*$ zwei solche Regelschaaren zweiten Grades. Da aber jeder Kegelschnitt von $I$ jeden von $I^*$ in zwei Punkten auf der durch $S_1$ gehenden Schnittlinie ihrer Ebenen schneidet, so schneiden alle Polaren von $S_1$ für die Kegelschnitte der Schaar $I$ alle Polaren der Schaar $I^*$: Die Polaren eines Kegelscheitels für die Kegelschnitte der beiden zugeordneten adjungirten Schaaren bilden die beiden Erzeugungen derselben Fläche zweiten Grades. — Die Anzahl dieser covarianten Flächen ist fünf; nennen wir sie einfach „Polarenhyperboloide“. — Aus Vorstehendem erhellt nunmehr folgender Zusammenhang: Der Kummer'sche Kegel $K_1^2$ ist der Berührungskegel aus $S_1$ an das zugehörige Polarenhyperboloid. Es tritt damit der Kegelschnitt auf, längs welchem $K_1^2$ und das Polarenhyperboloid sich berühren; seine Punkte sind die conjugirten von $S_1$ für beide, in derselben Ebene von $K_1^2$ liegende adjungirte Kegelschnitte. Dieser Kegelschnitt trifft die Raumcurve vierter Ordnung erster Species $c_1^4$, längs welcher $K_1^2$ die Fläche $F^4$ derührt, in vier Punkten; die Tangenten an $c_1^4$ in diesen Punkten gehen durch $S_1$ und es folgt: Unter den Kegelschnitten von zwei adjungirten Schaaren, welche je in einer Ebene liegen, sind vier Paare, welche sich ausserhalb des Doppelkegelschnittes berühren*; die Berührungspunkte liegen in der der Polarebene des Kegelscheitels für das Polarenhyperboloid.

Irgend eine Gerade $g$ aus $S_1$ schneide zwei Kegelschnitte der Schaar $I$ (und auch der Schaar $I^*$) in den beiden Punktepaaren $A_1B_1$, $A_2B_2$. Die vierten harmonischen Punkte $P_1$, $P_2$ von $S_1$ für diese zwei Punktepaare sind die Schnittpunkte von $g$ mit dem Polarenhyperboloid. Man erkennt hieraus, dass das Polarenhyperboloid keineswegs die quadratische Polarfläche von $S_1$ für $F^4$ sein kann. Construirt man aber endlich den vierten harmonischen Punkt $Q$ von $S_1$ für das Paar $P_1P_2$, so ist $Q$ auf der Polarebene von $S_1$ für $F^4$ gelegen: Die Polarebene des Scheitels des Kummer'schen Kegels mit Bezug auf dessen Polarenhyperboloid ist die Polarebene des genannten Punktes für die Fläche vierter Ordnung.

Man kann beweisen, dass $F^4$ von einem Polarenhyperboloid in zwei getrennten Curven geschnitten wird, wovon die eine sehr bemerkenswerth

* Bei dieser Berührung ist die gemeinsame Tangente eine Seite des Kegels $K_1^2$. — Es giebt vier weitere Ebenen an $K_1^2$, welche $c^2$ berühren; die darin liegenden Kegelschnittpaare berühren sich und $c^2$ in demselben Punkte. Endlich berühren sich diese Kegelschnittpaare auch in den vier Ebenen von $K_1^2$, deren Berührungsseiten durch die Pinchpunkte gehen. Der Berührungspunkt ist der Pinchpunkt und die gemeinsame Tangente ist die Schnittlinie jener Ebene mit der singulären Tangentialebene des Pinchpunktes.

ist. — Es seien E eine Ebene an $K_1^2$; $e_1^2$, $e_2^2$ die in E liegenden Kegelschnitte; $s$ die Berührungsseite von E mit $K_1^2$; $p_1$, $p_2$ die Polaren von $S_1$ für $e_1^2$, $e_2^2$. Der Schnitt von E mit dem Polarenhyperboloid besteht aus $p_1$, $p_2$. Die Schnittpunkte von $p_1$ mit $e_1^2$ und von $p_2$ mit $e_2^2$ sind Punkte auf $F^4$, in welchen die Tangentialebenen durch $S_1$ gehen; sie sind die Doppelpunkte der bereits erwähnten Involutionen auf $e_1^2$, $e_2^2$. Diese vier Punkte liegen auf dem Berührungskegel vierter Ordnung, welchen man aus $S_1$ an $F^4$ (ausser $K_1^2$) legen kann. (Den Schnittpunkten von $p_1$ mit $e_2^2$ und von $p_2$ mit $e_1^2$ kommt diese Eigenschaft nicht zu.) Jene vier Punkte, sagen wir kurz $e_i^2 p_i$, beschreiben bei der Bewegung von E um $K_1^2$ eine Curve vierter Ordnung, welche, auf dem Polarenhyperboloid liegend, jede seiner Erzeugenden zweimal schneidet. Letzteres gilt auch für den Ort der Punkte $e_i^2 p_k$ und es folgt: Die Schnittcurve des Polarenhyperboloids mit $F^4$ zerfällt in zwei Raumcurven vierter Ordnung erster Species. Die eine davon ist die Berührungscurve des aus dem Kegelscheitel an $F^4$ (ausser $K_1^2$) gelegten Berührungskegels vierter Ordnung; in jedem ihrer Punkte berühren sich zwei Kegelschnitte der zum Kegel gehörenden adjungirten Schaaren.* Wenn eine Ebene A an $K_1^2$ einen zerfallenden Kegelschnitt $a_1 a_2$ der Schaar $I$ (oder $I^*$) enthält, so fallen die Doppelpunkte der Involution auf $a_1 a_2$ in dem Schnittpunkte dieser Geraden zusammen: Die letztgenannte Raumcurve vierter Ordnung geht durch die acht Schnittpunkte der in den beiden Kegelschnittschaaren enthaltenen Geradenpaare und berührt in jedem Schnittpunkte den vierten harmonischen Strahl des Kegelscheitels mit Bezug auf das Geradenpaar.**

Schneidet man $F^4$ und den Kummer'schen Kegel $K_1^2$ mit der Polarebene des Kegelscheitels $S_1$, so erhält man eine Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten und einem Kegelschnitt, welche beide sich in vier Punkten berühren. Diese Punkte liefern mit $K_1^2$ die Ebenen, in denen sich je zwei Kegelschnitte der Schaaren $I$, $I^*$, die in derselben Ebene von $K_1^2$ liegen, berühren.

Nehmen wir wieder an, man kenne von der Fläche $F^4$ die drei Geradenpaare $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $c_1 c_2$, deren Ebenen sich im Kegelscheitel $S_1$ schneiden. Es sei $t$ eine Transversale der vierten harmonischen Strahlen $a_0$, $b_0$, $c_0$ von

* Zur Ergänzung des gegebenen Beweises betrachte man irgend einen Querschnitt von $F^4$, dessen Ebene P durch $S_1$ gelegt ist. Der Schnitt besteht aus einer Curve vierter Ordnung $p^4$ mit zwei Doppelpunkten, $S_1$ ist der Schnittpunkt zweier Doppeltangenten $t_1$, $t_2$ von $p^4$. Aus $S_1$ gehen an $p^4$ noch vier Tangenten, welche $P, Q, R, S$ zu Berührungspunkten haben mögen. Durch $P, Q, R, S$ lässt sich ein Kegelschnitt legen, welcher $t_1$, $t_2$ je im vierten harmonischen Punkte von $S_1$ für die Berührungspunkte dieser Doppeltangenten berührt. Er ist der Schnitt mit dem Polarenhyperboloid. Die Punkte von $p^4$ sind durch $S_1$ und die Punkte dieses Kegelschnittes paarweise harmonisch getrennt.

** Vergl. Clebsch, Crelle's Journal Bd. 69 S. 25.

$S_1$ für die Geradenpaare $a_i$, $b_i$, $c_i$. Die Ebene $S_1 t$ schneidet die sechs gegebenen Geraden in Punkten eines Kegelschnittes, welcher augenscheinlich dann und nur dann zerfällt, wenn die sechs Punkte zu je dreien in zwei Geraden liegen. Weil aber die Geraden eines Paares, z. B. $b_1 b_2$, sich schneiden, diejenigen verschiedener Paare windschief sind, so müssen jedesmal drei Geraden, welche von der Ebene $S_1 t$ in Punkten einer Geraden geschnitten werden, allen drei Paaren $a_i$, $b_i$, $c_i$ entnommen sein. Die Ebene $S_1 t$ z. B., welche $a_1$, $b_1$, $c_1$ in Punkten einer Geraden schneidet, thut dasselbe für $a_2$, $b_2$, $c_2$; diese Ebene enthält einen zerfallenden Kegelschnitt der Schaar $I^*$. Man findet diese Ebene eindeutig wie folgt. Die Geraden $a_0 b_0 c_0$ und $a_1 b_1 c_1$ bestimmen (durch ihre Transversalen) zwei Regelschaaren, an welche aus $S_1$ im Ganzen vier gemeinsame Tangentialebenen gelegt werden können. Drei davon, nämlich die Ebenen A (von $a_1 a_2$), B, C sind bereits bekannt und fallen ausser Betracht. Die vierte gemeinsame Ebene E schneidet alsdann $a_1$, $b_1$, $c_1$ in drei Punkten der Geraden $e_1$; $a_2$, $b_2$, $c_2$ in drei Punkten der Geraden $e_2$. — Ebenso findet man drei weitere Ebenen F, G, H, welche bezüglich

$$a_1 b_1 c_2,\ a_2 b_2 c_1;\quad a_1 b_2 c_1,\ a_2 b_1 c_2;\quad a_1 b_2 c_2,\ a_2 b_1 c_1$$

je in drei Punkten der Geraden

$$f_1,\ f_2;\ g_1,\ g_2;\ h_1,\ h_2$$

schneiden, und es sind damit die in der Schaar $I^*$ enthaltenen Geradenpaare linear construirt.

Umgekehrt könnte man etwa aus $e_1$, $e_2$; $f_1$, $f_2$; $g_1$, $g_2$ die Geradenpaare der Schaar $I$ finden. Nach der eingeführten Bezeichnung werden $e_1 f_1 g_1$, $e_1 f_1 g_2$, $e_1 f_2 g_1$, $e_2 f_2 g_2$, $e_2 f_2 g_1$, $e_2 f_1 g_2$ bezüglich von $a_1$, $b_1$, $c_1$, $a_2$, $b_2$, $c_2$ geschnitten. Es verbleiben die Ternen $e_1 f_2 g_2$, $e_2 f_1 g_1$; erstere sollen von $d_1$, letztere von $d_2$ geschnitten werden. So erhält man folgende Tabelle, in welcher neben jeder einzelnen Geraden diejenigen fünf angegeben sind, welche erstere schneiden.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $a_2\, e_1\, f_1\, g_1\, h_1$ | $a_2$ | $a_1\, e_2\, f_2\, g_2\, h_2$ | $e_1$ | $e_2\, a_1\, b_1\, c_1\, d_1$ | $e_2$ | $e_1\, a_2\, b_2\, c_2\, d_2$ |
| $b_1$ | $b_2\, e_1\, f_1\, g_2\, h_2$ | $b_2$ | $b_1\, e_2\, f_2\, g_1\, h_1$ | $f_1$ | $f_2\, a_1\, b_1\, c_2\, d_2$ | $f_2$ | $f_1\, a_2\, b_2\, c_1\, d_1$ |
| $c_1$ | $c_2\, e_1\, f_2\, g_1\, h_2$ | $c_2$ | $c_1\, e_2\, f_1\, g_2\, h_1$ | $g_1$ | $g_2\, a_1\, b_2\, c_1\, d_2$ | $g_2$ | $g_1\, a_2\, b_1\, c_2\, d_1$ |
| $d_1$ | $d_2\, e_1\, f_2\, g_2\, h_1$ | $d_2$ | $d_1\, e_2\, f_1\, g_1\, h_2$ | $h_1$ | $h_2\, a_1\, b_2\, c_2\, d_1$ | $h_2$ | $h_1\, a_2\, b_1\, c_1\, d_2$ |

Die folgende Tabelle enthält die Geradenpaare, welche jedesmal zu derselben Kegelschnittschaar gehören.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $I$ | $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $c_1 c_2$, $d_1 d_2$ | $I^*$ | $e_1 e_2$, $f_1 f_2$, $g_1 g_2$, $h_1 h_2$ |
| $II$ | $a_1 e_1$, $b_2 f_2$, $c_2 g_2$, $d_2 h_2$ | $II^*$ | $a_2 e_2$, $b_1 f_1$, $c_1 g_1$, $d_1 h_1$ |
| $III$ | $a_1 f_1$, $b_2 e_2$, $c_1 h_2$, $d_1 g_2$ | $III^*$ | $a_2 f_2$, $b_1 e_1$, $c_2 h_1$, $d_2 g_1$ |
| $IV$ | $a_1 g_1$, $b_1 h_2$, $c_2 e_2$, $d_1 f_2$ | $IV^*$ | $a_2 g_2$, $b_2 h_1$, $c_1 e_2$, $d_2 f_1$ |
| $V$ | $a_1 h_1$, $b_1 g_2$, $c_1 f_2$, $d_2 e_2$ | $V^*$ | $a_2 h_2$, $b_2 g_1$, $c_2 f_1$, $d_1 e_1$ |

Die Linienpaare einer ganzen Horizontalreihe bezeichnen zugleich je acht Ebenen des zu den adjungirten Schaaren gehörenden Kummer'schen Kegels $K_1^2 \dots K_5^2$.

Wenn der Scheitel $S_1$ eines Kummer'schen Kegels in die Ebene C des Doppelkegelschnittes fällt, so ist $S_1$ ein Diagonalpunkt des Vierecks der Pinchpunkte. $F^4$ ist dann sich selbst entsprechend in einer involutorischen Collineation vom Centrum $S_1$, deren Ebene $S_1$ die Punkte $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, ... enthält. Das Polarenhyperboloid des Scheitels $S_1$ degenerirt in den Kegelschnitt, welchen $S_1$ aus $K_1^2$ schneidet. Aus der letzten Tabelle folgt, dass die Scheitel $S_2, \dots, S_5$ der übrigen Kegel in $S_1$ liegen, so dass auch diese Kegel und ihre Hyperboloide ihre eigenen Bilder in der Collineation sind. $S_1$ schneidet aus $F^4$ eine Curve vierter Ordnung $c^4$ mit zwei Knoten und mit acht Doppeltangenten. Diese Doppeltangenten gehen zu je zweien durch die vier Kegelscheitel. — Wenn ein zweiter Kegelscheitel, $S_2$, in C fällt, so tritt eine neue Collineation vom Centrum $S_2$ und der Ebene $S_2$ auf. Die $c^4$, welche durch $S_1$ aus $F^4$ geschnitten wird, hat nunmehr folgende Eigenschaften. Zwei ihrer Doppeltangenten schneiden sich in $S_2$, also auf der Verbindungslinie der Knoten; $S_2$ ist ein Homologiecentrum für $c^4$, die Homologieaxe ist die Schnittlinie $S_1 S_2$, auf ihr schneiden sich die verbleibenden sechs Doppeltangenten paarweise in den Scheiteln der übrigen Kummer-schen Kegel. — Rückt endlich auch von diesen drei Scheiteln einer in die Ebene C (in den Punkt $C S_1 S_2$), so fallen die beiden übrigen im Schnittpunkte der nunmehr vorhandenen drei Collineationsebenen zusammen. Dieser Punkt ist alsdann der Scheitel eines singulären Kummer'schen Kegels, bezüglich ein Knotenpunkt der Fläche $F^4$.

Wenn wiederum $S_1$ in C fällt, $K_1^2$ aber C berührt, so gehört $c^2$ den adjungirten Schaaren $I$, $I^*$ an. Beide Schaaren „durchschneiden sich" in $c^2$ und die Developpable an $F^4$ längs $c^2$ zerfällt in zwei Kegel zweiter Classe. In diesem Falle kann kein weiterer Kegelscheitel in C liegen, es sei denn, dass gleichzeitig $c^2$ selbst zerfällt.

2. Die Fläche vierter Ordnung $F^4$ mit Rückkehrkegelschnitt $c^2$ wird durch $c^2$ und einen beliebigen ihrer Kegelschnitte $g^2$ erzeugt wie folgt. Die Kegelschnitte $c^2$ und $g^2$, welche sich hier nothwendig berühren müssen, sind die Grundcurve eines Büschels von Flächen zweiten Grades. Ein Kegel $K^2$, durch $c^2$ gehend, habe seinen Scheitel $S$ in der Ebene G von $g^2$, seine Ebenen E sind den Flächen $F^2$ des Büschels $c^2 g^2$ projectiv so zugeordnet, dass der Ebene G die in die Ebenen CG zerfallende Fläche entspricht. Die Kegelschnitte, in welchen die Ebenen E ihre entsprechenden Flächen $F^2$ schneiden, bilden eine Schaar, welche $F^4$ einfach überdeckt.

Von $F^4$ liegt in E zunächst der Kegelschnitt $e_1^2 = EF^2$. Die übrigen Ebenen von $K^2$ und ihre entsprechenden Flächen des Büschels schneiden E in einem Strahlbüschel aus $S$ und einem dazu projectiven Kegelschnittbüschel; der Berührungsseite $s$ von E mit $K^2$ entspricht $e_1^2$. Der Ort der

Schnittpunkte der Strahlen aus $S$ mit den entsprechenden Kegelschnitten ist ein weiterer Kegelschnitt $e_2^2$ (vergl. Nr. 2 des vorigen Aufsatzes); es berühren $e_1^2$, $e_2^2$ die in dem Berührungspunkte $E$ von E mit $c^2$ an $c^2$ gelegte Tangente $e$ im Punkte $E$; sie haben in $E$ drei consecutive Punkte gemein,* der vierte gemeinsame Punkt $E_1$ liegt auf der Berührungsseite $s$. Der zuletzt genannte Punkt $E_1$ ist der eigentliche Berührungspunkt von E resp. von $s$ mit F$^4$, er kann auch bezeichnet werden als der Schnittpunkt von $s$ mit F$^2$, welcher nicht auf $c^2$ liegt.

Bewegt man E um K$^2$, so beschreiben $e_1^2$, $e_2^2$ die beiden zu K$^2$ gehörenden adjungirten Kegelschnittschaaren. Der Ort ihres Schnittpunktes $E_1 = s$F$^2$ ist die Berührungscurve von K$^2$ mit F$^4$, also ein auf K$^2$ gelegener fester Kegelschnitt $k^2$, welcher $c^2$ in zwei Punkten $A$, $B$ schneidet. Die in $A$, $B$ an K$^2$ gelegten Ebenen berühren ihre entsprechenden Flächen zweiten Grades, A$^2$, B$^2$, in ebendiesen Punkten, weshalb die Kegelschnitte $a_1^2$, $b_1^2$ in $A$, $B$ Doppelpunkte besitzen. Alle vier Schnittpunkte von $a_2^2$ mit $a_1^2$ fallen in $A$, somit hat auch $a_2^2$ in $A$ einen Doppelpunkt. Das Analoge gilt für $b_1^2$, $b_2^2$ und es folgt: Zwei Ebenen A, B von K$^2$ berühren ihre entsprechenden Flächen A$^2$, B$^2$ in je einem Punkte $A$, $B$ auf $c^2$; in diesen Ebenen zerfallen die adjungirten Kegelschnitte $a_1^2$, $a_2^2$ resp. $b_1^2$, $b_2^2$ in Geradenpaare aus $A$, $B$ und ausserdem kommen in den beiden Kegelschnittschaaren keine Geradenpaare vor. Hieraus folgt unmittelbar, dass alle Geraden in A durch $A$ und in B durch $B$ gehend, daselbst F$^4$ in vier zusammenfallenden Punkten treffen; es sind $A$, $B$ die Clospunkte der Fläche, A, B ihre singulären Tangentialebenen.**

Die Verbindungslinie $AB = a$ der Clospunkte soll wieder die Axe der Fläche genannt werden. Ebene Querschnitte durch $a$ haben in $A$, $B$ Selbstberührungspunkte und zerfallen somit in Kegelschnittpaare. Hieraus folgt, dass die in A und B gelegenen Geraden von F$^4$ sich paarweise auf der Schnittlinie AB $= a_0$, der Gegenaxe, schneiden. Diese Geraden seien $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$; $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$, wobei jedesmal die vom selben Index auf $a_0$ zum Schnitt gelangen. Wenn alsdann bei der oben genannten Erzeugung der Fläche $a_i$, $a_k$ der Schaar von Kegelschnitten $(e_1^2)$ angehören, die man direct als Schnitte EF$^2$ erhält, so gehört auch $b_l b_m$ dieser Schaar an; $a_l a_m$, $b_i b_k$ sind die zerfallenden Kegelschnitte der adjungirten Schaar $(e_2^2)$.

---

* Die Ebene E schneidet aus dem Kegel K$_0^2$, welcher F$^4$ längs $c^2$ berührt, einen Kegelschnitt $e_0^2$, welcher $e_1^2$ und $e_2^2$ ebenfalls in $E$ osculirt. Dieser Kegelschnitt $e_0^2$ berührt ausserdem die Ebenen A und B; durch $c^2$ und $e_0^2$ ist K$_0^2$ eindeutig bestimmt. — Die Bestimmung von K$_0^2$ aus $c^2$, $a_0$ und einem Kegelschnitte $e_i^2$ ist eindeutig. Umgekehrt erkennt man, wie K$_0^2$ zur Construction einer Kegelschnittschaar dient.

** Zeuthen, Math. Annalen X S. 446.

An dieser Stelle werde angenommen, es seien von der Fläche $F^4$ bekannt der Cuspidalkegelschnitt, die Axen und ihre Schnittpunkte mit $F^4$, mit anderen Worten $c^2$ und die vier Geradenpaare $a_i\,b_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Dann lassen sich die sechs Kegelschnittschaaren, die drei Kummer'schen Kegel und die Polarenhyperboloide direct finden. Die Kegelschnitte der ersten Schaar (berühren $c^2$ und) schneiden die vier Geraden $a_1$, $a_2$, $b_3$, $b_4$; die der adjungirten Schaar schneiden $a_3$, $a_4$, $b_1$, $b_2$ u. s. f. Die Bestimmung der ersten Schaar ist folgende.

Es habe $c^2$ in einem seiner Punkte $E$ die Tangente $e$ (Fig. 2). Um $e$ dreht man eine Ebene E, welche $a_1$, $a_2$, $b_3$, $b_4$ in $A_1$, $A_2$, $B_3$, $B_4$ schneidet. Wenn diese Ebene in einer bestimmten Lage einen Kegelschnitt der Schaar $I$ enthält, so ergeben die Seiten des Vierecks $A_1\,A_2\,B_3\,B_4$ mit $e$ geschnitten drei Punktepaare einer Involution, welche in $E$ einen selbstentsprechenden Punkt haben muss. Die Gegenseiten $A_1\,A_2$, $B_3\,B_4$ liefern nun ein festliegendes Paar $M$, $N$; soll daher $E$ der eine Doppelpunkt der Involution sein, so fällt der andere in $O = a\,e$. Wenn daher die Schnittpunkte $P$, $P'$ von $A_1\,B_3$ und $A_2\,B_4$ mit $E$ die Strecke $O\,E$ harmonisch theilen, so befindet sich E in der richtigen Lage. — Bei der Drehung von $E$ um $e$ beschreiben $P$, $P'$ zwei projective Reihen, für E = C fallen beide in $O$ zusammen, und es kommt also nur einmal vor, dass $OEPP'$ eine harmonische Gruppe ist (abgesehen von E = C, welche Ebene ausser Betracht fällt). Diese eine Ebene $E_1$ schneidet alsdann $a_0$ in dem Scheitel $S_1$ des Kegels $K_1^2$. Construirt man in dieser Ebene $E_1$ die vierten harmonischen Punkte $A_{12}$, $B_{34}$ von $S_1$ für $A_1\,A_2$, $B_3\,B_4$, so ist deren Verbindungslinie die Polare von $S_1$ für den in $E_1$ gelegenen Kegelschnitt der Schaar $I$. — Lässt man nun $E$ den Kegelschnitt $c^2$ durchlaufen, so beschreibt E den Kummer'schen Kegel $K_1^2 = S_1\,c^2$; die Polare $A_{12}\,B_{34}$ schneidet A, B in zwei projectiven Reihen, deren Träger die Polaren von $S_1$ für $a_1\,a_2$, $b_3\,b_4$ sind. Indem man beide Kegelschnittschaaren beachtet, die $K_1^2$ zukommen, hat man: Die Polaren von $S_1$ für die Geradenpaare $a_1\,a_2$, $a_3\,a_4$, $b_1\,b_2$, $b_3\,b_4$ sind ein windschiefes Vierseit des dem Kegel $K_1^2$ zugeordneten Polarenhyperboloids.

Bei der Bestimmung der Clospunkte hat sich herausgestellt, dass die Ebenen durch die Axe aus $F^4$ Kegelschnittpaare ausschneiden, welche A, B in $A$, $B$ berühren. Daher kann man durch $c^2$ und irgend zwei dieser Kegelschnitte jedesmal eine Fläche zweiten Grades legen (welche $F^4$ weiterhin nicht mehr schneidet). Umgekehrt schneidet eine Fläche zweiten Grades $F^2$, durch $c^2$ und einen von diesen Kegelschnitten gelegt, $F^4$ in einem weiteren Kegelschnitte durch $A$, $B$. Denn sei $P$ irgend ein, $F^2$ und $F^4$ gemeinsamer Punkt, so muss der Kegelschnitt durch $P$, welcher A und B in $A$ und $B$ berührt, auf $F^2$ und auf $F^4$ liegen. Legt man daher durch $c^2$ und einen beliebigen dieser Kegelschnitte, $k^2$, dessen Ebene durch die Axe geht, einen Büschel von Flächen zweiten Grades, so werden durch diese Flächen

alle Kegelschnitte aus $F^4$ geschnitten, deren Ebenen die Axe $a$ enthalten. Zu jeder Ebene durch $a$ gehören aber zwei Flächen, welche sich innerhalb des Büschels vertauschungsfähig entsprechen müssen. Daraus folgt die schon früher (analytisch) hergeleitete Erzeugung der „Involutionsschaar“ von Kegelschnitten auf $F^4$. — Unter den zu einer Involution gepaarten Flächen des Büschels $c^2g^2$ sind zwei selbstentsprechende (Doppelflächen). Der einen entspricht die Ebene C von $c^2$ und es erweist sich der Cuspidalkegelschnitt $c^2$ als „Rückkehrkegelschnitt der Involutionsschaar“; die diesbezügliche Doppelfläche wird mit $F^4$ längs $c^2$ von demselben Kegel zweiter Classe $K_0^2$ berührt. $K_0^2$ enthält die Ebenen A, B, weshalb sein Scheitel in die Gegenaxe $a_0$ fallen muss. — Der zweiten Doppelfläche entspricht als Ebene durch $a$ offenbar die Doppeltangentialebene von $F^4$. Diese Ebene schneidet aus A, B die singulären Tangenten in den Clospunkten und ist gleichzeitig für die beiden letzteren die ausgezeichnete durch sie hindurch gelegte Ebene; an Stelle des Contactes zweiter Ordnung der Aeste in dieser Ebene, an den Clospunkten, tritt Identität dieser Aeste ein (Zeuthen, l. c. S. 480). — Der einfachste Flächenbüschel, welcher bei Erzeugung der Involutionsschaar auftritt, ist augenscheinlich derjenige, welcher an $c^2$ und den $c^2$ unendlich nahen Kegelschnitt dieser Schaar gelegt ist (dessen Flächen $K_0^2$ längs $c^2$ berühren).

Besitzt die Fläche $F^4$ mit Cuspidalkegelschnitt einen conischen Knoten $S$, so ist er der Scheitel eines Kummer'schen Kegels $K^2 = Sc^2$, er liegt auf der Gegenaxe $a_0$. Von den vier Schnittpunkten von $a_0$ mit $F^4$ fallen zwei in $S$ und damit werden je zwei von den Geraden $a_i$ ($b_i$) mit $AS$ ($BS$) identisch, z. B. $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$. Die Kegelschnittschaaren, welche ($c^2$ berühren und) $a_1$, $a_3$, $b_2$, $b_4$, und die, welche $a_2$, $a_3$, $b_1$, $b_4$ schneiden, sind hier identisch, ebenso ihre adjungirten (welche entweder $a_2$, $a_4$, $b_1$, $b_3$ oder $a_1$, $a_4$, $b_2$, $b_3$ schneiden). Es erweist sich $S$ selbst als Scheitel des zu diesen vereinigten Schaaren gehörenden Kummer'schen Kegels. Der Kegel $Sc^2 = K^2$ ist hier ein singulärer Kummer'scher Kegel, welcher durch Vereinigung aus zweien entstanden ist. Die zugehörigen adjungirten Kegelschnittschaaren sind durch Vereinigung aus je zwei Schaaren entstanden; ihre Kegelschnitte gehen sämmtlich durch den Kegelscheitel, sie sind singuläre Kegelschnittschaaren.* — Ausser den hier abgeleiteten Kegelschnittschaaren und der Involutionsschaar hat man noch zwei adjungirte Schaaren, welche zu einem Kummer'schen Kegel $K_1^2 = S_1 c^2$ gehören, dessen Scheitel $S_1$ ebenfalls auf $a_0$ liegt. Diese Kegelschnitte, welche $c^2$ berühren, schneiden entweder $b_3$, $b_4$ und berühren A an $AS$, oder sie schneiden $a_3$, $a_4$ und berühren B an $BS$. — Der singuläre Kegel $K^2$ berührt $F^4$ längs dem in $AS$, $BS$ zerfallenden Kegelschnitt, währenddem $K_1^2$ die Fläche längs einem irreducibeln Kegelschnitt der Involutionsschaar berührt.

* Jeder Kegelschnitt dieser singulären Schaaren berührt in $S$ eine Seite des zu diesem Knoten $S$ gehörenden Berührungskegels zweiter Ordnung $S^2$.

Diese Fläche wird offenbar durch folgende Erzeugungsweisen erhalten. Liegt bei der zu Anfang dieser Nummer gegebenen Erzeugung $S$ auf $g^2$, so erhält man unsere Fläche mit conischem Knoten mit Hilfe des singulären Kegels. Hierbei zeigt es sich, dass der (nach Früherem leicht construirbare) Berührungskegel $S^2$ im Knoten $S$ die Ebenen A, B an $AS$, $BS$ berührt. Die zerfallenden Kegelschnitte $a_1^2$, $a_2^2$ in A haben $AS$ gemein und ebenso ist $BS$ eine den zerfallenden Kegelschnitten $b_1^2$, $b_2^2$ in B gemeinsame Gerade. — Wird diese Fläche wieder erzeugt wie die allgemeine dieser Nummer, und liegt $S$ nicht auf $g^2$, so muss in A (B) der eine der Kegelschnitte $a_1^2$, $a_2^2$ ($b_1^2$, $b_2^2$) zu einer Doppelgeraden werden, welche nicht durch den Kegelscheitel geht. Es ist das die Erzeugung mit Hilfe des Kegels $K_1^2$. — Erzeugt man endlich die Fläche aus der Involutionsschaar, so giebt es zwei consecutive Flächen im Büschel, welche von ihren entsprechenden Ebenen berührt werden.

Die Clospunkte dieser Fläche mit Knoten haben die weitere besondere Eigenschaft, dass zwei von den vier fünfpunktig berührenden Geraden zusammenfallen. — Wenn der Berührungskegel $S^2$ im Knoten mit dem singulären Kegel $K^2$ zusammenfällt, so zerfällt $F^4$ in $K^2$ und eine Fläche zweiten Grades, welche $K^2$ längs $c^2$ berührt. Dieser Fall tritt ein, wenn in A (B) die einzelnen Geraden $a_3$, $a_4$ ($b_3$, $b_4$) durch die doppelte Gerade $AS$ ($BS$) und die Tangente an den Cuspidalkegelschnitt harmonisch getrennt sind.

Wenn oben $S^2$ in zwei Ebenen zerfällt, so können nur A, B diese Ebenen sein. Die Fläche hat alsdann einen biplanaren Knoten. Indem man diese Ebenen A, B bei der Construction der Kegelschnittschaaren benutzt (die zwei Kegelschnitte $e_1^2$, $e_2^2$ in der Ebene E an $K^2$ berühren die Schnittlinien AE resp. BE in $S$), so findet man, dass drei von den vier Geraden $a_i$ ($b_i$) in $AS$ ($BS$) fallen, etwa $a_1 = a_2 = a_3 = AS$, $b_1 = b_2 = b_3 = BS$. Daraus schliesst man, dass $F^4$ neben der Involutionsschaar nur noch zwei adjungirte, doppelt singuläre Kegelschnittschaaren hat; der einzig existirende doppelt singuläre Kegel hat seinen Scheitel im biplanaren Knoten. (Dieser Kegel und seine Kegelschnittschaaren sind durch Vereinigung aus dreien hervorgegangen.) — Die Construction der Kegelschnittschaaren ist sehr einfach folgende. Eine Ebene E des Kegels $K^2$ berühre $c^2$ in $E$ und schneide A, B in $m$, $n$. Der eine Kegelschnitt in E berührt $c^2$ ($e$) in $E$, $m$ in $S$ und geht durch den Schnittpunkt von $b_4$ mit $n$. Der zweite berührt $c^2$ in $E$, $n$ in $S$ und enthält den Schnittpunkt von $m$ mit $a_4$. — Aus dieser Construction geht unmittelbar hervor, dass, wenn alle vier Geraden $a_i$ ($b_i$) zusammenfallen, $F^4$ zu einem doppelten Kegel zweiter Ordnung wird.

3. Lässt man in voriger Nummer $B$, B nach $A$, A rücken, so erhält man die Fläche vierter Ordnung mit Cuspidalkegelschnitt und mit vereinigten Clospunkten. Die Axe $a$ ist hier die Tangente an $c^2$ im Clospunkte $A$.

Jede $F^4$ mit Cuspidalkegelschnitt $c^2$ wird längs $c^2$ von einem Kegel zweiter Classe $K_0^2$ berührt und die Flächen zweiten Grades $F^2$, welche $K_0^2$ längs $c^2$ berühren, schneiden $F^4$ in den Kegelschnitten der Involutionsschaar. Ordnen wir daher die $K_0^2$ längs $c^2$ berührenden Flächen zu einer Involution, so dass die Ebene C von $c^2$ die eine selbstentsprechende (Doppelfläche) ist. Die Flächenpaare bringt man in bekannter Weise in projective Zuordnung mit den Ebenen E durch die Tangente $a$ an $c^2$. Die in E liegenden Kegelschnittpaare haben bei $A$ stets vier consecutive Punkte gemein. Unter diesen Ebenen entspreche D der zweiten Doppelfläche, so ist D die Doppeltangentialebene von $F^4$. Vor Allem aber ist die Ebene A ausgezeichnet, welche $K_0^2$ längs $S_0 A$ berührt: diese Ebene A schneidet ihr entsprechendes Flächenpaar in vier Geraden $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, welche die einzigen der Schaar und der Fläche sind. Da nun alle Flächen $F^2$ des genannten Büschels aus A die Geradenpaare einer Involution schneiden. deren Doppelstrahlen $a$ und die Berührungsseite $a_0$ von A mit $K_0^2$ sind, so folgt: Die vier Geraden $a_i$ der Fläche sind durch die Axe $a$ und die Gegenaxe $a_0$ paarweise harmonisch getrennt. Die Gegenaxe $a_0$ fällt in die singuläre Tangentialebene des Clospunktes, ihre Schnittpunkte mit $F^4$ sind im Clospunkt vereinigt. — In bekannter Weise findet man: Die Fläche enthält zwei Kummer'sche Kegel $K_1^2$, $K_2^2$ und dazu gehörend zwei Paare adjungirter Kegelschnittschaaren, endlich die Involutionsschaar.

Kegel aus Punkten auf $a_0$ nach $c^2$ gelegt schneiden $F^4$ in Paaren von Kegelschnitten der Involutionsschaar.* Für $K_1^2$, $K_2^2$ erhält man bekannterweise je nur einen Kegelschnitt doppelt. Für $K_0^2$ fällt der eine dieser Kegelschnitte in $c^2$. — Zur Erzeugung der Kegelschnittschaaren dient übrigens $K_0^2$ wie folgt: Eine Ebene E des Kegels $K_1^2$ berühre $c^2$ in $E$. Diese Ebene enthält zwei Kegelschnitte der Schaaren $I$, $I^*$, welche $c^2$ in $E$ berühren, $K_0^2$ (bezüglich dessen Schnitt mit E) bei $E$ osculiren und von denen jeder zwei der Geraden $a_i$ schneidet, welche nicht mit Bezug auf $a$, $a_0$ conjugirt sind (so dass durch beide Kegelschnitte alle vier Geraden $a_i$ getroffen werden).

Im Clospunkt fällt die singuläre Tangente mit der Tangente an den Cuspidalkegelschnitt zusammen.** — Weil die Axen $a$, $a_0$ sich schneiden, sind die Elemente der Fläche nicht mehr in geschaarter Involution, dagegen entsprechen sie sich noch für $\infty^1$ involutorische Centralcollineationen aus Punkten auf $a$ und mit Ebenen durch $a_0$.***

---

* Dasselbe gilt für die Fläche mit getrennten Clospunkten.

** Ebenso wenn bei einer Fläche mit Doppelkegelschnitt zwei Pinchpunkte sich vereinigen.

*** Hieraus folgt u. A., dass die Geraden $a_i$ paarweise durch $a$ und $a_0$ harmonisch getrennt sind.

Indem man die Geraden $a_i$ in A mit $a_0$ oder unter sich zusammenfallen lässt, erhält man folgende Specialfälle:

a) Wenn eine Gerade $a_1$ in $a_0$ fällt, so geschieht das gleichzeitig für eine zweite Gerade $a_2$ und es bleiben $a_3$, $a_4$, welche durch $a$, $a_0$ harmonisch getrennt sind. Die früheren Kegel $K_1^2$, $K_2^2$ fallen hier zusammen und bilden den einzig vorhandenen singulären Kummer'schen Kegel $K^2$, dessen Scheitel $S$ ein conischer Knoten der Fläche ist. Der Berührungskegel an $F^4$ im Knoten, $S^2$, und der singuläre Kegel $K^2$ haben an $a_0 = AS$ vier consecutive Erzeugende gemein. — Bei der Erzeugung der Involutionsschaar entspricht hier der Ebene A (an $K_0^2$) ein Flächenpaar, dessen eine Fläche der Kegel $K_0^2$ selbst ist.

b) Die Geraden $a_i$ vereinigen sich paarweise, so dass $a_1 = a_2$, $a_3 = a_4$; $F^4$ besitzt also noch zwei Geraden, welche durch $a$, $a_0$ harmonisch getrennt sind. Daraus folgt, dass zwei adjungirte Kegelschnittschaaren mit der Involutionsschaar zusammenfallen und es verbleibt noch ein Kegel mit seinen adjungirten Schaaren. (Der hier wegfallende Kegel wird zu einem doppelten Ebenenbüschel; sein Scheitel ist zu einem unbestimmten Punkte der Axe geworden.) — Bezüglich der Erzeugung der Flächen aus ihrer Involutionsschaar ist hier massgebend, dass der Ebene A die eine, hier irreducible Doppelfläche des involutorischen Büschels entspricht; die Doppeltangentialebene fällt mit der singulären Tangentialebene im Clospunkt zusammen.

c) Alle Geraden in A fallen mit $a_0$ zusammen, $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_0$. Die Büschel von Flächen zweiten Grades durch $c^2$ und irgend zwei der Geraden $a_i$ sind identisch und es folgt: Alle Kegelschnittschaaren fallen mit der Involutionsschaar zusammen. — Das Flächenpaar, welches bei der Erzeugung der Involutionsschaar der Ebene A entspricht, besteht aus dem Kegel $K_0^2$ doppelt gezählt.

In allen diesen Specialfällen behält $A$ seinen Charakter als Clospunkt bei

---

# Kleinere Mittheilungen.

---

## IX. Conjugirte Reciprocitäten.

Der Begriff „conjugirte Reciprocitäten" ist durch die von Herrn Prof. Rosanes in Breslau veröffentlichte Abhandlung „Zur Theorie der reciproken Verwandtschaft", Crelle's Journal Bd. 90, erweitert worden. Herr Prof. Reye in Strassburg spricht in seiner „Geometrie der Lage", I. Abtheilung, 2. Auflage, S. 194 flgg., von sich stützenden Kegelschnitten. Die vorliegende Arbeit hat den Zweck, analog den Reye'schen Ausführungen, den Begriff sich stützender Reciprocitäten aufzustellen und deren Identität mit den von Herrn Rosanes betrachteten conjugirten Reciprocitäten nachzuweisen.

Es mögen $a_1 a_2 \ldots$, $b_1 b_2 \ldots$ die Geraden zweier Ebenen $A$ und $B$, $\alpha_1 \alpha_2 \ldots$, $\beta_1 \beta_2 \ldots$ deren Punkte bedeuten. Vermöge der Reciprocität $R_1$ entspricht der Geraden $a_i$ ein Pol $P_{a_i}$ und dem Punkte $\alpha_i$ eine Polare $p_{\alpha_i}$; vermöge der Reciprocität $R_2$ ist der Geraden $a_i$ ein Pol $\mathfrak{P}_{a_i}$ und dem Punkte $\alpha_i$ eine Polare $\mathfrak{p}_{\alpha_i}$ zugeordnet.

Wie gewöhnlich, werden zwei Punkte conjugirt genannt, wenn der eine in der Polaren des andern liegt; ebenso heissen zwei Gerade conjugirt, wenn die eine durch den Pol der andern geht. Statt conjugirter Punkte oder Geraden einer Reciprocität wird auch oft der Ausdruck „Nullpaare" dieser Reciprocität Anwendung finden. Alle übrigen vorkommenden Bezeichnungen sind in der erwähnten Rosanes'schen Abhandlung erklärt.

### § 1.

Sind $(a_1 b_1)$ und $(a_2 b_2)$ zwei Nullpaare der $R_2$, derart, dass $a_2$ den Pol $P_{b_1} = \alpha_1$ und $b_2$ den Pol $P_{a_1} = \beta_1$ enthält, und construiren wir zu $a_1 | a_2 = \alpha_3$ die Polare $p_{\alpha_3} = b_3$ und zu $b_1 | b_2 = \beta_3$ die Polare $p_{\beta_3} = a_3$, so ist $\begin{matrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \end{matrix}$ ein Paar polarer Dreiseite der $R_1$, deren entsprechende Seitenpaare $(a_1 b_1)$ und $(a_2 b_2)$ conjugirt in $R_2$ sind.

Lassen wir $a_2$ das Büschel erster Ordnung $\alpha_1$ durchlaufen, so beschreibt $b_3$ das Strahlenbüschel erster Ordnung $\beta_1$, $a_3$ das Büschel $\alpha_1$ und $\mathfrak{P}_{a_3^i}$ die gerade Punktreihe $\mathfrak{p}_{\alpha_1}$. Die beiden concentrischen Büschel $\beta_1 \cdot \mathfrak{P}_{a_3^i}$ und $\beta_1 \cdot \beta_2^i = b_3^i$ sind projectivisch, sie haben daher zwei Strahlen $b_3^1$ und $b_3^2$ entsprechend gemein.

Für $b_3^i = b_3^1$ und $b_3^2$ ist $\mathfrak{P}_{a_3 i}$ in $b_3^i$ gelegen, es sind daher $\begin{matrix} a_1 a_2^1 a_3^1 \\ b_1 b_2^1 b_3^1 \end{matrix}$ und $\begin{matrix} a_1 a_2^2 a_3^2 \\ b_1 b_2^2 b_3^2 \end{matrix}$ zwei Paare polarer Dreiseite der Reciprocität $R_1$, deren entsprechende Seitenpaare $(a_1 b_1)$, $(a_2^1 b_2^1)$, $(a_3^1 b_3^1)$, $(a_2^2 b_2^2)$, $(a_3^2 b_3^2)$ conjugirt sind in $R_2$.

Die beiden Dreiseitenpaare $\begin{matrix} a_1 a_2^1 a_3^1 \\ b_1 b_2^1 b_3^1 \end{matrix}$ und $\begin{matrix} a_1 a_2^2 a_3^2 \\ b_1 b_2^2 b_3^2 \end{matrix}$ müssen nicht vollständig real sein, denn die Seiten $b_3^1$ und $b_3^2$ z. B. können als Doppelstrahlen zweier projectivischen Büschel, die concentrisch liegen, imaginär werden.

„Sind daher $R_1$ und $R_2$ zwei beliebige Reciprocitäten, so giebt es eine Doppelserie von Paaren polarer Dreiseite $\begin{matrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \end{matrix}$ der $R_1$, deren entsprechende Seiten $(a_i b_i)$, $i = 1, 2, 3$, conjugirt sind in $R_2$."

§ 2.

„Enthält die Reciprocität $R_1$ ausser dieser Doppelserie von Paaren polarer Dreiseite, deren entsprechende Seitenpaare conjugirt in $R_2$ sind, noch ein einziges Paar $\begin{matrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \end{matrix}$ solcher polarer Dreiseite, so sind die entsprechenden Seiten $(a_i^m b_i^m)$, $i = 1, 2, 3$, aller polaren Systeme $\begin{matrix} a_1^m a_2^m a_3^m \\ b_1^m b_2^m b_3^m \end{matrix}$ der $R_1$, welche auf die in § 1 angegebene Art construirt werden, Nullpaare der $R_2$."

Beweis.

*I. Theil.* Hier zeigen wir, dass bei festgehaltenen $(a_1 b_1)$ $a_2^i$ einen beliebigen Strahl des Punktes $\alpha_1$ bedeuten kann, und stets wird $\begin{matrix} a_1 a_2^i a_3^i \\ b_1 b_2^i b_3^i \end{matrix}$ ein Paar polarer Dreiseite der $R_1$ vorstellen, welche die in unserem Satze gewünschten Eigenschaften haben.

Wenn $(a_1 b_1)$ festgehalten wird, so beschreibt, wie wir in § 1 gesehen, $a_3^i$ das Büschel $\alpha_1$, $b_3^i$ das Büschel $\beta_1$ und $\mathfrak{P}_{a_3 i}$ eine gerade Punktreihe, wenn $a_2^i$ sich um $\alpha_1$ dreht. Für $a_3^i = a_3$ ist $\mathfrak{P}_{a_3 i} = \mathfrak{P}_{a_3}$ nach Voraussetzung in $b_3^i = b_3$ gelegen; die beiden concentrischen Strahlenbüschel $\beta_1 \cdot \mathfrak{P}_{a_3 i}$ und $b_3^i$ haben daher, ausser ihren zwei Doppelstrahlen, noch den Strahl $b_3$ entsprechend gemein, sie sind also identisch, d. h. $\mathfrak{P}_{a_3 i}$ liegt stets in $b_3^i$, und alle polaren Dreiseitenpaare $\begin{matrix} a_1 a_2^i a_3^i \\ b_1 b_2^i b_3^i \end{matrix}$ von $R_1$ genügen unserem Satze.

*II. Theil.* Wir weisen jetzt nach, dass unser Satz für die ganzen Ebenen $A$ und $B$ besteht.

$a_2^i$ konnte ein beliebiger Strahl des Büschels $\alpha_1$ sein, und stets genügte $\begin{matrix} a_1 a_2^i a_3^i \\ b_1 b_2^i b_3^i \end{matrix}$ unserem Satze. In ganz analoger Weise lässt sich zeigen,

dass $a_1^i$ ein beliebiger Strahl des Punktes $\alpha_2$ sein kann, und immer wird das polare System $\frac{a_1^i\, a_2^i\, a_3^i}{b_1^i\, b_2^i\, b_3^i}$ von $R_1$ die in unserem Satze gewünschten Eigenschaften besitzen.

Sind $(a_1^m\, b_1^m)$ irgend zwei in $R_2$ conjugirte Strahlen der Büschel $\alpha_2$ resp. $\beta_2$, so kann $P_{a_1^m} = \beta_1^m$ und $P_{b_1^m} = \alpha_1^m$ jeden Punkt der Geraden $p_{\alpha_2}$ resp. $p_{\beta_2}$ vorstellen. Construiren wir jetzt, gemäss den Vorschriften des § 1, alle Paare polarer Dreiseite der $R_1$, deren Seiten $a_2^m$ durch $\alpha_1^m$ gehen, so kommt unter diesen ein Paar vor (dessen Seite $a_2^m = \alpha_1^m\, \alpha_1$ ist), dessen drei entsprechende Seitenpaare $(a_i^m\, b_i^m)$, $i = 1, 2, 3$, conjugirt sind in $R_2$; es haben daher auch, nach dem im I. Theil Bewiesenen, alle diese Dreiseitenpaare $\frac{a_1^m\, a_2^m\, a_3^m}{b_1^m\, b_2^m\, b_3^m}$ dieselbe Eigenschaft.

Weil $\alpha_1^m$ irgend ein Punkt der Geraden $p_{\beta_2}$ und $a_2^m$ ein beliebiger Strahl des Punktes $\alpha_1^m$ sein kann, so stellt $a_2^m$ jeden Strahl der Ebene vor. In gleicher Weise lässt sich zeigen, dass auch $a_1^m$ einen beliebigen Strahl der Ebene bedeuten kann, und stets wird das polare System $\frac{a_1^m\, a_2^m\, a_3^m}{b_1^m\, b_2^m\, b_3^m}$ der $R_1$ die in unserem Satze gewünschten Eigenschaften besitzen, q. e. d.

> „Von zwei Reciprocitäten $R_1$ und $R_2$, welche dem soeben bewiesenen Satze Genüge leisten, sagt man, sie seien einander conjugirt.“

„Sind daher zwei Reciprocitäten $R_1$ und $R_2$ einander conjugirt und man construirt ein Paar polarer Dreiseite der $R_1$, deren zwei Paare entsprechender Seiten conjugirt sind in $R_2$, so hat auch das dritte Paar entsprechender Seiten diese Eigenschaft.“

## § 3.

Suchen wir zu $a_1$ die Pole $P_{a_1} = \beta_1$ und $\mathfrak{P}_{a_1}$ und construiren zu $\beta_1 = \mathfrak{P}_{a_3}$ die Polare $a_3$, zu $\mathfrak{P}_{a_1} = \beta_2 = P_{a_2}$ die Polare $a_2$ und schliesslich zu $a_3$ den Pol $P_{a_3} = \beta_3$, so ist $\frac{a_1\, a_2\, a_3}{b_1\, b_2\, b_3}$ ein polares System der $R_1$, dessen entsprechende Seiten $(a_i\, b_i)$, $i = 1, 2, 3$, Nullpaare der zu $R_1$ conjugirten Reciprocität $R_2$ sind, und zwar ist speciell $\mathfrak{P}_{a_3} = \beta_1$, $\mathfrak{P}_{a_1} = \beta_2$, aber $\mathfrak{P}_{a_2}$ im Allgemeinen nicht $= \beta$. D. h.:

„Sind $R_1$ und $R_2$ zwei conjugirte Reciprocitäten, so ist es im Allgemeinen unmöglich, ein Paar polarer Dreiseite von $R_1$ zu construiren, deren Seitenpaare $(a_i\, b_i)$, $i = 1, 2, 3$, conjugirt in $R_2$ sind, so dass gleichzeitig $\frac{\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3}{\beta_2\, \beta_3\, \beta_1}$ ein Paar polarer Dreiecke von $R_2$ vorstellen, deren entsprechende Eckenpaare dann conjugirt in $R_1$ sind.“

„Kommt es dagegen vor, dass die Reciprocität $R_1$ ein Paar polarer Dreiseite $\begin{smallmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \end{smallmatrix}$ der eben erwähnten Beschaffenheit enthält, so enthält sie eine Doppelserie derselben."

Beweis.

Durchläuft $a_1$ das Büschel $\alpha_3$, so bewegt sich $P_{a_1^i} = \beta_1^i$ in $b_3$, $\mathfrak{P}_{a_1^i}$ in $b_1$. Da $\beta_1^i = \mathfrak{P}_{a_3^i}$ und $\mathfrak{P}_{a_1} = \mathfrak{P}_2^i$ ist, so beschreiben $a_3^i$ und $a_2^i$ die Büschel erster Ordnung $\alpha_2$ und $\alpha_1$, also $P_{a_2^i} = \beta_2^i$ und $\mathfrak{P}_{a_2^i}$ zwei gerade Punktreihen, die projectivisch sind und in demselben Träger $b_2$ liegen.

Diese Punktreihen $\beta_3^i$ und $\mathfrak{P}_{a_2^i}$ sind identisch. Denn alle auf die angegebene Weise construirten polaren Dreiseitenpaare $\begin{smallmatrix} a_1^i a_2^i a_3^i \\ b_1^i b_2^i b_3^i \end{smallmatrix}$ der $R_1$ haben die Eigenschaft, dass ihre entsprechenden Seiten Nullpaare der $R_2$ sind; es muss daher $\mathfrak{P}_{a_2^i}$ stets ein Punkt der Geraden $b_2^i$ sein. Da aber alle $\mathfrak{P}_{a_2}$ in der Geraden $b_2$ liegen, so ist $\mathfrak{P}_{a_2^i} = b_2 | b_2^i = \beta_3^i$.

Bedeutet daher $a_1^i$ irgend einen Strahl des Büschels $\alpha_3$, so lässt sich stets ein Paar polarer Dreiseite $\begin{smallmatrix} a_1^i a_2^i a_3^i \\ b_1^i b_2^i b_3^i \end{smallmatrix}$ der $R_1$ construiren, welche unserem Satze genügen.

Ist $a_1^m$ ein beliebiger Strahl der Ebene und wir construiren in der obigen Weise alle Paare polarer Dreiseite $\begin{smallmatrix} a_1^m a_2^m a_3^m \\ b_1^m b_2^m b_3^m \end{smallmatrix}$ der $R_1$, deren Seiten $a_1^m$ durch den Punkt $\alpha_3^m$ gehen, so ist für $a_1^m = a_1^0 = \alpha_3^m \cdot \alpha^3$, $\begin{smallmatrix} a_1^0 a_2^0 a_3^0 \\ b_1^0 b_2^0 b_3^0 \end{smallmatrix}$ ein Paar polarer Dreiseite der $R_1$, die unserem Satze genügen.

Nach dem zuerst Bewiesenen haben daher alle polaren Dreiseitenpaare $\begin{smallmatrix} a_1^m a_2^m a_3^m \\ b_1^m b_2^m b_3^m \end{smallmatrix}$ die in unserem Satze geforderten Eigenschaften.

## § 4.

Ist $a_1 a_2 a_3 a_4$ ein Vierseit der $A$-Ebene, $b_1 b_2 b_3 b_4$ ein solches der $B$-Ebene, und ist

$$\alpha_1 = a_1 | a_2, \quad \alpha_2 = a_1 | a_3, \quad \alpha_3 = a_1 | a_4,$$
$$\alpha_4 = a_3 | a_4, \quad \alpha_5 = a_2 | a_4, \quad \alpha_6 = a_2 | a_3,$$

ebenso

$$\beta_1 = b_1 | b_2, \quad \beta_2 = \beta_1 | b_3 \quad \text{u. s. w.},$$

so nennt man $\begin{smallmatrix} a_1 a_2 a_3 a_4 \\ b_1 b_2 b_3 b_4 \end{smallmatrix}$ ein polares System von zwei Vierseiten der Reciprocität $R_1$, wenn die sechs Punktepaare $(a_i | a_k,\ b_l | b_m)$, wo $iklm$ eine Anordnung der vier Zahlen 1234 vorstellt, d. h. wenn

$$(\alpha_1 \beta_4), \ (\alpha_2 \beta_5), \ (\alpha_3 \beta_6), \ (\alpha_4 \beta_1), \ (\alpha_5 \beta_2), \ (\alpha_6 \beta_3)$$

Nullpaare dieser Reciprocität sind."

Ein solches System von zwei polaren Vierseiten $\begin{matrix} a_1 a_2 a_3 a_4 \\ b_1 b_2 b_3 b_4 \end{matrix}$ der $R_1$ ist vollkommen bestimmt, sobald zwei zugeordnete Seitenpaare $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, eine dritte Seite $a_3$ und von der zugeordneten Geraden $b_3$ ein Punkt $\pi$ gegeben ist. Man hat dann

$$\alpha_1 = a_1 | a_2, \quad \alpha_2 = a_1 | a_3, \quad \alpha_6 = a_2 | a_3, \quad \beta_1 = b_1 | b_3.$$

$\beta_3$ wird in der Geraden $b_1$, $\beta_5$ in $b_2$, $\beta_4$ in $\beta_3 \cdot \beta_5 = b_4$ und $\alpha_4$ in $a_3$ so construirt, dass

$$(\alpha_6 \beta_3), \ (\alpha_2 \beta_5), \ (\alpha_1 \beta_4) \text{ und } (\alpha_4 \beta_1)$$

conjugirte Punktpaare der Reciprocität $R_1$ bilden, d. h. es wird

$$\beta_3 = b_1 | p_{\alpha_6}, \quad \beta_5 = b_2 | p_{\alpha_2}, \quad \beta_4 = \beta_3 \cdot \beta_5 | p_{\alpha_1}, \quad \alpha_4 = a_3 | p_{\beta_1}.$$

Weiter ist

$$b_3 = \beta_4 \cdot \pi, \quad \beta_2 = b_1 | b_3, \quad \beta_6 = b_2 | b_3, \quad \alpha_3 = a_1 | p_{\beta_6}, \quad a_4 = \alpha_3 \cdot \alpha_4 \text{ und } \alpha_5 = a_4 | a_2.$$

$\alpha_5$ ist dann zu $\beta_2$ conjugirt, denn es besteht der Satz:

„Sind fünf Eckenpaare zweier Vierseite Nullpaare einer Reciprocität, so ist auch das sechste Eckenpaar conjugirt in Bezug auf diese Reciprocität."

Um diesen Satz zu beweisen, sprechen wir ihn in der Form aus:

„Hat man zwei Dreiseite $a_1 a_2 a_3$ und $b_1 b_2 b_3$ und sind die in $b_1$, $b_2$ und $b_3$ liegenden resp. zu $\alpha_6$, $\alpha_2$ und $\alpha_1$ conjugirten Punkte $\beta_3$, $\beta_5$ und $\beta_4$ Punkte einer Geraden $b_4$, so liegen auch die in $a_1$, $a_2$ und $a_3$ befindlichen resp. zu $\beta_6$, $\beta_2$ und $\beta_1$ conjugirten Punkte $\alpha_3$, $\alpha_5$ und $\alpha_4$ in einer Geraden $a_4$."

Beweis.

Die beiden Dreiseite $b_1 b_2 b_3$ und $p_{\alpha_6} p_{\alpha_2} p_{\alpha_1}$ liegen perspectivisch, weil $b_1 | p_{\alpha_6} = \beta_3$, $b_2 | p_{\alpha_2} = \beta_5$ und $b_3 | p_{\alpha_1} = \beta_4$ Punkte einer Geraden $b_4$ sind; die drei Verbindungslinien der entsprechenden Eckpunkte beider Dreiseite schneiden sich folglich in einem Punkte. Bezeichnen wir daher $p_{\alpha_6} | p_{\alpha_2} = \beta'_1$, $p_{\alpha_6} | p_{\alpha_1} = \beta'_2$ und $p_{\alpha_2} | p_{\alpha_1} = \beta'_6$, so gehen die drei Geraden $\beta_1 \beta'_1$, $\beta_2 \beta'_2$ und $\beta_6 \beta'_6$ durch einen Punkt $S$.

Der Pol der Geraden $\beta_1 \beta'_1$ ist $\alpha_4$, der von $\beta_2 \beta'_2$ ist $\alpha_5$ und der von $\beta_6 \beta'_6$ ist $\alpha_3$; die drei Punkte $\alpha_3$, $\alpha_4$ und $\alpha_5$ liegen daher in einer Geraden $a_4$, q. e. d.

Aus der angegebenen Construction der polaren Vierseite der Reciprocität $R_1$ ergiebt sich, dass $b_1$, $b_2$ und $\pi$ so gewählt werden können, dass $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$ Nullpaare der Reciprocität $R_2$ werden. Wir haben zu diesem Zwecke nur festzusetzen, dass $b_1$ den Pol $\mathfrak{P}_{a_1}$, $b_2$ den Pol $\mathfrak{P}_{a_2}$ enthält und dass der Punkt $\pi$ mit dem Pol $\mathfrak{P}_{a_3}$ identisch wird.

## § 5.

„Sind $(a_1 b_1)$ und $(a_2 b_2)$ zwei Nullpaare der Reciprocität $R_2$, so kann man mindestens zwei Paare polarer Vierseite $\begin{matrix} a_1 a_2 a_3^1 a_4^1 \\ b_1 b_2 b_3^1 b_4^1 \end{matrix}$ und $\begin{matrix} a_1 a_2 a_3^2 a_4^2 \\ b_1 b_2 b_3^2 b_4^2 \end{matrix}$ der $R_1$ construiren, deren Seitenpaare $(a_i b_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, conjugirt sind in $R_2$."

Beweis.

Wie im vorigen Paragraphen gezeigt wurde, lassen sich unendlich viele Paare polarer Vierseite der $R_1$ construiren, die $(a_1 b_1)$ und $(a_2 b_2)$ zu Seiten haben und bei denen drei Paare entsprechender Seiten $(a_i b_i)$, $i=1,2,3$, conjugirt in $R_2$ sind. Ist $\begin{matrix} a_1 a_2 a_3 a_4 \\ b_1 b_2 b_3 b_4 \end{matrix}$ ein solches Paar, und $a_3$ durchläuft das Büschel $\alpha_4$, so beschreiben $\beta_3{}^i$ und $\beta_5{}^i$ zwei projectivische Punktreihen in $b_1$ resp. $b_2$, die zu einander perspectivisch liegen, weil für $a_3{}^i = p_{\beta_1}$ $\beta_3{}^i = \beta_5{}^i = \beta_1 = b_1 | b_2$ wird.

Für $a_3{}^i = \alpha_4 \cdot \alpha_1$ ist $\alpha_6{}^i = \alpha_2{}^i = \alpha_1$, daher $\beta_3{}^i = b_1 | p_{\alpha_1}$, $\beta_5{}^i = b_2 | p_{\alpha_1}$ und $\beta_3{}^i \cdot \beta_5{}^i = p_{\alpha_1}$.

Wenn also $a_3{}^i$ das Büschel $\alpha_4$ beschreibt, bewegt sich $\beta_3{}^i \cdot \beta_5{}^i = b_4{}^i$ in einem Strahlenbüschel erster Ordnung, dessen Scheitel der Schnittpunkt der Geraden $b_4$ und $p_{\alpha_1}$, d. h. der Punkt $\beta_4$ ist.

Da $b_3{}^i = \beta_4{}^i \cdot \mathfrak{P}_{a_4{}^i}$ ist, so beschreibt unter diesen Umständen $\beta_2{}^i = b_1 | b_3{}^i$ die gerade Punktreihe $b_1$, $\alpha_5{}^i = a_2 | p_{\beta_2{}^i}$ die projectivische Punktreihe $a_2$, $a_4{}^i = \alpha_4 \cdot \alpha_5{}^i$ das Büschel erster Ordnung $\alpha_4$, welches dem Büschel $b_4{}^i$ projectivisch ist. Die Punktreihe $\mathfrak{P}_{a_4{}^i}$ ist demnach projectivisch dem Büschel $b_4{}^i$, die beiden concentrischen Strahlenbüschel $\beta_4 \cdot \mathfrak{P}_{a_4{}^i}$ und $b_4{}^i$ haben daher zwei Strahlen $b_4{}^1$ und $b_4{}^2$ entsprechend gemein; $\begin{matrix} a_1 a_2 a_3{}^1 a_4{}^1 \\ b_1 b_2 b_3{}^1 b_4{}^1 \end{matrix}$ und $\begin{matrix} a_1 a_2 a_3{}^2 a_4{}^2 \\ b_1 b_2 b_3{}^2 b_4{}^2 \end{matrix}$ stellen daher zwei Paare polarer Vierseite der $R_1$ vor, deren entsprechende Seitenpaare conjugirt in $R^2$ sind, q. e. d.

## § 6.

„Enthält die Reciprocität $R_1$, ausser den im vorigen Paragraphen erwähnten Paaren polarer Vierseite, deren vier entsprechende Seitenpaare conjugirt in $R_2$ sind, noch ein einziges Paar $\begin{matrix} a_1 a_2 a_3 a_4 \\ b_1 b_2 b_3 b_4 \end{matrix}$ derselben Beschaffenheit, und wir construiren nach den Regeln des § 5 irgend ein Paar polarer Vierseite $\begin{matrix} a_1{}^m a_2{}^m a_3{}^m a_4{}^m \\ b_1{}^m b_2{}^m b_3{}^m b_4{}^m \end{matrix}$ der $R_1$, so sind die entsprechenden Seiten $(a_i{}^m b_i{}^m)$, $i=1,2,3,4$, dieser Vierseite conjugirt in $R_2$."

Beweis.

*I. Theil.* Wir zeigen zunächst, dass bei festgehaltenen $a_1$, $a_2$, $b_1$ und $b_2$ $a_3$ irgend ein Strahl $a_3{}^i$ des Punktes $\alpha_4$ sein kann, und stets wird das polare System $\begin{matrix} a_1 a_2 a_3{}^i a_4{}^i \\ b_1 b_2 b_3{}^i b_4{}^i \end{matrix}$ der $R_1$ unserem Satze genügen.

Wie wir gesehen, bewegen sich $\beta_4 \cdot \mathfrak{P}_{a_4{}^i}$ und $b_4{}^i$ in zwei concentrischen und projectivischen Strahlenbüscheln erster Ordnung, wenn $a_3{}^i$ das Büschel $\alpha_4$ durchläuft. Die Büschel $\beta_4 \mathfrak{P}_{a_4{}^i}$ und $b_4{}^i$ haben, ausser ihren beiden Doppelstrahlen, noch den Strahl $b_4$ entsprechend gemein, denn für $a_3{}^i = a_3$ ist

nach Voraussetzung $\mathfrak{P}_{a_4}$ ein Punkt von $b_4$. Die beiden Büschel $\beta_4' \mathfrak{P}_{a_4'}$ und $b_4'$ sind daher identisch, d. h. der erste Theil unseres Satzes ist bewiesen.

*II. Theil.* Wir weisen hier nach, dass unser Satz für alle Geraden der Ebenen $A$ und $B$ besteht.

$a_3$ konnte ein beliebiger Strahl des Büschels $\alpha_4$ sein, und stets genügte $\begin{smallmatrix} a_1\, a_2\, a_3'\, a_4' \\ b_1\, b_2\, b_3'\, b_4' \end{smallmatrix}$ unserem Satze. In analoger Weise lässt sich zeigen, dass $a_2$ einen beliebigen Strahl $a_2'$ des Büschels $\alpha_6$ und $a_1'$ irgend einen Strahl des Punktes $\alpha_1$ bedeuten kann, und immer wird sich ein Paar polarer Vierseite $\begin{smallmatrix} a_1'\, a_2'\, a_3'\, a_4' \\ b_1'\, b_2'\, b_3'\, b_4' \end{smallmatrix}$ der $R_1$ construiren lassen, deren entsprechende Seiten Nullpaare der $R_2$ sind.

Ist $\alpha_1^m$ ein beliebiger Punkt der Ebene $A$, so schneiden sich in demselben zwei Strahlen $a_1^m$ und $a_2^m$ der beiden Büschel $\alpha_1$ und $\alpha_6$. Bezeichnet $\alpha_2^m$ einen beliebigen Punkt der Geraden $a_1^m$, so geht durch ihn der Strahl $a_3^m$ des Büschels $\alpha_4$. Es lässt sich dann ein polares System $\begin{smallmatrix} a_1^m\, a_2^m\, a_3^m\, a_4^m \\ b_1^m\, b_2^m\, b_3^m\, b_4^m \end{smallmatrix}$ der $R_1$ construiren, dessen entsprechende Seitenpaare $(a_i^m\, b_i^m)$, $i = 1, 2, 3, 4$, conjugirt in Bezug auf die Reciprocität $R_2$ sind.

Ist daher $a_1^m$ irgend ein Strahl des Punktes $\alpha_1^m$, $a_2^m$ ein beliebiger Strahl von $\alpha_6^m$, $\alpha_3^m$ ein beliebiger Strahl von $\alpha_4^m$ und bedeuten $b_1^m$ resp. $b_2^m$ zwei beliebige Geraden der Punkte $\mathfrak{P}_{a_1^m}$ resp. $\mathfrak{P}_{a_2^m}$, so lässt sich ein Paar polarer Vierseite $\begin{smallmatrix} a_1^m\, a_2^m\, a_3^m\, a_4^m \\ b_1^m\, b_2^m\, b_3^m\, b_4^m \end{smallmatrix}$ der $R_1$ finden, welche unserem Satze genügen, q. e. d.

Auf Grund unseres Satzes stellen wir die Definition auf:

> „Die Reciprocität $R_1$ stützt oder trägt die Reciprocität $R_2$, und umgekehrt $R_2$ stützt sich oder ruht auf $R_1$, wenn $R_1$, ausser den im § 5 erwähnten Paaren polarer Vierseite, deren entsprechende Seiten conjugirt in $R_2$ sind, noch ein einziges Paar polarer Vierseite derselben Beschaffenheit enthält."
>
> „Stützen sich die beiden Reciprocitäten $R_1$ und $R_2$, und wir construiren nach den Vorschriften des § 5 irgend ein System polarer Vierseite $\begin{smallmatrix} a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \\ b_1\, b_2\, b_3\, b_4 \end{smallmatrix}$ der $R_1$, so sind dessen vier entsprechende Seitenpaare $(a_i b_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, congruent in $R_2$."

## § 7.

„Stützen sich die Reciprocitäten $R_1$ und $R_2$, so sind sie auch einander conjugirt."

Beweis.

Von dem System polarer Vierseite $\begin{smallmatrix} a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \\ b_1\, b_2\, b_3\, b_4 \end{smallmatrix}$ der $R_1$, dessen entsprechende Seitenpaare $(a_i b_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, conjugirt in $R_2$ sind, wählen wir $a_1$ und $a_2$ beliebig und definiren:

$$b_1 = \mathfrak{P}_{a_1}{}^{\cdot} P_{a_2}, \quad b_2 = \mathfrak{P}_{a_2}{}^{\cdot} P_{a_1}.$$

$a_3$ bestimmen wir so, dass $P_{a_3} = b_1 | b_2 = \beta_1$ wird. In diesem Falle ist

$$\beta_5 = b_2 | p_{a_2} = b_2 | P_{a_1}{}^{\cdot} P_{a_3} = P_{a_1}, \quad \beta_3 = b_1 | p_{a_1} = b_1 | P_{a_2}{}^{\cdot} P_{a_3} = P_{a_2},$$

$$b_4 = b_3{}^{\cdot} \beta_5 = P_{a_1}{}^{\cdot} P_{a_2}, \quad \beta_4 = b_4 | P_{a_1}{}^{\cdot} P_{a_2} \text{ (d. h. unbestimmt in } b_4).$$

Wir wählen $\beta_4$ in $b_4$ so, dass $b_3 = P_{a_3}{}^{\cdot} \mathfrak{P}_{a_3}$ wird. Es ist dann

$$\beta_2 = \beta_6 = \beta_1,$$

also

$$\alpha_4 = a_3 | p_{\beta_1} = a_3 | a_3, \quad \alpha_5 = a_2 | p_{\beta_2} = a_2 | a_3 = \alpha_6, \quad \alpha_3 = a_1 | p_{\beta_6} = a_1 | a_3 = \alpha_2;$$

$a_4$ ist daher identisch mit $a_3$.

Weil wir bei unserer Construction die Regeln des § 5 befolgt haben, müssen $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$ Nullpaare der $R_2$ sein. Da $a_4 = a_3$ ist, so muss $\mathfrak{P}_{a_3}$ ein Punkt der Geraden $b_4$ sein, d. h. $\mathfrak{P}_{a_3} = b_3 | b_4 = \beta_4$. Die beiden Dreiseite $\begin{smallmatrix} a_1 a_2 a_4 \\ b_1 b_2 b_4 \end{smallmatrix}$, von denen zwei Seiten $a_1$ und $a_2$ beliebig sind, bilden daher ein polares System der Reciprocität $R_1$, dessen entsprechende Seitenpaare $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$ und $(a_4 b_4)$ conjugirt in $R_2$ sind, q. e. d.

„Zwei conjugirte Reciprocitäten $R_1$ und $R_2$ stützen sich.“

Beweis.

Um die Richtigkeit dieses Satzes nachzuweisen, zeigen wir zunächst:

„Ein Paar polarer Dreiseite $\begin{smallmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \end{smallmatrix}$ der Reciprocität $R_1$ wird durch jedes beliebige Geradenpaar $(a_4 b_4)$ zu einem System polarer Vierseite $\begin{smallmatrix} a_1 a_2 a_3 a_4 \\ b_1 b_2 b_3 b_4 \end{smallmatrix}$ dieser Reciprocität ergänzt.“

Denn ist $\begin{smallmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \end{smallmatrix}$ ein System polarer Dreiseite der $R_1$, so muss

$$\beta_1 = P_{a_3}, \quad \beta_2 = P_{a_3}, \quad \beta_6 = P_{a_1}$$

sein. Es sind daher

$$(\alpha_1 \beta_4), \; (\alpha_2 \beta_5), \; (\alpha_3 \beta_6), \; (\alpha_4 \beta_1), \; (\alpha_5 \beta_2) \text{ und } (\alpha_6 \beta_3)$$

conjugirte Punktpaare der $R_1$, $\begin{smallmatrix} a_1 a_2 a_3 a_4 \\ b_1 b_2 b_3 b_4 \end{smallmatrix}$ folglich ein System polarer Vierseite der $R_1$.

Ist die Reciprocität $R_1$ conjugirt der Reciprocität $R_2$, so sind die entsprechenden Seitenpaare $(a_i b_i)$, $i = 1, 2, 3$, des polaren Systems $\begin{smallmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \end{smallmatrix}$ von $R_1$ conjugirt in $R_2$. $\begin{smallmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \end{smallmatrix}$ wird durch jedes beliebige Seitenpaar $(a_4 b_4)$ zu einem System polarer Vierseite $\begin{smallmatrix} a_1 a_2 a_3 a_4 \\ b_1 b_2 b_3 b_4 \end{smallmatrix}$ der $R_1$ ergänzt. Bestimmen wir daher $(a_4 b_4)$ so, dass es ein Nullpaar der $R_2$ vorstellt, so bilden $\begin{smallmatrix} a_1 a_2 a_3 a_4 \\ b_1 b_2 b_3 b_4 \end{smallmatrix}$ ein Paar polarer Vierseite von $R_1$, deren entsprechende Seiten-

paare $(a_i b_i)$, $i=1, 2, 3, 4$, conjugirt in $R_2$ sind; nach § 6 stützt deshalb $R_1$ die Reciprocität $R_2$, q. e. d.

## § 8.

„Stützen sich die beiden Reciprocitäten $R_1$ und $R_2$, und sind $a_1$, $a_2$, $a_3$ drei beliebige Geraden, so kann man mindestens zwei Paare polarer Vierseite der $R_1$ finden, welche $a_1$, $a_2$ und $a_3$ zu Seiten haben und deren sechs entsprechende Seitenpaare $(a_i b_i)$, $i=1, 2, 3, 4, 5, 6$ (wo $a_5=\alpha_1{}^\cdot\alpha_4$, $b_5=\beta_1{}^\cdot\beta_4$, $a_6=\alpha_3{}^\cdot\alpha_6$, $b_6=\beta_3{}^\cdot\beta_6$ ist), conjugirt in $R_2$ sind."

Beweis.

Die sechs entsprechenden Seitenpaare $(a_i b_i)$, $i=1, 2, 3, 4, 5, 6$, zweier Vierseite sind Nullpaare einer Reciprocität, sobald fünf Paare derselben diese Eigenschaft haben (§ 4). Bei der Construction unserer polaren Systeme befolgen wir die Regeln des § 5, deshalb sind vier Seitenpaare unserer Vierseite *eo ipso* Nullpaare der $R_2$. Um unsern Satz zu beweisen, müssen wir zeigen, dass man diese Construction so specialisiren kann, dass auch $(a_5 b_5)$ ein Nullpaar der $R_2$ wird.

Stellen $a_1$, $a_2$, $a_3$ drei beliebige Geraden vor, so sind dadurch $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_6$, $\mathfrak{P}_{a_1}$, $\mathfrak{P}_{a_2}$, $\mathfrak{P}_{a_6}$ bestimmt. Sind $b_1$ und $b_2$ irgend zwei Strahlen der Punkte $\mathfrak{P}_{a_1}$ resp. $\mathfrak{P}_{a_2}$, so ist $\beta_3=b_1|p_{a_6}$, $\beta_5=b_2|p_{a_2}$, $b_4=\beta_3{}^\cdot\beta_5$, $\beta_4=b_4|p_{a_1}$ und $\alpha_4=a_3|p_{\beta_1}$.

Durchläuft $\beta_1$ die Gerade $p_{\alpha_4}$, so bleibt der Punkt $\alpha_4$ fest, folglich auch die Gerade $\alpha_1\alpha_4=a_5$ und der Pol dieser Geraden $\mathfrak{P}_{a_5}$; dagegen beschreiben $b_1$ und $b_2$ zwei perspectivische Strahlenbüschel erster Ordnung $\mathfrak{P}_{a_1}$ resp. $\mathfrak{P}_{a_2}$, $\beta_3$ und $\beta_5$ zwei projectivische gerade Punktreihen $\beta_3{}^i$ und $\beta_5{}^i$ in $p_{a_6}$ resp. $p_{a_2}$, $b_4{}^i=\beta_3{}^i{}^\cdot\beta_5{}^i$ daher ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung, $\beta_4{}^i=p_{a_1}|b_4{}^i$ eine gerade Punktreihe in $p_{a_1}$ und $\mathfrak{P}_{a_5}{}^\cdot\beta_1{}^i$ schliesslich einen Strahlenbüschel erster Ordnung $\mathfrak{P}_{a_5}$, der zu der geraden Punktreihe $\beta_4{}^i$ projectivisch ist; es kommt daher zweimal vor, dass $\mathfrak{P}_{a_5}{}^\cdot\beta_1{}^i$ durch den entsprechenden Punkt $\beta_4{}^i$ geht, nämlich für $\beta_1{}^i=\beta_1{}^1$ und $\beta_1{}^2$.

Bezeichnen wir die beiden polaren Systeme der $R_1$, welche diese Punkte $\beta_1{}^1$ resp. $\beta_1{}^2$ zu Ecken haben, mit $\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4{}^1 \\ b_1{}^1 & b_2{}^1 & b_3{}^1 & b_4{}^1 \end{matrix}$ resp. $\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4{}^2 \\ b_1{}^2 & b_2{}^2 & b_3{}^2 & b_4{}^2 \end{matrix}$, so sind fünf Paare entsprechender Seiten derselben $(a_1 b_1{}^1)$, $(a_2 b_2{}^1)$, $(a_3 b_3{}^1)$, $(a_4{}^1 b_4{}^1)$, $(a_5 b_5{}^1)$ resp. $(a_1 b_1{}^2)$, $(a_2 b_2{}^2)$, $(a_3 b_3{}^2)$, $(a_4{}^2 b_4{}^2)$, $(a_5 b_5{}^2)$ Nullpaare der $R_2$, q. e. d.

## § 9.

„Zwei Viereckenpaare $\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{matrix}$ heissen polar in Bezug auf eine Reciprocität, wenn ihre sechs Seitenpaare $(\alpha_i{}^\cdot\alpha_k, \beta_l{}^\cdot\beta_m)$, wo $i, k, l, m$ eine Anordnung der Zahlen 1, 2, 3, 4 vorstellen, Nullpaare dieser Reciprocität sind."

„Sind $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$ zwei Nullpaare der $R_2$, so kann man ein System polarer Vierseite $\begin{smallmatrix} a_1 a_2 a_3 a_4 \\ b_1 b_2 b_3 b_4 \end{smallmatrix}$ der $R_1$ construiren, deren vier Seitenpaare $(a_i b_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, conjugirt in $R_2$ sind, so dass gleichzeitig $\begin{smallmatrix} \alpha_1 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_6 \\ \beta_4 \beta_6 \beta_1 \beta_3 \end{smallmatrix}$ ein Paar polarer Vierecke der $R_2$ bedeuten, deren vier entsprechende Eckenpaare $(\alpha_1 \beta_4)$, $(\alpha_3 \beta_6)$, $(\alpha_4 \beta_1)$, $(\alpha_6 \beta_3)$ conjugirt in $R_1$ sind."

Beweis.

$\begin{smallmatrix} \alpha_1 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_6 \\ \beta_4 \beta_6 \beta_1 \beta_3 \end{smallmatrix}$ ist ein System polarer Vierecke der $R_2$, sobald $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$, $(a_4 b_4)$ und $(a_5 b_6)$ Nullpaare dieser Reciprocität sind.

Das polare System $\begin{smallmatrix} a_1 a_2 a_3 a_4 \\ b_1 b_2 b_3 b_4 \end{smallmatrix}$ von zwei Vierseiten der $R_1$, dessen vier Seitenpaare $(a_i b_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, Nullpaare der $R_2$ vorstellen, genügt daher unserem Satze, wenn noch $(a_5 b_6)$ conjugirt in $R_2$ sind; dieses tritt ein für $b_6 = \mathfrak{P}_{a_1} \cdot \mathfrak{P}_{a_2}$.

Sind die beiden Nullpaare $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$ der $R_2$ gegeben, so sind dadurch die Punkte $\alpha_1$, $\beta_1$, $\mathfrak{P}_{a_1}$, $\mathfrak{P}_{a_2}$ festgelegt; $\beta_3$ wird zu $\mathfrak{P}_{a_1}$, wenn wir $\alpha_6$ in $a_2$ so wählen, dass $\alpha_6$ der Schnittpunkt der $a_2$ mit der Polaren des Punktes $\mathfrak{P}_{a_1}$ in $R_1$ wird. Ist $a_3$ eine Gerade dieses Punktes $\alpha_6$, so construiren wir nach den Regeln des § 5 die Paare polarer Vierseite $\begin{smallmatrix} a_1 a_2 a_3 a_4 \\ b_1 b_2 b_3 b_4 \end{smallmatrix}$ der $R_1$, deren vier Seitenpaare $(a_i b_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, conjugirt in $R_2$ sind. Beschreibt dann $a_3{}^i$ das Büschel $\alpha_6$, so bewegt sich $b_4$ in dem Büschel $\beta_3 \beta_5{}^i$, $b_3$ in dem Büschel $\beta_4{}^i \mathfrak{P}_{a_2 i}$ und $\beta_6{}^i$ in der geraden Punktreihe $b_2$; es kommt daher einmal vor, dass $\beta_6{}^i = \mathfrak{P}_{a_2} = \beta_6{}^0$ wird. In diesem Falle ist $b_6 = \mathfrak{P}_{a_1} \cdot \mathfrak{P}_{a_2}$ und $\begin{smallmatrix} a_1 a_2 a_3^0 a_4^0 \\ b_1 b_2 b_3^0 b_4^0 \end{smallmatrix}$ ist ein Paar polarer Vierseite der $R_1$, welches die in unserem Satze geforderten Eigenschaften hat.

Durch Specialisirung der gegebenen Entwickelungen folgen Sätze, die interessante Streiflichter auf die Theorie der conjugirten Kegelschnitte werfen.

Romrod, den 12. April 1885. Dr. GOLDSCHMIDT.

---

## X. Eine Verallgemeinerung des binomischen Satzes.

Nach Analogie des bekannten Verfahrens zur Summirung der Binomialreihe kann man folgende Aufgabe stellen: Die ganzen algebraischen Functionen $f_1(\mu)$, $f_2(\mu)$, $f_3(\mu)$ etc. sollen so bestimmt werden, dass der Summe

1) $$F(\mu) = 1 + f_1(\mu)\, x + f_2(\mu)\, x^2 + f_3(\mu)\, x^3 + \dots$$

die Eigenschaft

2) $$F(\mu)\, F(\nu) = F(\mu + \nu)$$

zukommt, aus welcher dann folgt

3) $$F(\mu) = [F(1)]^{\mu}.$$

Die Gleichung 2) giebt zunächst wegen Nr. 1) und durch Coefficientenvergleichung

$$4)\quad \begin{cases} f_1(\mu+\nu)=f_1(\mu)+f_1(\nu), \\ f_2(\mu+\nu)=f_2(\mu)+f_1(\mu)f_1(\nu)+f_2(\nu), \\ f_3(\mu+\nu)=f_3(\mu)+f_2(\mu)f_1(\nu)+f_1(\mu)f_2(\nu)+f_3(\nu), \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Für $\mu=\nu=0$ findet sich $f_1(0)=f_2(0)=f_3(0)\ldots=0$; ertheilt man ferner den Gleichungen 4) die Formen

$$\frac{f_1(\mu+\nu)-f_1(\mu)}{\nu}=\frac{f_1(\nu)}{\nu},$$

$$\frac{f_2(\mu+\nu)-f_2(\mu)}{\nu}=\frac{f_1(\nu)}{\nu}f_1(\mu)+\frac{f_2(\nu)}{\nu},$$

$$\frac{f_3(\mu+\nu)-f_3(\mu)}{\nu}=\frac{f_1(\nu)}{\nu}f_2(\mu)+\frac{f_2(\nu)}{\nu}f_1(\mu)+\frac{f_3(\nu)}{\nu}$$

$$\dots\dots\dots\dots,$$

lässt $\nu$ in Null übergehen und setzt zur Abkürzung

$$Lim\frac{f_k(\nu)}{\nu}=f'_k(0)=c_k,$$

so gelangt man zu den Differentialgleichungen

$$f'_1(\mu)=c_1,$$
$$f'_2(\mu)=c_1f_1(\mu)+c_2,$$
$$f'_3(\mu)=c_1f_2(\mu)+c_2f_1(\mu)+c_3,$$
$$\dots\dots\dots$$

Unter Rücksicht auf $f_k(0)=0$ erhält man hieraus

$$f_1(\mu)=c_1\mu,$$
$$f_2(\mu)=\tfrac{1}{2}c_1^2\mu^2+c_2\mu,$$
$$f_3(\mu)=\tfrac{1}{6}c_1^3\mu^3+c_1c_2\mu^2+c_3\mu,$$
$$f_4(\mu)=\tfrac{1}{24}c_1^4\mu^4+\tfrac{1}{2}c_1^2c_2\mu^3+(c_1c_3+\tfrac{1}{2}c_2^2)\mu^2+c_4\mu,$$
$$f_5(\mu)=\tfrac{1}{120}c_1^5\mu^5+\tfrac{1}{6}c_1^3c_2\mu^4+\tfrac{1}{2}(c_1^2c_3+c_1c_2^2)\mu^3+(c_1c_4+c_2c_3)\mu^2+c_5\mu,$$
$$\dots\dots\dots\dots,$$

worin $c_1$, $c_2$, $c_3$ etc. willkürliche Constanten bedeuten. Das allgemeine Bildungsgesetz dieser Gleichungen würde noch zu erörtern sein.

Für $c_1=1$, $c_2=-\frac{1}{2}$, $c_3=+\frac{1}{3}$, $c_4=-\frac{1}{4}$ u. s. w. kommt man auf den binomischen Satz zurück; für $c_1=1$, $c_2=\frac{3}{2}$, $c_3=\frac{10}{3}$, $c_4=\frac{35}{4}$, $c_5=\frac{126}{5}$ u. s. w. entsteht die gleichfalls bekannte Entwickelung

$$1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu+3)}{1.2}x^2+\frac{\mu(\mu+4)(\mu+5)}{1.2.3}x^3+\frac{\mu(\mu+5)(\mu+6)(\mu+7)}{1.2.3.4}x^4$$
$$+\frac{\mu(\mu+6)\ldots(\mu+9)}{1.2\ldots5}x^5+\ldots$$
$$=(1+x+2x^2+5x^3+14x^4+42x^5+\ldots)^\mu=\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\right)^\mu.$$

Eine weitere Untersuchung dieser Frage behalte ich mir vor.

Schlömilch.

## IX.

# Ueber die Bewegung ähnlich-veränderlicher ebener Systeme.

Von

Paul Somoff,

Docent am K. Forstinstitut in St. Petersburg.

---

Durch die Untersuchungen von Grouard*, Burmester** und Geisenheimer*** sind die meisten Eigenschaften der Bewegung ähnlich-veränderlicher Systeme bekannt geworden. Diese Untersuchungen, wie auch die allgemeinen Untersuchungen von Burmester über die Bewegung collinear-veränderlicher Systeme, wurden auf geometrischem Wege durchgeführt, wobei die bekannten Eigenschaften collinearer Figuren als Grundlage dienten. Obgleich die geometrische Methode sehr oft schneller zum Ziele führt, als die Untersuchung auf analytischem Wege, beabsichtige ich in diesem Artikel gerade den zweiten Weg zu wählen, weil dadurch ein etwas anderer Gesichtspunkt gewonnen und vielleicht auch eine grössere Einheit der Untersuchung erzielt wird.

Es sei mir daher erlaubt, bevor ich zum eigentlichen Gegenstande dieser Mittheilung, der Zusammensetzung der Bewegungen und der relativen Bewegung ähnlich-veränderlicher ebener Systeme übergehe, einige Grundformeln, sowie auch einige analytische Beweise schon bekannter Sätze anzuführen und dabei auf gewisse Einzelheiten einzugehen.

---

1. Die Bewegung eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems kann durch folgende Grössen vollständig bestimmt werden:

a) durch die Coordinaten $(x_1, y_1)$ eines Systempunktes $M_1$,

b) durch die momentane Winkelgeschwindigkeit $r$ und

c) durch den Ausdehnungscoefficienten $\varepsilon$,

alle vier Grössen als Functionen der Zeit $t$ betrachtet.

---

* L'Institut 1865, S. 159 und 179.

** Diese Zeitschrift Bd. XIX S. 154.

*** Daselbst Bd. XXIV S. 345.

Indem wir entsprechend durch $(x^0, y^0)$ und $(x_1^0, y_1^0)$ die Anfangscoordinaten eines Systempunktes $(x, y)$ und des Grundpunktes $M_1$ bezeichnen, erhalten wir folgende Grundgleichungen:

$$1)\quad \left\{\begin{aligned} x &= x_1 + e^{\int_0^t \varepsilon\, dt}\left[(x^0 - x_1^0)\cos\left(\int_0^t r\, dt\right) - (y^0 - y_1^0)\sin\left(\int_0^t r\, dt\right)\right], \\ y &= y_1 + e^{\int_0^t \varepsilon\, dt}\left[(x^0 - x_1^0)\sin\left(\int_0^t r\, dt\right) - (y^0 - y_1^0)\cos\left(\int_0^t r\, dt\right)\right]. \end{aligned}\right.$$

Diese Ausdrücke können auch als Lösungen folgender simultaner Differentialgleichungen betrachtet werden:

$$2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dx_1}{dt} + \varepsilon(x - x_1) - r(y - y_1), \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dy_1}{dt} + \varepsilon(y - y_1) + r(x - x_1), \end{aligned}\right.$$

welche auch als Grundgleichungen für die Bewegung des betrachteten Systems angenommen werden können.

Die Bewegung eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems kann bekanntlich auch durch die Bewegung zweier beliebigen Systempunkte $M_1$ und $M_2$ bestimmt werden. Wenn wir durch $(x_1, y_1)$ und $(x_2, y_2)$ die Coordinaten dieser Punkte und durch $(a_1, b_1)$ und $(a_2, b_2)$ die Geschwindigkeitscomponenten derselben bezeichnen, können wir folgendermassen die Functionen $\varepsilon$ und $r$ darstellen:

$$3)\quad \left\{\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{(x_2 - x_1)(a_2 - a_1) + (y_2 - y_1)(b_2 - b_1)}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \\ r &= \frac{(x_2 - x_1)(b_2 - b_1) - (y_2 - y_1)(a_2 - a_1)}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \end{aligned}\right.$$

Zur Bestimmung der Coordinaten eines Systempunktes $M$ erhalten wir aber, indem wir die permanente Aehnlichkeit des Dreiecks $M_1 M_2 M$ ausdrücken und mit $k_1$ und $k_2$ die Tangenten der Winkel $(M_2 M_1 M)$ und $(M_1 M_2 M)$ bezeichnen:

$$4)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{k_1 k_2 (y_2 - y_1) + k_1 x_1 + k_2 x_2}{k_1 + k_2}, \\ y &= \frac{-k_1 k_2 (x_2 - x_1) + k_1 y_1 + k_2 y_2}{k_1 + k_2}. \end{aligned}\right.$$

Diese Formeln beweisen unmittelbar den folgenden Satz von Burmester:

Beschreiben zwei Punkte eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems affine Punktreihen auf zwei affinen Curven, so gilt dasselbe von allen Systempunkten.

Man ersieht sofort die Richtigkeit dieses Satzes, indem man beachtet, dass, wenn zwei Punkte $M_1$ und $M_2$ affine Punktreihen auf zwei affinen Curven beschreiben, zwischen den Coordinaten dieser Punkte die Beziehungen

$$5)\qquad x_2 = A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1, \quad y_2 = A_2 x_1 + B_2 y_1 + C_2$$

bestehen müssen.

Der analoge Satz von Burmester, die einförmige Bewegung des Systems betreffend, kann hieraus als specieller Fall abgeleitet werden.

**2.** Betrachten wir in der Ebene einen Punkt, dessen Coordinaten durch die Grössen $\varepsilon$ und $r$ bestimmt sind. Der geometrische Ort solcher Punkte, welche verschiedenen Werthen der Functionen $\varepsilon$ und $r$ entsprechen, stellt eine Curve dar, welche bei der Untersuchung der Bewegung eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems von Bedeutung ist Diese Curve soll im Folgenden die Charakteristik genannt und mit $\psi$ bezeichnet werden.

Wir bemerken vorläufig Folgendes über diese Curve.

a) Der aus dem Coordinatenanfangspunkte gezogene Radius vector spielt überall in der Kinematik ähnlich-veränderlicher ebener Systeme dieselbe Rolle, wie die momentane Winkelgeschwindigkeit in der Bewegung eines ebenen unveränderlichen Systems. In der Folge wird dies näher gezeigt werden.

b) Der Winkel, den dieser Radius vector mit der Abscissenaxe bildet, stellt den von Burmester als Geschwindigkeitswinkel bezeichneten Winkel dar.

c) Die Schnittpunkte der Charakteristik mit der Abscissenaxe entsprechen denjenigen Systemphasen, bei welchen die Drehung des Systems ihre Richtung wechselt.

d) Die Schnittpunkte dieser Curve mit der Ordinatenaxe entsprechen denjenigen Systemphasen, bei welchen die Ausdehnung des Systems ihr Maximum oder Minimum erlangt hat.

Um einige Beispiele anzuführen, bemerken wir folgendes.

Bei der gleichförmigen geradlinigen Bewegung des Systems ist die Charakteristik ein die Abscissenaxe im Anfangspunkte der Coordinaten berührender Kreis.

Bei der gleichförmigen kreislinigen Bewegung des Systems ist die Charakteristik auch ein Kreis, dessen Centrum auf der Coordinatenaxe liegt und welcher entweder die Abscissenaxe schneidet oder nicht, je nachdem das System eine beständige Drehung um den Geschwindigkeitspol besitzt oder ihre Bewegung eine oscillirende ist.

**3.** Die Formeln 2) erlauben sehr einfach die Vertheilung der Geschwindigkeiten im System zu bestimmen. Wir wollen nur Einiges kurz darüber sagen. Setzen wir

$$tg\tau = \frac{[b_1 + \varepsilon(y-y_1) + r(x-x_1)]\cos\lambda - [a_1 + \varepsilon(x-x_1) - r(y-y_1)]\sin\lambda}{[a_1 + \varepsilon(x-x_1) - r(y-y_1)]\cos\lambda + [b_1 + \varepsilon(y-y_1) + r(x-x_1)]\sin\lambda}$$

und bezeichnen wir mit $u$ den Geschwindigkeitswinkel und mit $s$ den Radius vector der Charakteristik, so ersehen wir leicht, dass die Punkte eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems, deren Geschwindigkeiten in dem gegebenen Augenblicke den Winkel $\tau$ mit einer gegebenen Geraden, deren Richtung durch den Winkel $\lambda$ mit der Abscissenaxe bestimmt ist, bilden, auf der Geraden

$$6)\quad s.\sin(\lambda+\tau-u).(x-x_1)-s.\cos(\lambda+\tau-u).(y-y_1)+v_1.\sin(\lambda+\tau-\delta)=0$$

liegen, welche mit der Richtung ($\lambda$) einen Winkel bildet, der durch den Winkel zwischen der Geschwindigkeitsrichtung der betrachteten Punkte und dem Radius vector der Charakteristik gemessen wird.

$\delta$ bedeutet hier den Winkel, welchen die Geschwindigkeit $v_1$ des Punktes $M_1$ mit der Abscissenaxe bildet.

Alle Geraden 6) schneiden sich in einem Punkte, dem Geschwindigkeitspole. Die Coordinaten ($\xi$, $\eta$) dieses Punktes können auch unmittelbar aus den Bedingungen

$$7)\quad \begin{cases} a_1+\varepsilon(\xi-x_1)-r(\eta-y_1)=0, \\ b_1+\varepsilon(\eta-y_1)+r(\xi-x_1)=0 \end{cases}$$

gefunden werden und ergeben folgende Werthe:

$$8)\quad \xi=x_1-\frac{a_1\varepsilon+b_1 r}{\varepsilon^2+r^2},\quad \eta=y_1-\frac{b_1\varepsilon-a_1 r}{\varepsilon^2+r^2}.$$

Indem wir die Gleichungen 7) von den Gleichungen 2) abziehen, erhalten wir für die Geschwindigkeit eines Systempunktes

$$9)\quad v_x=\varepsilon(x-\xi)-r(y-\eta),\quad v_y=\varepsilon(y-\eta)+r(x-\xi),$$

woraus

$$v=s\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2},$$

d. h.: die Geschwindigkeit eines Systempunktes ist gleich dem Producte aus der Entfernung dieses Punktes von dem Geschwindigkeitspol in den Radius vector der Charakteristik.

Wenn die Bewegung des Systems durch die Bewegung zweier Grundpunkte $M_1$ und $M_2$ bestimmt ist, so können wir die Coordinaten $\xi$, $\eta$ dadurch bestimmen, dass wir die Ausdrücke 3) für $\varepsilon$ und $r$ in die Gleichungen 8) einsetzen. Es seien

$$\frac{v_2}{v_1}=q$$

das Verhältniss der Geschwindigkeiten der Punkte $M_1$ und $M_2$, und $\mu$ der Winkel zwischen diesen Geschwindigkeiten. Es ergiebt sich dann

$$10)\quad \begin{cases} \xi=\dfrac{(q^2-q\cos\mu)x_1+(1-q\cos\mu)x_2+q\sin\mu(y_1-y_2)}{1-2q\cos\mu+q^2}, \\ \eta=\dfrac{(q^2-q\cos\mu)y_1+(1-q\cos\mu)y_2-q\sin\mu(x_1-x_2)}{1-2q\cos\mu+q^2}. \end{cases}$$

Verschiedene andere Sätze, welche sich auf die Vertheilung der Geschwindigkeiten im System beziehen, können mittels derselben Formeln sehr leicht abgeleitet werden. Wir wollen aber darauf weiter nicht eingehen.

**4. Polbahn und Polcurve.** Um die Gleichung der Polbahn zu erhalten, müssen wir offenbar die Zeit $t$ aus den Gleichungen 8) oder 10) eliminiren.

Um die Gleichung der Polcurve zu finden, wollen wir zuerst die Coordinaten des Geschwindigkeitspols auf ein bewegliches Coordinatensystem, welches mit dem ähnlich-veränderlichen System verbunden ist, beziehen.

Rechtwinklige, aus den Punkten des ähnlich-veränderlichen Systems gebildete Axen werden immer rechtwinklig bleiben. Wenn wir den Anfangspunkt dieses Coordinatensystems im Punkte $M_1$ wählen, mit $\Xi$, $\mathsf{H}$ die neuen Coordinaten des Geschwindigkeitspoles und mit $A_1$, $B_1$ die Componenten der Geschwindigkeit des Punktes $M_1$ in Bezug auf diese Axen bezeichnen, so finden wir

$$11)\qquad \Xi = -\frac{A_1 \varepsilon + B_1 r}{\varepsilon^2 + r^2}, \quad \mathsf{H} = -\frac{B_1 \varepsilon - A_1 r}{\varepsilon^2 + r^2}.$$

Wir werden nicht die Gleichung der Polcurve erhalten, wenn wir direct die Zeit $t$ aus diesen Gleichungen eliminiren; denn jeder Punkt der Polcurve wechselt mit der Zeit seine Lage in Bezug auf das bewegliche Coordinatensystem infolge der Ausdehnung des ähnlich-veränderlichen Systems, während wir, um die Gleichung der Polcurve zu bekommen, die Lage aller ihrer Punkte auf ein und dieselbe Ausdehnungsphase des Systems beziehen müssen. Um zu zeigen, wie das zu thun ist, bilden wir zuerst die Ausdrücke für $\Xi$ und $\mathsf{H}$ für den Fall, dass die Bewegung des Systems durch die Bewegung der Grundpunkte $M_1$ und $M_2$ bestimmt ist. Ziehen wir die bewegliche Abscissenaxe durch den Punkt $M_2$, so dass jetzt

$$X_1 = 0, \quad Y_1 = 0, \quad X_2 = M_1 M_2, \quad Y_2 = 0$$

ist und folglich

$$A_2 = A_1 + \varepsilon X_2, \quad B_2 = B_1 + r X_2$$

wird. Es ergiebt sich dann

$$12)\qquad \Xi = X_2 \frac{1 - q \cos\mu}{1 - 2q\cos\mu + q^2}, \quad \mathsf{H} = X_2 \frac{q \sin\mu}{1 - 2q\cos\mu + q^2}.$$

Es sei $C$ ein Punkt der Polcurve in ihrer Lage zur Zeit $t$. Das Dreieck $M_1 C M_2$ bleibt während der Bewegung sich selbst ähnlich. Wollen wir die Lage des Punktes $C$ in einem andern Momente $t_0$ erhalten, so müssen wir die Coordinaten dieses Punktes in demselben Verhältnisse verkleinern, in welchem diese Coordinaten im Zeitraume $t - t_0$ infolge der Ausdehnung des Systems sich vergrössert haben. Hieraus folgt, dass man, um die Gleichung der Polcurve, auf das Moment $t_0$ bezogen, zu bestimmen, der Coordinate $X_2$ den Werth $X_0^2$, welcher diesem Moment entspricht, geben und dann aus den Gleichungen 12), welche jetzt

$$13)\qquad \Xi_0 = X_2^0 \frac{1-q\cos\mu}{1-2q\cos\mu+q^2},\quad H_0 = X_2^0 \frac{q\sin\mu}{1-2q\cos\mu+q^2}$$

sein werden, die Variable $t$ eliminiren muss.

Dieselbe Ueberlegung zeigt, dass, wenn die Coordinaten $\Xi$, $H$ durch die Gleichungen 11) gegeben sind, wir anstatt dieser Gleichungen folgende nehmen müssen:

$$\Xi_0 e^{\int_{t_0}^{t} \varepsilon\, dt} = -\frac{A_1\varepsilon + B_1 r}{\varepsilon^2 + r^2},\quad H_0 e^{\int_{t_0}^{t} \varepsilon\, dt} = -\frac{B_1\varepsilon - A_1 r}{\varepsilon^2 + r^2},$$

um dann die Zeit $t$ aus ihnen zu eliminiren.

5. Untersuchen wir einige specielle Fälle.

a) Aus den Gleichungen 13) folgt

$$\Xi_0^2 + H_0^2 = \frac{X_2^{02}}{1-2q\cos\mu+q^2},$$

und wir sehen, dass die Polcurve ein Kreis wird, welcher den Punkt $M_1$ zum Centrum hat, wenn das Verhältniss der geometrischen Differenz der Geschwindigkeiten zweier Systempunkte zur Geschwindigkeit eines dieser Punkte constant ist. Das wird z. B. in einer solchen Bewegung des ähnlich-veränderlichen Systems vorkommen, in welcher der Punkt $M_1$ sich geradlinig bewegt, während der Punkt $M_2$ eine Cycloide (welche auch eine verkürzte oder verlängerte sein kann) beschreibt. Diese Cycloide muss durch das Rollen eines Kreises auf der Bahn des Punktes $M_1$ mit einer der Geschwindigkeit dieses Punktes gleichen Geschwindigkeit erzeugt werden.

b) Die Gleichungen 13) ergeben weiter

$$\frac{H_0}{\Xi_0} = \frac{q\sin\mu}{1-q\cos\mu},$$

woraus man ersieht, dass die Polcurve eine Gerade ist, wenn die geometrische Differenz der Geschwindigkeit zweier Systempunkte einen constanten Winkel mit der Geschwindigkeit eines dieser Punkte bildet. Man erhält z. B. eine solche Bewegung, wenn der eine Punkt sich geradlinig und gleichförmig bewegt, während der andere Punkt eine Parabel beschreibt, deren Axe zur geometrischen Differenz beider Punkte parallel ist. Die übrigen Punkte werden dabei auch Parabeln beschreiben.

c) Indem wir $\mu$ aus den Formeln 13) eliminiren, erhalten wir die Gleichung

$$\Xi_0^2 + H_0^2 - \frac{2X_2^0}{1-q^2}\Xi_0 + \frac{X_2^{02}}{1-q^2} = 0,$$

woraus wir ersehen, dass die Polcurve ein Kreis ist, wenn das Verhältniss der Geschwindigkeiten zweier Punkte des Systems constant ist. Das werden wir z. B. in jeder solchen Bewegung des Systems finden, in welcher zwei Punkte ganz beliebige Bahnen gleichmässig beschreiben. Man findet dabei leicht, dass der Kreisbogen, welchen der Geschwindigkeitspol auf der Pol-

curve in einer gewissen Zeit beschreibt, durch den Winkel gemessen wird, um welchen sich in dieser Zeit der Winkel zwischen den Geschwindigkeiten der beiden Punkte geändert hat.

d) Durch Elimination von $q$ aus den Gleichungen 13) erhalten wir

$$\Xi_0^2 + \mathrm{H}_0^2 - X_0^2 \Xi - cotg\,\mu . X_0^2 \mathrm{H} = 0,$$

so dass die Polcurve ein durch die Punkte $M_1$ und $M_2$ gehender Kreis wird, wenn die Geschwindigkeiten der Punkte $M_1$ und $M_2$ miteinander einen constanten Winkel bilden, d. h. wenn die Geschwindigkeiten dieser Punkte den Krümmungsradien ihrer Trajectorien proportional sind. Das wird auch eintreffen, wenn zwei Systempunkte auf irgend eine Weise sich geradlinig bewegen.

e) Die Formeln 13) können auch dazu dienen, den von Geisenheimer ausgesprochenen Satz, dass die Polcurve bei einer affinen Bewegung eines ähnlich-veränderlichen Systems ein Kreis ist, zu beweisen. Das kann jedoch bei Betrachtung der Beschleunigung auf einem kürzeren Wege nachgewiesen werden.

**6.** Herr Burmester hat darauf aufmerksam gemacht, dass die Bewegung eines ähnlich-veränderlichen Systems durch das Rollen der veränderlichen Polcurve auf der unbeweglichen Polbahn erzeugt werden kann. Der Beweis, dass dabei wirklich ein Rollen ohne Gleitung bestehen wird, scheint uns nicht vollkommen unnöthig zu sein; wir wollen ihn daher hier anführen.

Wenn wir durch $\varphi$ den Winkel, welchen die bewegliche Abscissenaxe mit der unbeweglichen bildet, bezeichnen und die Werthe von $\xi - x_1$ und $\eta - y_1$ aus den Formeln 8) in die Gleichungen

$$\Xi = (\xi - x_1) \cos\varphi + (\eta - y_1) \sin\varphi,$$
$$\mathrm{H} = -(\xi - x_1) \sin\varphi + (\eta - y_1) \cos\varphi$$

einsetzen, erhalten wir

$$\Xi = -\frac{a_1 \varepsilon + b_1 r}{\varepsilon^2 + r^2} \cos\varphi - \frac{b_1 \varepsilon - a_1 r}{\varepsilon^2 + r^2} \sin\varphi,$$
$$\mathrm{H} = \frac{a_1 \varepsilon + b_1 r}{\varepsilon^2 + r^2} \sin\varphi - \frac{b_1 \varepsilon - a_1 r}{\varepsilon^2 + r^2} \cos\varphi.$$

Indem wir

$$\frac{d\left(\frac{a_1 \varepsilon + b_1 r}{\varepsilon^2 + r^2}\right)}{dt} = P, \quad \frac{d\left(\frac{b_1 \varepsilon - a_1 r}{\varepsilon^2 + r^2}\right)}{dt} = Q$$

setzen, finden wir

$$14) \qquad d\xi = (a_1 - P)\, dt, \quad d\eta = (b_1 - Q)\, dt.$$

Es ist offenbar

$$\frac{d\varphi}{dt} = r,$$

daher

$$d\Xi = \left[\left(\frac{a_1\varepsilon + b_1 r}{\varepsilon^2 + r^2} r - Q\right) \sin\varphi - \left(\frac{b_1\varepsilon - a_1 r}{\varepsilon^2 + r^2} r + P\right)\cos\varphi\right] dt,$$
$$d\mathrm{H} = \left[\left(\frac{a_1\varepsilon + b_1 r}{\varepsilon^2 + r^2} r - Q\right) \cos\varphi + \left(\frac{b_1\varepsilon - a_1 r}{\varepsilon^2 + r^2} r + P\right)\sin\varphi\right] dt.$$

Wenn man bemerkt, dass infolge der Gleichungen 8) und 14)

$$-\left(\frac{b_1\varepsilon - a_1 r}{\varepsilon^2 + r^2} r + P\right) = \frac{d\xi}{dt} + \varepsilon(\xi - x_1),$$
$$\left(\frac{a_1\varepsilon + b_1 r}{\varepsilon^2 + r^2} r - Q\right) = \frac{d\eta}{dt} + \varepsilon(\eta - y_1)$$

ist, erhält man

$$d\Xi = \quad d\xi \cos\varphi + d\eta \sin\varphi + \varepsilon\, dt.[\quad (\xi - x_1)\cos\varphi + (\eta - y_1)\sin\psi],$$
$$d\mathrm{H} = -d\xi \sin\varphi + d\eta\cos\varphi + \varepsilon\, dt.[-(\xi - x_1)\sin\varphi + (\eta - y_1)\cos\varphi];$$

oder, durch $d\sigma$ und $d\Sigma$ entsprechend die Bogendifferentiale der Polbahn und der Polcurve bezeichnend,

$$d\Sigma \cos(X_1\, d\Sigma) = d\sigma \cos(X_1\, d\sigma) + \Xi\varepsilon\, dt,$$
$$d\Sigma \sin(X_1\, d\Sigma) = d\sigma \sin(X_1\, d\sigma) + \mathrm{H}\varepsilon\, dt.$$

Hieraus ersehen wir, dass $d\Sigma$ eine geometrische Summe des Bogens $d\sigma$ und der unendlich kleinen, von der Ausdehnung des Systems abhängigen Translation des Geschwindigkeitspoles ist. Es ergiebt sich also die Gleichheit der Bogen $d\Sigma$ und $d\sigma$, wenn wir annehmen, dass im Zeitraum $dt$ keine Ausdehnung stattfindet. Es geschieht also wirklich ein Rollen der Polcurve auf der Polbahn; die Polcurve aber erleidet dabei eine Ausdehnung, welche dem durch die Function $\varepsilon$ bestimmten Gesetze folgt.

7. Die Beschleunigung eines Systempunktes kann durch folgende Formeln bestimmt werden:

$$15)\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \left[\dfrac{da_1}{dt} - r^2(x - x_1) - \dfrac{dr}{dt}(y - y_1)\right] + \left(\varepsilon^2 + \dfrac{d\varepsilon}{dt}\right)(x - x_1) - 2r\varepsilon(y - y_1), \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \left[\dfrac{db_1}{dt} - r^2(y - y_1) + \dfrac{dr}{dt}(x - x_1)\right] + \left(\varepsilon^2 + \dfrac{d\varepsilon}{dt}\right)(y - y_1) + 2r\varepsilon(x - x_1). \end{cases}$$

Daraus ersehen wir, dass die Beschleunigung sich folgendermassen zusammensetzt:*

a) aus der Beschleunigung, welche der Systempunkt besitzen würde, wenn das System unveränderlich wäre;

b) aus der Beschleunigung, welche nur von der Ausdehnung des Systems abhängt und der Function $\varepsilon^2 + \dfrac{d\varepsilon}{dt}$ proportional ist;

c) aus einer Beschleunigung, welche zugleich von der Ausdehnung und von der Drehung des Systems abhängt und daher gemischte Beschleunigung (*accélération mixte***) genannt werden kann; sie ist zu der vorhergehenden Beschleunigung senkrecht gerichtet.

* Vergl. Durrande, Comptes rendus, LXXV, 1177.

** ibid.

Die Beschleunigung kann noch auf eine andere Weise zerlegt werden, wobei die Analogie zwischen der Bewegung eines ebenen ähnlich-veränderlichen und eines unveränderlichen Systems sichtbar wird, nämlich:

a) in die Beschleunigung, welche das System haben würde, wenn der Geschwindigkeitspol unbeweglich wäre und welche die Grössen

$$\lambda(x-\xi)-\mu(y-\eta) \quad \text{und} \quad \lambda(y-\eta)+\mu(x-\xi),$$

wobei

$$\lambda=\varepsilon^2+\frac{d\varepsilon}{dt}-r^2, \quad \mu=2r\varepsilon+\frac{dr}{dt}$$

gesetzt ist, zu ihren Projectionen auf den Coordinatenaxen hat, und

b) in die Beschleunigung, welche davon abhängt, dass der Geschwindigkeitspol seine Lage wechselt.

Diese letztere Beschleunigung setzt sich zusammen aus einer Beschleunigung $r\frac{d\sigma}{dt}$, welche der Richtung der Normale zur Polbahn im Punkte, welcher im betrachteten Augenblicke als Geschwindigkeitspol dient, parallel ist, und aus einer zu dieser Beschleunigung senkrechten Beschleunigung $\varepsilon\frac{d\sigma}{dt}$. Diese beiden Beschleunigungen bilden die Beschleunigung $\sqrt{\varepsilon^2+r^2}.\frac{d\sigma}{dt}$, welche mit der Tangente zur Polbahn im Punkte, der im betrachteten Augenblicke als Geschwindigkeitspol dient, einen dem Geschwindigkeitswinkel gleichen Winkel bildet. Dasselbe finden wir für ein unveränderliches System, wenn wir nur den Radius vector der Charakteristik durch die momentane Winkelgeschwindigkeit und den Geschwindigkeitswinkel durch einen rechten ersetzen.

8. Mittels der Formeln 13) kann sehr einfach die Vertheilung der Beschleunigungen im System untersucht und die Gleichungen der Bresse-schen Kreise gefunden werden, wie auch der Pascal'schen Schnecken, für deren Punkte die Tangential- oder die Normalbeschleunigung einen constanten Werth hat, u. dergl. Wir wollen darauf weiter nicht eingehen, sondern nur einiges den Beschleunigungspol Betreffendes bemerken.

a) Der Beschleunigungspol fällt im Allgemeinen nicht mit dem Geschwindigkeitspol zusammen; wir können aber leicht die Bedingung aufstellen, unter welcher ein solches Zusammenfallen stattfindet. Diese Bedingung besteht darin, dass die Bewegung des Systems eine einförmige sein muss.

b) Damit der Beschleunigungspol beständig mit einem und demselben Punkte $A$ der Ebene zusammenfalle, ist es nothwendig, dass die Beschleunigungen zweier Punkte $M_1$ und $M_2$ den Entfernungen dieser Punkte vom Punkte $A$ proportional sind und dass diese Beschleunigungen mit den Geraden $AM_1$ und $AM_2$ entsprechend gleiche Winkel bilden.

Dieser Bedingung wird z. B. eine solche Bewegung des Systems genügen, in welcher der Punkt $M_1$ eine Curve zweiten Grades, von der ein

Brennpunkt mit dem Punkte $A$ zusammenfällt, beschreibt, während der Punkt $M_2$ sich so auf einer Geraden bewegt, dass das Verhältniss seiner Beschleunigung zu seiner Entfernung vom Punkte $A$ umgekehrt proportional dem Cubus der Entfernung des Punktes $M_1$ vom Beschleunigungspol $A$ ist.

Soll der Beschleunigungspol beständig mit einem und demselben Punkte $B$ des Systems zusammenfallen, so müssen die Beschleunigungen der Punkte $M_1$ und $M_2$ denselben Bedingungen genügen, welchen die Geschwindigkeiten dieser Punkte im Falle der einförmigen Bewegung des Systems genügen; d. h. das Verhältniss der Beschleunigungen dieser Punkte und der Winkel $M_1 B M_2$ müssen constant bleiben.

Als ein Beispiel dazu können wir eine solche Bewegung anführen, bei welcher der Punkt $M_1$ gleichmässig einen Kreis beschreibt, der Punkt $M_2$ aber eine Cycloide, welche durch das Rollen eines Kreises, der sich mit derselben Winkelgeschwindigkeit wie der Punkt $M_1$ dreht, beschrieben wird.

**9. Zusammensetzung der Bewegungen ähnlich-veränderlicher ebener Systeme.** Wir stellen uns zwei Bewegungen eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems vor und bezeichnen mit $(x_1, y_1, \varepsilon_1, r_1)$ und $(x_2, y_2, \varepsilon_2, r_2)$ die Elemente, welche diese Bewegung bestimmen, wobei die beiden Bewegungen auf ein und dasselbe Coordinatensystem bezogen werden. Jeder Punkt der Ebene wird infolge der gegebenen Bewegungen zwei verschiedene Geschwindigkeiten besitzen; wenn wir für jeden Punkt diese Geschwindigkeiten geometrisch addiren, erhalten wir eine neue Bewegung des veränderlichen Systems, welche den Aehnlichkeitsbedingungen offenbar wieder genügen wird.

Die Elemente einer so zusammengesetzten Bewegung können aus folgenden Gleichungen bestimmt werden:

$$A_1 + E(x - X_1) - R(y - Y_1) = a_1 + \varepsilon_1(x - x_1) - r_1(y - y_1) + a_2 + \varepsilon_2(x - x_2) - r_2(y - y_2).$$

$$B_1 + E(y - Y_1) + R(x - X_1) = b_1 + \varepsilon_1(y - y_1) + r_1(x - x_1) + b_2 + \varepsilon_2(y - y_2) + r_2(x - x_2).$$

Da diese Gleichungen für alle möglichen Werthe von $x$ und $y$ erfüllt sein müssen, so zerfallen sie in folgende vier:

$$E = \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$
$$R = r_1 + r_2,$$
$$A_1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) X_1 + (r_1 + r_2) Y_1 = a_1 + a_2 - (\varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2) + (r_1 y_1 + r_2 y_2),$$
$$B_1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) Y_1 - (r_1 + r_2) X_1 = b_1 + b_2 - (\varepsilon_1 y_1 + \varepsilon_2 y_2) - (r_1 x_1 + r_2 x_2).$$

Die ersten zwei von diesen Gleichungen können auf folgende Weise ausgesprochen werden:

Der Radius vector der Charakteristik der zusammengesetzten Bewegung eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems

ist der geometrischen Summe der Radii vectores der Charakteristiken bei den Componenten gleich.

Wollen wir die Lage des Geschwindigkeitspols in der zusammengesetzten Bewegung aus den Lagen der Geschwindigkeitspole der Componenten ableiten, so müssen wir die Coordinaten eines solchen Punktes aufsuchen, dessen Geschwindigkeit, aus den beiden Componenten zusammengesetzt, gleich Null ist. Wenn wir entsprechend durch $(\Xi, \mathsf{H})$, $(\xi_1, \eta_1)$ und $(\xi_2, \eta_2)$ die Coordinaten der drei Geschwindigkeitspole bezeichnen, müssen wir daher $\Xi$ und $\mathsf{H}$ aus folgenden Gleichungen bestimmen:

$$a_1 + a_2 + \varepsilon_1(\Xi - x_1) + \varepsilon_2(\Xi - x_2) - r_1(\mathsf{H} - y_1) - r_2(\mathsf{H} - y_2) = 0,$$
$$b_1 + b_2 + \varepsilon_1(\mathsf{H} - y_1) + \varepsilon_2(\mathsf{H} - y_2) + r_1(\Xi - x_1) + r_2(\Xi - x_2) = 0.$$

Indem wir die Gleichungen

$$a_1 + \varepsilon_1(\xi_1 - x_1) - r_1(\eta_1 - y_1) = 0, \quad b_1 + \varepsilon_1(\eta_1 - y_1) + r_1(\xi_1 - x_1) = 0,$$
$$a_2 + \varepsilon_2(\xi_2 - x_2) - r_2(\eta_2 - y_2) = 0, \quad b_2 + \varepsilon_2(\eta_2 - y_2) + r_2(\xi_2 - x_2) = 0,$$

welche den Gleichungen 7) nachgebildet sind, beachten, finden wir

$$\Xi = \frac{(\varepsilon_1^2 + r_1^2)\xi_1 + (\varepsilon_2^2 + r_2^2)\xi_2 + (\varepsilon_1\varepsilon_2 + r_1 r_2)(\xi_1 + \xi_2) + (\varepsilon_1 r_2 - \varepsilon_2 r_1)(\eta_1 - \eta_2)}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + (r_1 + r_2)^2},$$
$$\mathsf{H} = \frac{(\varepsilon_1^2 + r_1^2)\eta_1 + (\varepsilon_2^2 + r_2^2)\eta_2 + (\varepsilon_1\varepsilon_2 + r_1 r_2)(\eta_1 + \eta_2) - (\varepsilon_1 r_2 - \varepsilon_2 r_1)(\xi_1 - \xi_2)}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + (r_1 + r_2)^2}.$$

Wenn wir

$$\sqrt{\varepsilon_1^2 + r_1^2} = s_1, \quad \sqrt{\varepsilon_2^2 + r_2^2} = s_2, \quad \frac{s_1}{s_2} = p$$

setzen und durch $\varphi$ den Winkel zwischen den Radii vectores $s_1$ und $s_2$ bezeichnen, erhalten wir

$$16)\quad \begin{cases} \Xi = \dfrac{(1 + p\cos\varphi)\xi_1 + (p^2 + p\cos\varphi)\xi_2 + p\sin\varphi.(\eta_1 - \eta_2)}{1 + 2p\cos\varphi + p^2}, \\ \mathsf{H} = \dfrac{(1 + p\cos\varphi)\eta_1 + (p^2 + p\cos\varphi)\eta_2 - p\sin\varphi.(\xi_1 - \xi_2)}{1 + 2p\cos\varphi + p^2}. \end{cases}$$

Diese Formeln geben uns folgende Beziehungen:

$$17)\quad \frac{(\Xi - \xi_1)^2 + (\mathsf{H} - \eta_1)^2}{(\Xi - \xi_2)^2 + (\mathsf{H} - \eta_2)^2} = p^2,$$

$$18)\quad \frac{(\mathsf{H} - \eta_1)(\Xi - \xi_2) - (\mathsf{H} - \eta_2)(\Xi - \xi_1)}{(\Xi - \xi_1)(\Xi - \xi_2) + (\mathsf{H} - \eta_1)(\mathsf{H} - \eta_2)} = tg\,\varphi.$$

Die erste von ihnen beweist, dass die Entfernungen des Geschwindigkeitspoles der zusammengesetzten Bewegung von den Geschwindigkeitspolen der Componenten den Grössen $s_1$ und $s_2$ umgekehrt proportional sind. Wir erblicken darin eine Analogie mit der zusammengesetzten Bewegung eines unveränderlichen ebenen Systems. Die Gleichung 18) spricht aus, dass der Winkel, welcher durch die Verbindungslinien des Geschwindigkeitspoles der zusammengesetzten Bewegung mit den Geschwindigkeitspolen der Componenten gebildet wird, dem Winkel zwischen den Linien $s_1$ und $s_2$ gleich ist.

Man bekommt also den Geschwindigkeitspol der zusammengesetzten Bewegung als einen der Durchschnittspunkte zweier Kreise, von denen der eine die Verbindungslinie der Geschwindigkeitspole der Componenten harmonisch im umgekehrten Verhältnisse der Grössen $s_1$ und $s_2$ theilt und der andere durch diese Punkte geht.

**10.** Wir wollen einige Resultate angeben, welche sich auf specielle Fälle beziehen.

a) Wenn die Componenten der zusammengesetzten Bewegung einförmig sind und ihre Geschwindigkeitspole zusammenfallen, so ist die zusammengesetzte Bewegung auch einförmig und ihr Geschwindigkeitspol fällt mit den Geschwindigkeitspolen der Componenten zusammen.

b) Wenn die Componenten einförmig sind, aber die Geschwindigkeitspole derselben nicht zusammenfallen, so wird im Allgemeinen die zusammengesetzte Bewegung nicht einförmig sein. Damit aber dieselbe einförmig wird, ist es nothwendig und hinreichend, dass die Charakteristiken der Componenten ähnliche Curven seien mit dem Aehnlichkeitspol im Anfangspunkte der Coordinaten und dass die Punkte derselben in verschiedenen Zeitmomenten entsprechend ähnliche Punktreihen bilden.

c) Die zusammengesetzte Bewegung kann auch dann einförmig sein, wenn die Componenten nicht einförmig sind. Die Coordinaten $\Xi$ und H hängen von sechs Grössen $\xi_1$, $\xi_2$, $\eta_1$, $\eta_2$, $p$ und $\varphi$ ab; von denselben können vier willkürlich gegeben und die übrigen zwei der Bedingung gemäss, dass $\Xi$ und H constant bleiben, bestimmt werden. Auf diese Weise finden wir z. B.: wenn die Charakteristiken der Componenten ähnliche Curven sind und in entsprechenden Momenten ähnliche Punktreihen bilden, so ist es, damit die zusammengesetzte Bewegung einförmig sei, nothwendig und hinreichend, dass die Geschwindigkeitspole der Componenten so ihre Lage ändern, wie zwei Punkte eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems, welches sich einförmig bewegt und zum Geschwindigkeitspol den Geschwindigkeitspol der zusammengesetzten Bewegung hat.

**11. Die relative Bewegung des ähnlich-veränderlichen ebenen Systems.**

Es sei $S_1$ ein ähnlich-veränderliches ebenes System, dessen Bewegung durch die Elemente $x_1$, $y_1$, $\varepsilon_1$, $r_1$ bestimmt ist, und es mögen $x$, $y$ und $x^0$, $y^0$ entsprechend die Coordinaten eines Systempunktes und ihre Anfangswerthe bedeuten. Wir haben dann, den Formeln 1) gemäss:

$$
19)\quad \begin{cases} x = x_1 + e^{\int_0^t \varepsilon_1 dt}\left[(x^0 - x_1^0)\cos\left(\int_0^t r_1\, dt\right) - (y^0 - y_1^0)\sin\left(\int_0^t r_1\, dt\right)\right], \\ y = y_1 + e^{\int_0^t \varepsilon_1 dt}\left[(x^0 - x_1^0)\sin\left(\int_0^t r_1\, dt\right) + (y_0 - y_1^0)\cos\left(\int_0^t r_1\, dt\right)\right]. \end{cases}
$$

Stellen wir uns ein anderes ähnlich-veränderliches System $S$ vor, dessen Bewegung in derselben Ebene vorgeht und durch die Elemente $X_1$, $Y_1$, $E$, $R$ bestimmt ist. Dann können wir, durch $X$, $Y$ und $X^0$, $Y^0$ entsprechend die Coordinaten eines Systempunktes und ihre Anfangswerthe bezeichnend, ebenso wie oben schreiben:

$$20)\quad \begin{cases} X = X_1 + e^{\int_0^t E\,dt}\left[(X^0 - X_1^0)\cos\left(\int_0^t R\,dt\right) - (Y^0 - Y_1^0)\sin\left(\int_0^t R\,dt\right)\right], \\ Y = Y_1 + e^{\int_0^t E\,dt}\left[(X^0 - X_1^0)\sin\left(\int_0^t R\,dt\right) + (Y^0 - Y_1^0)\cos\left(\int_0^t R\,dt\right)\right]. \end{cases}$$

Wenn wir diese Bewegung auf ein Coordinatensystem beziehen, welches aus den Punkten des Systems $S_1$ gebildet ist, so können wir diese Bewegung als die relative Bewegung eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems betrachten. Indem wir mit $\xi_1$, $\eta_1$, $\varepsilon_2$, $r_2$ die Elemente dieser relativen Bewegung und mit $\xi$, $\eta$ und $\xi^0$, $\eta^0$ entsprechend die Coordinaten eines Systempunktes und ihre Anfangswerthe in Bezug auf das bewegliche Coordinatensystem bezeichnen, können wir setzen:

$$21)\quad \begin{cases} \xi = \xi_1 + e^{\int_0^t \varepsilon_2\,dt}\left[(\xi_0 - \xi_1^0)\cos\left(\int_0^t r_2\,dt\right) - (\eta^0 - \eta_1^0)\sin\left(\int_0^t r_2\,dt\right)\right], \\ \eta = \eta_1 + e^{\int_0^t \varepsilon_2\,dt}\left[(\xi^0 - \xi_1^0)\sin\left(\int_0^t r_2\,dt\right) + (\eta^0 - \eta_1^0)\cos\left(\int_0^t r_2\,dt\right)\right]. \end{cases}$$

Bei Betrachtung dieser Formeln müssen wir uns vorstellen, dass das System $S_1$ sich in einer bestimmten Ausdehnungsphase befindet; denn sonst werden alle darin stehende Coordinaten, abgesehen von allen übrigen Umständen, ihre Grösse noch infolge der Deformation des Systems $S_1$ ändern. Wir werden daher voraussetzen, dass die Formeln 21) sich auf diejenige Phase des Systems $S_1$ beziehen, welche dem Moment $t = 0$ entspricht.

Wählen wir die beweglichen Coordinatenaxen so, dass der Anfangspunkt $(x_1, y_1)$ fällt und dass zur Zeit $t = 0$ diese Axen den unbeweglichen parallel sind, so werden zwischen den Coordinaten $\xi$, $\eta$ und $X$, $Y$ folgende Beziehungen bestehen:

$$22)\quad \begin{cases} X = x_1 + e^{\int_0^t \varepsilon_1\,dt}\left[\xi\cos\left(\int_0^t r_1\,dt\right) - \eta\sin\left(\int_0^t r_1\,dt\right)\right], \\ Y = y_1 + e^{\int_0^t \varepsilon_1\,dt}\left[\xi\sin\left(\int_0^t r_1\,dt\right) + \eta\cos\left(\int_0^t r_1\,dt\right)\right]. \end{cases}$$

Wenn wir diese Ausdrücke mit den Gleichungen 20) vergleichen, finden wir:

$$\xi = e^{-\int_0^t \varepsilon_1 dt}\left[(X_1 - x_1)\cos\left(-\int_0^t r_1\, dt\right) - (Y_1 - y_1)\sin\left(-\int_0^t r_1\, dt\right)\right]$$

$$+ e^{\int_0^t (E-\varepsilon_1) dt}\left[(X^0 - X_1^0)\cos\left\{\int_0^t (R - r_1)\, dt\right\} - (Y^0 - Y_1^0)\sin\left\{\int_0^t (R-r_1)\, dt\right\}\right].$$

$$\eta = e^{-\int_0^t \varepsilon_1 dt}\left[(X_1 - x_1)\sin\left(-\int_0^t r_1\, dt\right) + (Y_1 - y_1)\cos\left(-\int_0^t r_1\, dt\right)\right]$$

$$+ e^{\int_0^t (E-\varepsilon_1) dt}\left[(X^0 - X_1^0)\sin\left\{\int_0^t (R - r_1)\, dt\right\} + (Y^0 - Y_1^0)\cos\left\{\int_0^t (R-r_1)\, dt\right\}\right].$$

Diese Formeln werden mit den Formeln 21) identisch, wenn gesetzt wird:

$$23)\quad \begin{cases} \xi_1 = e^{-\int_0^t \varepsilon_1 dt}\left[(X_1 - x_1)\cos\left(-\int_0^t r_1\, dt\right) - (Y_1 - y_1)\sin\left(-\int_0^t r_1\, dt\right)\right], \\ \eta_1 = e^{-\int_0^t \varepsilon_1 dt}\left[(X_1 - x_1)\sin\left(-\int_0^t r_1\, dt\right) + (Y_1 - y_1)\cos\left(-\int_0^t r_1\, dt\right)\right], \\ \varepsilon_2 = E - \varepsilon_1, \quad r_2 = R - r_1. \end{cases}$$

Dadurch sind die Elemente der relativen Bewegung vollkommen bestimmt. Die beiden letzten von den Gleichungen 23) zeigen, dass der Radius vector der Charakteristik in der relativen Bewegung die geometrische Differenz ist der Radii vectores in der absoluten und in der Führungsbewegung.

Mit Hilfe der letzten Formeln, wenn wir aus denselben die Elemente der absoluten Bewegung bestimmen, können wir leicht folgende allgemeine Formeln aufstellen, durch welche die Coordinaten eines Punktes in der absoluten Bewegung durch die Elemente der relativen und der Führungsbewegung bestimmt werden können:

$$24)\quad \begin{cases} X = x_1 + e^{\int_0^t \varepsilon_1 dt}\left[\xi_1 \cos\left(\int_0^t r_1\, dt\right) - \eta_1 \sin\left(\int_0^t r_1\, dt\right)\right] \\ \qquad + e^{\int_0^t (\varepsilon_1+\varepsilon_2) dt}\left\{(X^0 - x_1^0 - \xi_1^0)\cos\left[\int_0^t (r_1 + r_2)\, dt\right]\right. \\ \qquad\qquad \left. - (Y^0 - y_1^0 - \eta_1^0)\sin\left[\int_0^t (r_1 + r_2)\, dt\right]\right\}, \end{cases}$$

$$24) \begin{cases} Y = y_1 + e^{\int_0^t \varepsilon_1 dt} \left[\xi_1 \sin\left(\int_0^t r_1 dt\right) + \eta_1 \cos\left(\int_0^t r_1 dt\right)\right] \\ \quad + e^{\int_0^t (\varepsilon_1+\varepsilon_2) dt} \Big\{(X^0 - x_1^0 - \xi_1^0) \sin\left[\int_0^t (r_1 + r_2) dt\right] \\ \quad + (Y^0 - y_1^0 - \eta_1^0) \cos\left[\int_0^t (r_1 + r_2) dt\right]\Big\}. \end{cases}$$

**12.** Nach dem Gesetze der Zusammensetzung der Geschwindigkeiten, welches bekanntlich nicht nur auf die unveränderlichen Systeme, sondern auch auf continuirlich-veränderliche Systeme anwendbar ist, können wir unmittelbar Ausdrücke für die Componenten der absoluten Geschwindigkeit aufstellen. Indem wir durch $v_1$ und $v_2$ entsprechend die Führungsgeschwindigkeit und die relative Geschwindigkeit eines Punktes bezeichnen und

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \alpha_1, \quad \frac{d\eta_1}{dt} = \beta_1$$

setzen, finden wir, den Formeln 2) gemäss:

$$25) \begin{cases} v_{1x} = a_1 + \varepsilon_1 (X - x_1) - r_1 (Y - y_1), \\ v_{1y} = b_1 + \varepsilon_1 (Y - y_1) + r_1 (X - x_1); \end{cases}$$

$$26) \begin{cases} v_{2\xi} = [\alpha_1 + \varepsilon_2 (\xi - \xi_1) - r_2 (\eta - \eta_1)] e^{\int_0^t \varepsilon_1 dt}, \\ v_{2\eta} = [\beta_1 + \varepsilon_2 (\eta - \eta_1) - r_2 (\xi - \xi_1)] e^{\int_0^t \varepsilon_1 dt}. \end{cases}$$

In den Formeln 26) ist der Factor $e^{\int_0^t \varepsilon_1 dt}$ eingeführt, weil infolge der von der Führungsbewegung abhängigen Ausdehnung jedes Linienelement in der relativen Bewegung zur Zeit $t$ $e^{\int_0^t \varepsilon_1 dt}$-mal grösser geworden ist, als es im Anfangsmomente, auf welches sich die Formeln 21) beziehen, gewesen ist. Somit müssen wir schreiben:

$$27) \begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = a_1 + \varepsilon_1 (X - x_1) - r_1 (Y - y_1) \\ \quad + e^{\int_0^t \varepsilon_1 dt} \Big\{ [\alpha_1 + \varepsilon_2 (\xi - \xi_1) - r_2 (\eta - \eta_1)] \cos\left(\int_0^t r_1 dt\right) \\ \quad - [\beta_1 + \varepsilon_2 (\eta - \eta_1) + r (\xi - \xi_1)] \sin\left(\int_0^t r_0 dt\right)\Big\}, \end{cases}$$

$$27)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dY}{dt} &= b_1 + \varepsilon_1 (Y - y_1) + r_1 (X - x_1) \\ &+ e^{\int_0^t \varepsilon_1 dt} \Big\{ [\alpha_1 + \varepsilon_2 (\xi - \xi_1) - r_2 (\eta - \eta_1)] \sin\left(\int_0^t r_1 dt\right) \\ &+ [\beta_1 + \varepsilon_2 (\eta - \eta_1) + r_2 (\xi - \xi_1)] \cos\left(\int_0^t r_1 dt\right) \Big\}. \end{aligned}\right.$$

**13.** Wir wollen zuletzt die Beschleunigungen der relativen und der absoluten Bewegung untersuchen. Wenn wir

$$28)\quad \left\{\begin{aligned} \varepsilon_1^2 - \frac{d\varepsilon_1}{dt} - r_1^2 &= \lambda_1, \quad 2\varepsilon_1 r_1 + \frac{dr_1}{dt} = \mu_1. \\ \varepsilon_2^2 - \frac{d\varepsilon_2}{dt} - r_2^2 &= \lambda_2, \quad 2\varepsilon_2 r_2 + \frac{dr_2}{dt} = \mu_2 \end{aligned}\right.$$

setzen und durch $w_1$ und $w_2$ entsprechend die Führungs- und die relative Beschleunigung bezeichnen, werden wir haben:

$$29)\quad \left\{\begin{aligned} w_{1x} &= \frac{da_1}{dt} + \lambda_1 (X - x_1) - \mu_1 (Y - y_1), \\ w_{1y} &= \frac{db_1}{dt} + \lambda_1 (Y - y_1) + \mu_1 (X - x_1); \end{aligned}\right.$$

$$30)\quad \left\{\begin{aligned} w_{2\xi} &= \left[\frac{d\alpha_1}{dt} + \lambda_2 (\xi - \xi_1) - \mu_2 (\eta - \eta_1)\right] e^{\int_0^t \varepsilon_1 dt}, \\ w_{2\eta} &= \left[\frac{d\beta_1}{dt} + \lambda_2 (\eta - \eta_1) + \mu_2 (\xi - \xi_1)\right] e^{\int_0^t \varepsilon_1 dt}, \end{aligned}\right.$$

wobei wieder der Factor $e^{\int_0^t \varepsilon_1 dt}$ aus demselben Grunde wie oben eingeführt ist.

Wenn wir die Gleichung 27) nach $t$ differenziren und die Formeln 25), 26), 27), 28) und 29), sowie die Beziehungen

$$w_{2x} = w_{2\xi} \cos\left(\int_0^t r_1 dt\right) - w_{2\eta} \sin\left(\int_0^t r_1 dt\right),$$

$$w_{2y} = w_{2\xi} \sin\left(\int_0^t r_1 dt\right) + w_{2\eta} \cos\left(\int_0^t r_1 dt\right)$$

beachten, finden wir:

$$31)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2X}{dt^2} &= w_{1x} + w_{2x} + 2(\varepsilon_1 v_{2x} - r_1 v_{2y}), \\ \frac{d^2Y}{dt^2} &= w_{1y} + w_{2y} + 2(\varepsilon_1 v_{2y} + r_1 v_{2x}). \end{aligned}\right.$$

Somit setzt sich die absolute Beschleunigung aus drei Beschleunigungen zusammen: aus der Führungsbeschleunigung, der relativen Beschleunigung und einer Beschleunigung, welche der zusammengesetzten Centripetalbeschleunigung in der absoluten Bewegung eines unveränderlichen ebenen Systems ganz analog ist. Ihre Grösse

$$2\sqrt{(\varepsilon_1 v_{2x} - r_1 v_{2y})^2 + (\varepsilon_1 v_{2y} + r_1 v_{2x})^2} = 2\sqrt{\varepsilon_1^2 + r_1^2} \,.\, v_2$$

ist dem doppelten Product der relativen Geschwindigkeit in den Radius vector der Charakteristik der Führungsbewegung gleich. Ihre Richtung bildet mit der relativen Geschwindigkeit des betrachteten Punktes einen Winkel welcher dem Geschwindigkeitswinkel der Führungsbewegung gleich ist.

Somit sehen wir, dass der Satz von Coriolis auch für ein ähnlich, veränderliches System giltig ist; es muss nur dabei die Winkelgeschwindigkeit durch den Radius vector der Charakteristik und der rechte Winkel, welchen die zusammengesetzte Centrifugalbeschleunigung mit der relativen Geschwindigkeit bildet, durch den Geschwindigkeitswinkel der Führungsbewegung ersetzt werden.

---

## X.

# Ueber die Bedingungen, unter denen zwei lineare homogene Differentialgleichungen mehrere partikuläre Integrale gemeinsam haben.


Von

Dr. E. Grünfeld,

Assistent an der techn. Hochschule in Wien.


---

Sind

$$1)\quad \left\{ \begin{aligned} P(y) &= \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + p_m y = 0 \\ &\text{und} \\ Q(y) &= \frac{d^n y}{dx^n} + q_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + q_n y = 0 \end{aligned} \right.$$

lineare homogene Differentialgleichungen der $m^{\text{ten}}$, beziehungsweise $n^{\text{ten}}$ Ordnung, und man bildet das System von $m+n$ Gleichungen

$$2)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^{m-1} Q(y)}{dx^{m-1}} = 0, \quad \frac{d^{m-2} Q(y)}{dx^{m-2}} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{d\,Q(y)}{dx} = 0, \quad Q(y) = 0; \\ &\frac{d^{n-1} P(y)}{dx^{n-1}} = 0, \quad \frac{d^{n-2} P(y)}{dx^{n-2}} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{d\,P(y)}{dx} = 0, \quad P(y) = 0, \end{aligned} \right.$$

so wird bekanntlich durch das identische Verschwinden ihrer Determinante

$$d = \begin{vmatrix} 1 & q_1 & q_{m-1,1} & q_{m-1,2} & \cdots & q_{m-1,m+n-3} & q_{m-1,m+n-2} \\ 0 & 1 & q_1 & q_{m-2,1} & \cdots & q_{m-2,m+n-4} & q_{m-2,m+n-3} \\ 0 & 0 & 1 & q_1 & \cdots & q_{m-3,m+n-5} & q_{m-3,m+n-4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q_{n-1} & q_n \\ 1 & p_1 & p_{n-1,1} & p_{n-1,2} & \cdots & p_{n-1,m+n-3} & p_{n-1,m+n-2} \\ 0 & 1 & p_1 & p_{n-2,1} & \cdots & p_{n-2,m+n-4} & p_{n-2,m+n-3} \\ 0 & 0 & 1 & p_1 & \cdots & p_{n-3,m+n-5} & p_{n-3,m+n-4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{m-1} & p_m \end{vmatrix},$$

in welcher, wenn zur Abkürzung

$$\varrho_\alpha = \frac{\varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-\alpha+1)}{1.2\ldots\alpha},$$

$$p_i^{(\alpha)} = \frac{d^\alpha p_i}{dx^\alpha}, \quad q_i^{(\alpha)} = \frac{d^\alpha q_i}{dx^\alpha}$$

gesetzt wird,

$$p_{\varrho\sigma} = \varrho_\sigma p_1^{(\sigma)} + \varrho_{\sigma-1} p_2^{(\sigma-1)} + \ldots + \varrho_1 p_\sigma^{(1)} + p_{\sigma+1},$$
$$q_{\varrho\sigma} = \varrho_\sigma q_1^{(\sigma)} + \varrho_{\sigma-1} q_2^{(\sigma-1)} + \ldots + \varrho_1 q_\sigma^{(1)} + q_{\sigma+1}$$

ist, die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür ausgedrückt, dass die beiden Differentialgleichungen 1) ein partikuläres Integral gemeinsam haben.

Die Bedingungen, unter denen diesen Gleichungen zwei oder mehrere Integrale gemeinsam sind, lassen sich, wie Herr v. Escherich gezeigt hat,* durch die Betrachtung der Unterdeterminanten in der Determinante $d$ herleiten; man kann dieselben jedoch auch aus dem Gleichungssystem 2) selbst erhalten,** zu welchem Zwecke mir das nachstehende Verfahren sehr angezeigt scheint, welches ähnlich demjenigen ist, mit dessen Hilfe Herr Hioux*** die analogen Bedingungen für zwei algebraische Gleichungen gewonnen hat.

Das System der Gleichungen 2) besteht aus zwei Gruppen, deren erste $m$ und deren zweite $n$ Gleichungen enthält.

Man unterdrücke in jeder Gruppe die $n-i$ ersten Gleichungen: dann bleiben $k+i$ in der ersten und $i$ in der zweiten übrig. In diesen zurückbleibenden Gleichungen bilden die $k+2i$ ersten Colonnen zur Linken eine Determinante $(k+2i)^{\text{ter}}$ Ordnung, in welcher die Elemente der ersten Colonne aus den Coefficienten von $\frac{d^{m+i-1}y}{dx^{m+i-1}}$ und die der letzten Colonne aus den Coefficienten von $\frac{d^{n-i}y}{dx^{n-i}}$ in den übrig bleibenden Gleichungen bestehen. Für $i=n$ kommt das ursprüngliche System 2) wieder zum Vorschein. Diese Determinanten $(k+2i)^{\text{ter}}$ Ordnung mögen mit $\mathfrak{D}_{i,0}$ bezeichnet werden.

Es bezeichnen ferner

$$\mathfrak{D}_{i,1},\ \mathfrak{D}_{i,2},\ \ldots\ \mathfrak{D}_{i,n-i}$$

Determinanten, welche aus $\mathfrak{D}_{i,0}$ hervorgehen, wenn darin die letzte Colonne von Coefficienten nach und nach durch jede der $n-i$ folgenden Coefficientencolonnen ersetzt wird.

Es werde die Determinante $\mathfrak{D}_{i,0}$ nach den Elementen ihrer letzten Colonne geordnet, und seien die denselben zugehörigen Unterdeterminanten die Grössen

$$\mathfrak{q}_{i,0},\ \mathfrak{q}_{i,1},\ \mathfrak{q}_{i,2},\ \ldots\ \mathfrak{q}_{i,k+i-1}$$

und

$$\mathfrak{p}_{i,0},\ \mathfrak{p}_{i,1},\ \mathfrak{p}_{i,2},\ \ldots\ \mathfrak{p}_{i,i-1}.$$

Von den zurückgebliebenen Gleichungen multiplicire man die erste mit $\mathfrak{q}_{i,0}$, die zweite mit $\mathfrak{q}_{i,1}$, ..., die letzte mit $\mathfrak{p}_{i,i-1}$ und addire: die so erhaltene Summe ist offenbar nichts Anderes als der Ausdruck

* Siehe die Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien, Bd. 46 S. 61.

** Siehe die Note von Lemonnier in den Comptes Rendus, t. XCV p. 476.

*** Siehe die Annales de l'École Normale Supérieure, t. X p. 383—390.

3) $F_i = \mathfrak{D}_{i,0}\frac{d^{n-i}y}{dx^{n-i}} + \mathfrak{D}_{i,1}\frac{d^{n-i-1}y}{dx^{n-i-1}} + \dots + \mathfrak{D}_{i,n-i-1}\frac{dy}{dx} + \mathfrak{D}_{i,n-i}y,$

indem in derselben die Coefficienten der höheren Ableitungen von $y$ als der $(n-i)^{\text{ten}}$ identisch verschwinden.

$F_i$ kann andererseits, wie leicht zu ersehen ist, auch in der Form geschrieben werden:

4) $$\begin{cases} F_i = \left(\mathfrak{q}_{i,0}\frac{d^{k+i-1}}{dx^{k+i-1}} + \mathfrak{q}_{i,1}\frac{d^{k+i-2}}{dx^{k+i-2}} + \dots + \mathfrak{q}_{i,k+i-2}\frac{d}{dx} + \mathfrak{q}_{i,k+i-1}\right)Q(y) \\ \quad + \left(\mathfrak{p}_{i,0}\frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} + \mathfrak{p}_{i,1}\frac{d^{i-2}}{dx^{i-2}} + \dots + \mathfrak{p}_{i,i-2}\frac{d}{dx} + \mathfrak{p}_{i,i-1}\right)P(y) \end{cases}$$

oder, wenn

$$\left(\mathfrak{q}_{i,0}\frac{d^{k+i-1}}{dx^{k+i-1}} + \mathfrak{q}_{i,1}\frac{d^{k+i-2}}{dx^{k+i-2}} + \dots + \mathfrak{q}_{i,k+i-1}\right)y = P_i(y)$$

und

$$\left(\mathfrak{p}_{i,0}\frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} + \mathfrak{p}_{i,1}\frac{d^{i-2}}{dx^{i-2}} + \dots + \mathfrak{p}_{i,i-1}\right)y = Q_i(y)$$

gesetzt wird,

$$F_i = P_i(Q(y)) + Q_i(P(y))$$

oder kürzer

5) $$F_i = P_i Q + Q_i P.$$

Aus der Gleichung 5) ergiebt sich der Satz:

I. „Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, dass die beiden Differentialgleichungen $P(y) = 0$ und $Q(y) = 0$ $\varkappa$ und nur $\varkappa$ Integrale gemeinsam haben, sind

6) $$\mathfrak{D}_{n-\varkappa+1,0} = 0, \quad \mathfrak{D}_{n-\varkappa+1,1} = 0, \quad \dots, \quad \mathfrak{D}_{n-\varkappa+1,\varkappa-1} = 0$$

und

$$\mathfrak{D}_{n-\varkappa,0} \neq 0.\text{“}$$

In der That, aus der Gleichung

4) $$F_i(y) = P_i Q(y) + Q_i P(y)$$

folgt allgemein, dass für jedes Integral, welches $P(y) = 0$ und $Q(y) = 0$ gleichzeitig zukommt, auch $F_i = 0$ wird. Nun ist

$$F_{n-\varkappa+1} = P_{n-\varkappa+1} Q + Q_{n-\varkappa+1} P,$$

wo nach 3)

$$F_{n-\varkappa+1} = \mathfrak{D}_{n-\varkappa+1,0}y^{(\varkappa-1)} + \mathfrak{D}_{n-\varkappa+1,1}y^{(\varkappa-2)} + \dots + \mathfrak{D}_{n-\varkappa+1,\varkappa-1}y;$$

für jedes der $\varkappa$ den Gleichungen $P(y) = 0$ und $Q(y) = 0$ gemeinsamen Integrale müsste $F_{n-\varkappa+1} = 0$ sein, d. h. es liesse diese Differentialgleichung $(\varkappa-1)^{\text{ter}}$ Ordnung $\varkappa$ von einander linear unabhängige Integrale zu, was nicht möglich ist; es muss daher $F_{n-\varkappa+1}$ identisch verschwinden, somit sein:

$$\mathfrak{D}_{n-k+1,0} = 0, \quad \mathfrak{D}_{n-\varkappa+1,1} = 0, \quad \dots, \quad \mathfrak{D}_{n-\varkappa+1,\varkappa-1} = 0.$$

Haben also $P(y) = 0$ und $Q(y) = 0$ $\varkappa$ Fundamentalintegrale gemeinsam, so finden nothwendig die letzteren Gleichungen statt. Soll die Anzahl der gemeinsamen Integrale $\varkappa$ nicht übersteigen, so muss ausserdem die Bedingung $\mathfrak{D}_{n-\varkappa,0} \neq 0$ erfüllt sein. Denn es ist

$$F_{n-\varkappa} = \mathfrak{D}_{n-\varkappa,0}y^{(\varkappa)} + \mathfrak{D}_{n-\varkappa,1}y^{(\varkappa-1)} + \dots + \mathfrak{D}_{n-\varkappa,\varkappa}y$$

ein homogener linearer Differentialausdruck $\varkappa^{\text{ter}}$ Ordnung, welcher für die $\varkappa$ den Gleichungen $P(y)=0$ und $Q(y)=0$ gemeinsamen Integrale verschwindet, wozu nothwendig $\mathfrak{D}_{n-\varkappa,0} \neq 0$, und der andererseits auch nicht identisch verschwinden kann, da alsdann den Gleichungen $P(y)=0$ und $Q(y)=0$, der Voraussetzung entgegen, mehr als $\varkappa$ Integrale gemeinsam sein könnten.

Die aufgestellten Bedingungen sind also nothwendig. Dieselben sind aber auch hinreichend. Bestehen nämlich die Gleichungen

6) $$\mathfrak{D}_{n-\varkappa+1,0}=0, \quad \mathfrak{D}_{n-\varkappa+1,1}=0, \quad \ldots, \quad \mathfrak{D}_{n-\varkappa+1,\varkappa-1}=0,$$

so folgt, dass

$$P_{n-\varkappa+1}Q+Q_{n-\varkappa+1}P=0;$$

der Ausdruck $Q_{n-\varkappa+1}P(y)$ verschwindet für die $m$ Fundamentalintegrale von $P(y)=0$, für ebendieselben muss daher auch $P_{n-k+1}Q(y)=0$ sein; weil aber der Ausdruck $P_{n-\varkappa+1}(z)$, der von der Ordnung $m-\varkappa$ ist, für nicht mehr als $m-\varkappa$ linear unabhängige Functionen $z$ verschwinden kann, so müssen die übrigen $\varkappa$ Integrale der Gleichung $Q(y)=0$ angehören. Finden demnach die Gleichungen 6) statt, so haben $P(y)=0$ und $Q(y)=0$ wenigstens $\varkappa$ Integrale gemeinsam. Ist nebstdem die Bedingung erfüllt, dass $\mathfrak{D}_{n-\varkappa,0}$ von Null verschieden, so folgt, dass die Gleichung

$$F_{n-\varkappa}=\mathfrak{D}_{n-\varkappa,0}\,y^{(\varkappa)}+\ldots+\mathfrak{D}_{n-\varkappa\ \varkappa}\,y=0$$

von der $\varkappa^{\text{ten}}$ Ordnung ist und dass somit wegen

$$P_{n-\varkappa}Q+Q_{n-\varkappa}P=F_{n-\varkappa}$$

den Gleichungen $P(y)=0$ und $Q(y)=0$ $\varkappa$ und nicht mehr als $\varkappa$ Fundamentalintegrale gemeinsam sein können.

Aus dem Obigen folgt noch:

II. „Diejenige homogene lineare Differentialgleichung, welche die den beiden Differentialgleichungen $P(y)=0$ und $Q(y)=0$ gemeinsamen Lösungen zulässt, ist

$$\mathfrak{D}_{n-\varkappa,0}\,y^{(\varkappa)}+\mathfrak{D}_{n-\varkappa,1}\,y^{(\varkappa-1)}+\ldots+\mathfrak{D}_{n-\varkappa,n}\,y=0.“$$

Der Satz I kann durch den folgenden ersetzt werden:

III. „Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, dass die beiden Differentialgleichungen $P(y)=0$ und $Q(y)=0$ $\varkappa$ und nur $\varkappa$ linear unabhängige Integrale gemeinsam haben, sind

7) $$\mathfrak{D}_{n,0}=0, \quad \mathfrak{D}_{n-1,0}=0, \quad \ldots, \quad \mathfrak{D}_{n-\varkappa+1,0}=0$$

und

$$\mathfrak{D}_{n-\varkappa,0} \neq 0.$$

Beweis.

Nimmt man $\varkappa=1$ an, so ist der Satz III von I nicht verschieden, da alsdann die Bedingungen 7) mit denen in 6) zusammenfallen und die Bedingung $\mathfrak{D}_{n-\varkappa,0} \neq 0$ für jedes in Betracht kommende $\varkappa$ in beiden Sätzen enthalten ist.

Der Satz III gilt also für $\varkappa=1$.

Angenommen, derselbe wäre für den Fall von $\varkappa$ gemeinsamen Integralen erwiesen, so ist zu zeigen, dass er auch noch für $\varkappa+1$ Geltung besitzt.

Unter der gemachten Voraussetzung ist klar, dass die nothwendigen Bedingungen für das Vorhandensein von wenigstens $\varkappa+1$ gemeinsamen Integralen ausgedrückt werden durch die Gleichungen

$$\mathfrak{D}_{n,0}=0,\quad \mathfrak{D}_{n-1,0}=0,\quad \ldots,\quad \mathfrak{D}_{n-\varkappa+1,0}=0$$

und

$$\mathfrak{D}_{n-\varkappa,0}=0.$$

Dieselben sind aber auch hinreichend; denn es kann einerseits die Anzahl der gemeinsamen Integrale nicht unter $\varkappa$ herabgehen, andererseits ist

$$8)\qquad F_{n-\varkappa}=P_{n-\varkappa}Q+Q_{n-\varkappa}P$$

und der Ausdruck

$$F_{n-\varkappa}=\mathfrak{D}_{n-\varkappa,0}\,y^{(\varkappa)}+\mathfrak{D}_{n-\varkappa,1}\,y^{(\varkappa-1)}+\ldots+\mathfrak{D}_{n-\varkappa,\varkappa}\,y$$

wegen $\mathfrak{D}_{n-\varkappa,0}=0$ von niederer als der $\varkappa^{\text{ten}}$ Ordnung; der zweite Theil der Gleichung 8) verschwindet für die der Annahme nach vorhandenen $\varkappa$ gemeinsamen Integrale von $P(y)=0$ und $Q(y)=0$, daher auch der erste Theil. Dieser ist jedoch, wie eben bemerkt, von niederer als der $\varkappa^{\text{ten}}$ Ordnung, muss also identisch verschwinden, woraus folgt:

$$\mathfrak{D}_{n-\varkappa,0}=0,\quad \mathfrak{D}_{n-\varkappa,1}=0,\quad \ldots,\quad \mathfrak{D}_{n-\varkappa,\varkappa}=0$$

und somit diejenigen Bedingungen erfüllt sind, welche der Satz I für das Vorhandensein von wenigstens $\varkappa+1$ gemeinsamen Integralen als nothwendig und hinreichend vorschreibt.

Hiernach haben $P(y)=0$ und $Q(y)=0$ wenigstens $\varkappa+1$ Integrale gemeinsam; damit sie nicht noch eines mehr haben, muss gleichfalls nach Satz I

$$\mathfrak{D}_{n-\varkappa-1,0}\neq 0$$

sein.

Gilt demnach der Satz III für den Fall von $\varkappa$ gemeinsamen Integralen, so gilt er auch noch für $\varkappa+1$ derselben. Nun gilt er für $\varkappa=1$, daher auch für $\varkappa=2$, und allgemein.

Was das Bildungsgesetz der im Satze III auftretenden Determinanten betrifft, so ist Folgendes zu bemerken:

Die Determinante $\mathfrak{D}_{n,0}$, deren Verschwinden anzeigt, dass den Gleichungen $P(y)=0$ und $Q(y)=0$ überhaupt gemeinsame Integrale zukommen, ist mit der Determinante $d$ des Gleichungssystems 2) identisch. Die Determinante $\mathfrak{D}_{n-1,0}$ geht aus $\mathfrak{D}_{n,0}$ hervor, indem man in jeder der beiden Gruppen, aus denen das System 2) besteht, die erste Gleichung unterdrückt — wodurch die erste Colonne von $\mathfrak{D}_{n,0}$ ausfällt —, und hierauf noch die letzte Colonne in $\mathfrak{D}_{n,0}$ weglässt. Verfährt man hinsichtlich $\mathfrak{D}_{n-1,0}$ in ähnlicher Weise, wie zuerst hinsichtlich $\mathfrak{D}_{n,0}$, so wird die Determinante $\mathfrak{D}_{n-2,0}$ gebildet, u. s. f.

Es ist demnach jede dieser Determinanten von einer um zwei Einheiten niedrigeren Ordnung als die unmittelbar vorhergehende.

Ist z. B. $m=3$ und $n=2$, demnach:

$$9)\quad \begin{cases} P(y)=\dfrac{d^3y}{dx^3}+p_1\dfrac{d^2y}{dx^2}+p_2\dfrac{dy}{dx}+p_3y=0 \\ \text{und} \\ Q(y)=\dfrac{d^2y}{dx^2}+q_1\dfrac{dy}{dx}+q_2y=0, \end{cases}$$

so ist

$$\mathfrak{D}_{2,0}=\begin{vmatrix} 1 & q_1 & 2q'_1+q_2 & 2q'_2+q''_1 & q''_2 \\ 0 & 1 & q_1 & q'_1+q_2 & q'_2 \\ 0 & 0 & 1 & q_1 & q_2 \\ 1 & p_1 & p'_1+p_2 & p'_2+p_3 & p'_3 \\ 0 & 1 & p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix}$$

und

$$\mathfrak{D}_{1,0}=\begin{vmatrix} 1 & q_1 & q'_1+q_2 \\ 0 & 1 & q_1 \\ 1 & p_1 & p_2 \end{vmatrix}.$$

Im Falle, dass die obigen zwei Differentialgleichungen zwei linear unabhängige partikuläre Integrale gemeinsam haben, muss

$$10)\quad \mathfrak{D}_{2,0}=0$$

und

$$11)\quad \mathfrak{D}_{1,0}=0$$

sein. Aus der Gleichung 11) ergiebt sich

$$12)\quad p_2=p_1q_1-q_1^2+q'_1+q_2,$$

und wenn für $p_2$ dieser Werth in die Gleichung 10), nachdem zuvor noch die im ersten Theile derselben stehende Determinante $\mathfrak{D}_{2,0}$ ausgerechnet worden, substituirt wird, so erhält man nach gehöriger Reduction die Gleichung

$$13)\quad \mathfrak{D}_{2,0}=(p_3-p_1q_2+q_1q_2-q'_2)^2=0.$$

Es drücken daher die Gleichungen 12) und 13), für welche auch die zwei folgenden:

$$14)\quad p_2-p_1q_1+q_1^2-q'_1-q_2=0,\quad p_3-p_1q_2+q_1q_2-q'_2=0$$

geschrieben werden können, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen aus, damit sämmtliche Integrale der Differentialgleichung

$$Q(y)=\frac{d^2y}{dx^2}+q_1\frac{dy}{dx}+q_2y=0$$

auch der Differentialgleichung

$$P(y)=\frac{d^3y}{dx^3}+p_1\frac{d^2y}{dx^2}+p_2\frac{dy}{dx}+p_3y=0$$

angehören. Sind die Bedingungen 14) erfüllt, so ergiebt sich in der That aus denselben die Beziehung

$$P(y)=\frac{d\,Q(y)}{dx}+(p_1-q_1)\,Q(y).$$

## XI.

# Die Ebene als bewegtes Element.

Von

D. Ing. F. Wittenbauer,

Docent an der k. k. techn. Hochschule in Graz.

Hierzu Taf. VI Fig. 1—6.

Die Lehre der Bewegung pflegt den Punkt als bewegtes Element vorauszusetzen, selbst dann, wenn es sich um rein geometrische Eigenschaften derselben handelt.

Ebenso wie der Punkt, kann jedoch auch die Ebene als bewegtes geometrisches Element betrachtet und auf ihre Bewegung im Raume hin untersucht werden. Insbesondere lassen sich die Begriffe der Geschwindigkeit und Beschleunigung, sowie die aus ihnen folgenden Beziehungen in beiden Fällen vollkommen klar zur Anschauung bringen. Da Punkt und Ebene die einander entsprechenden Elemente des Raumes sind, so steht zu erwarten, dass auch die mechanischen Folgerungen einander dual gegenüberstehen.

Obwohl sich diese Vermuthung thatsächlich bewahrheitet, so erfordert die Ebene dennoch eine ihr eigenthümliche analytische Behandlung, welche in ihren hauptsächlichen Grundzügen im Folgenden gegeben werden soll.

Etwas Aehnliches gilt für die Bewegung eines Strahles in der Ebene und jene des Strahlensystems, bezüglich welcher Untersuchung auf einen bereits gemachten Versuch hingewiesen werden möge.*

1. Die elementare Ortsveränderung einer Ebene im Raume kann nur in einer *Drehung* um eine in ihr liegende Gerade, die *Drehaxe,* bestehen. Bei Voraussetzung einer allgemeinen Bewegung wird in jedem Zeitelemente eine andere Gerade der Ebene als Axe auftreten; alle diese Axen bilden in ihrer Aufeinanderfolge eine abwickelbare Fläche, da jede Lage der Axe die beiden unmittelbar benachbarten Lagen schneiden muss. Durch die Bewegung der Ebene wird also eine Curve erzeugt, die Wendecurve jener Fläche; die aufeinanderfolgenden Lagen der bewegten Ebene werden zu Schmiegungsebenen der erzeugten Curve. Das Resultat dieser Bewegung ist somit dasselbe, wie bei der Bewegung des Punktes; wir wollen deshalb übereinstimmend jene Curve die *Bahn* der Ebene nennen.

* Kinematik des Strahles. Graz 1883.

Beziehen wir nun sofort den elementaren Drehungswinkel $d\sigma$ der Ebene um eine in ihr liegende Gerade auf die während der Drehung verflossene Zeit $dt$, so entsteht nach Analogie mit geläufigen Begriffen jener der *Drehgeschwindigkeit* der Ebene:

$$1)\qquad V = \frac{d\sigma}{dt}.$$

**2.** Im Allgemeinen wird während der Bewegung der Ebene die Drehgeschwindigkeit jederzeit eine andere sein und zwar wird sich sowohl die Grösse als auch die Drehaxe derselben stetig ändern. Diese zweifache Aenderung wird hervorgerufen werden durch das Auftreten einer elementaren Drehgeschwindigkeit $\Gamma dt$ um eine ebenfalls in der Ebene gelegene Axe, welche mit jener der Drehgeschwindigkeit einen Winkel $\alpha$ einschliessen möge. Denn nach dem bekannten Princip der Zusammensetzung von Drehgeschwindigkeiten um sich schneidende Axen werden jene $V$ und $\Gamma dt$ sich zu einer Resultirenden $V'$ (Fig. 1) vereinen, deren Grösse und Axe durch die Diagonale eines Parallelogramms $Ompn$ über jenen beiden als Seiten dargestellt werden.

Wir nennen $\Gamma$ die *Drehbeschleunigung* der Ebene. Der Effect, den sie hervorruft, ist die Verrückung der Drehaxe der Ebene und die Veränderung der Grösse der Drehung. Es bleibt noch zu beleuchten, welcher Theil der Drehbeschleunigung den einen Einfluss und welcher den andern hervorbringt. Dies sind offenbar die Componenten von $\Gamma dt$, senkrecht und parallel zur ursprünglichen Drehgeschwindigkeit, also $pq$ und $mq$; wir schreiben hierfür

$$\Gamma_1 = \frac{mq}{dt} = \Gamma \cos\alpha, \quad \Gamma_2 = \frac{pq}{dt} = \Gamma \sin\alpha.$$

Die erstere dieser Componenten verändert nur die Grösse der Drehgeschwindigkeit, es ist also

$$2)\qquad \Gamma_1 = \frac{dV}{dt}.$$

Die zweite verrückt die Drehaxe um den Winkel $d\tau$; nach dem Princip der Zusammensetzung von Drehgeschwindigkeiten gilt nun die Relation

$$V : \Gamma dt = \sin(\alpha - d\tau) : d\tau$$

oder mit entsprechender Vernachlässigung von Grössen niederer Ordnung

$$\Gamma \sin\alpha = V \cdot \frac{d\tau}{dt}.$$

Construirt man nun den Kreiskegel, dessen Spitze in $O$ liegt und der drei unmittelbar aufeinanderfolgende Lagen der bewegten Ebene berührt, nennt man ferner $2\varrho$ den Winkel seiner Oeffnung, so gilt

$$d\tau = \operatorname{tang}\varrho \,.\, d\sigma,$$

somit mit Hinweis auf Gleichung 1)

$$3)\qquad \Gamma_2 = V^2 .\operatorname{tang}\varrho.$$

Durch Angabe der Beschleunigung $\Gamma$ und eines bestimmten anfänglichen Bewegungszustandes ist die Bewegung der Ebene jederzeit vollkommen bestimmt. Die Lösung des allgemeinen Bewegungsproblems erfordert aber auch hier die analytische Beziehung der Drehgeschwindigkeit, sowie der Drehbeschleunigung der Ebene auf ein als ruhend gedachtes Coordinatensystem.

Wie dies zu geschehen hat, zeigt nachfolgende Untersuchung. Der bessern Uebersicht halber soll die Bewegung der Ebene im Ebenenbündel (entsprechend der ebenen Bewegung des Punktes) vorausgeschickt werden.

## Bewegung der Ebene im Ebenenbündel.

3. Die bewegte Ebene wird stets durch den Mittelpunkt $O$ des Bündels gehen; wir wählen denselben als Schnittpunkt dreier aufeinander senkrechten Coordinatenaxen $\xi$, $\eta$, $\zeta$, bezeichnen die Winkel der Ebene mit denselben durch $\lambda$, $\mu$, $\nu$ und verstehen unter den Coordinaten der Ebene die drei Grössen

$$4) \qquad \xi = \sin\lambda, \quad \eta = \sin\mu, \quad \zeta = \sin\nu.$$

Sie sind nicht unabhängig von einander, sondern genügen jederzeit der Bedingung

$$5) \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1.$$

Wir geben ferner diesen Coordinaten das gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen, je nachdem sich die Coordinatenaxen auf derselben oder auf verschiedenen Seiten der Ebene befinden.

Es sei nun $OG$ (Fig. 2) eine in der Ebene liegende Gerade, um welche die Drehgeschwindigkeit $V = \frac{d\sigma}{dt}$ herrschen möge. Ihre Componenten nach den drei Axen seien

$$V_\xi = V\cos\alpha, \quad V_\eta = V\cos\beta, \quad V_\zeta = V\cos\gamma,$$

worin $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Winkel der Drehaxe $OG$ mit den Coordinatenaxen bezeichnen.

Projicirt man die Coordinatenaxen senkrecht auf die Ebene nach $O\xi'$, $O\eta'$, $O\zeta'$ und bezeichnet die Winkel

$$GO\xi' = a, \quad GO\eta' = b, \quad GO\zeta' = c,$$

vorausgesetzt, dass dieselben in gleicher Richtung gezählt werden; bedenkt ferner, dass die Winkel

$$\xi O\xi' = \lambda, \quad \eta O\eta' = \mu, \quad \zeta O\zeta' = \nu$$

sind, so folgt zunächst aus dem bei $l'$ rechtwinkligen sphärischen Dreiecke $Gll'$

$$6) \qquad \cos\alpha = \cos\lambda . \cos a \quad \text{und ebenso} \quad \cos\beta = \cos\mu . \cos b, \quad \cos\gamma = \cos\nu . \cos c.$$

Betrachtet man ferner die Ebene nach einer unendlich kleinen Verdrehung $d\sigma$ um $OG$, bezeichnet mit $O\xi'_1$ die neue Projection der $O\xi$ auf die Ebene

und beachtet, dass $l'_1 r = d\lambda$ gesetzt werden darf, so folgt aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke $G r l'_1$

$$d\sigma . \sin a = d\lambda \text{ und ebenso } d\sigma . \sin b = d\mu, \quad d\sigma . \sin c = d\nu.$$

Werden diese Gleichungen quadrirt, der Reihe nach mit $\cos^2\lambda$, $\cos^2\mu$, $\cos^2\nu$ multiplicirt und addirt, so ergeben sie

$$d\sigma^2[\sin^2 a \cos^2\lambda + \sin^2 b \cos^2\mu + \sin^2 c \cos^2\nu] = \overline{d \sin\lambda}^2 + \overline{d \sin\mu}^2 + \overline{d \sin\nu}^2;$$

der in der Klammer stehende Ausdruck ergiebt sich nach Gleichung 6) der Einheit gleich und es ist somit mit Hinweis auf die Gleichung 4)

$$d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2$$

oder die Drehgeschwindigkeit der Bewegung

$$\text{7)} \qquad V^2 = \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2.$$

Um Ausdrücke für die Componenten $V_\xi$, $V_\eta$, $V_\zeta$ der Drehgeschwindigkeit nach den Coordinatenaxen zu erhalten, beachten wir die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} \cos\alpha . \cos\alpha + \cos\beta . \cos\beta + \cos\gamma . \cos\gamma &= 1, \\ \xi . \cos\alpha + \eta . \cos\beta + \zeta . \cos\gamma &= 0, \\ d\xi . \cos\alpha + d\eta . \cos\beta + d\zeta . \cos\gamma &= 0, \end{aligned}$$

von denen die erste eine bekannte Beziehung ausspricht, während die zweite und dritte aus dem Grunde gilt, weil die Drehaxe sowohl vor als nach der Drehung $d\sigma$ der Ebene angehört, also zu deren Perpendikel senkrecht bleibt. Bezeichnet $R$ die Determinante der Coefficienten von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ in obigen drei Gleichungen, so folgt durch Auflösung

$$\text{8)} \quad R\cos\alpha = \eta\, d\zeta - \zeta\, d\eta, \quad R\cos\beta = \zeta\, d\xi - \xi\, d\zeta, \quad R\cos\gamma = \xi\, d\eta - \eta\, d\xi.$$

Diese Gleichungen, quadrirt und addirt, ergeben mit Benutzung der Relation 5)

$$R^2 = \overline{d\xi}^2 + \overline{d\eta}^2 + \overline{d\zeta}^2 - (\xi\, d\xi + \eta\, d\eta + \zeta\, d\zeta)^2$$

und, da der Ausdruck in den Klammern verschwindet,

$$R^2 = d\sigma^2.$$

Wir wählen $R = -d\sigma$, wodurch die Gleichungen 8) in folgende übergehen:

$$\text{9)} \quad V_\xi = -\eta\frac{d\zeta}{dt} + \zeta\frac{d\eta}{dt}, \quad V_\eta = -\zeta\frac{d\xi}{dt} + \xi\frac{d\zeta}{dt}, \quad V_\zeta = -\xi\frac{d\eta}{dt} + \eta\frac{d\xi}{dt}.$$

Die Vorzeichen dieser Ausdrücke sind richtig unter der Voraussetzung, dass die Drehungsrichtung entgegen der Uhrzeigerbewegung als die positive bezeichnet wird.

**4.** Da sich die Drehgeschwindigkeit und Drehbeschleunigung einer Ebene in gleicher Weise combiniren, wie die Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Punktes, so werden auch für die Componenten der Beschleunigung $\Gamma$ nach den drei Axen analoge Resultate gelten wie dort, nämlich:

$$\Gamma_\xi = \frac{dV_\xi}{dt}, \quad \Gamma_\eta = \frac{dV_\eta}{dt}, \quad \Gamma_\zeta = \frac{dV_\zeta}{dt}$$

oder mit Einführung der Gleichungen 9)

$$10) \quad \Gamma_\xi = -\eta \frac{d^2\zeta}{dt^2} + \zeta \frac{d^2\eta}{dt^2}, \quad \Gamma_\eta = -\zeta \frac{d^2\xi}{dt^2} + \xi \frac{d^2\zeta}{dt^2}, \quad \Gamma_\zeta = -\xi \frac{d^2\eta}{dt^2} + \eta \frac{d^2\xi}{dt^2}.$$

**5.** Es soll noch auf die eigentliche Bedeutung der Componenten der Drehgeschwindigkeit und Drehbeschleunigung hingewiesen werden. Projicirt man die drei Componenten $V_\xi$, $V_\eta$, $V_\zeta$ auf die bewegte Ebene, so erhält man drei neue Drehgeschwindigkeiten $V_\xi \cos\lambda$, $V_\eta \cos\mu$, $V_\zeta \cos\nu$ um die Axen $O\xi'$, $O\eta'$, $O\zeta'$, welche in der Ebene liegen. Projicirt man hingegen $V_\xi$, $V_\eta$, $V_\zeta$ auf eine Gerade senkrecht zur bewegten Ebene, so ist die Summe dieser Projectionen

$$11) \qquad \xi V_\xi + \eta V_\eta + \zeta V_\zeta = 0,$$

wie sich aus 9) unmittelbar ergiebt.

Die Drehung der Ebene um $OG$ wird also eigentlich durch drei andere Drehungen ersetzt, welche um die Projectionen der Coordinatenaxen auf die Ebene stattfinden.

Gleiches gilt von der Drehbeschleunigung der Ebene. Auch diese kann jederzeit ersetzt werden durch drei andere Drehbeschleunigungen, die man der Grösse und Axe nach erhält, wenn man die Componenten $\Gamma_\xi$, $\Gamma_\eta$, $\Gamma_\zeta$ auf die Ebene projicirt.

Die Projectionen dieser Componenten senkrecht zur Ebene ergeben als Summe

$$12) \qquad \xi \Gamma_\xi + \eta \Gamma_\eta + \zeta \Gamma_\zeta = 0,$$

wie aus den Gleichungen 10) zu entnehmen ist.

**6.** Multiplicirt man von den letztgenannten Gleichungen die erste mit $\eta$, die zweite mit $\xi$ und subtrahirt dieselben, so folgt

$$\xi \Gamma_\eta - \eta \Gamma_\xi = \frac{d^2\zeta}{d^2t}(\xi^2 + \eta^2) - \zeta\left(\xi \frac{d^2\xi}{dt^2} + \eta \frac{d^2\eta}{dt^2}\right)$$

und da

$$\xi^2 + \eta^2 = 1 - \zeta^2,$$

so ist auch

$$\xi \Gamma_\eta - \eta \Gamma_\xi = \frac{d^2\zeta}{dt^2} - \zeta\left(\xi \frac{d^2\xi}{dt^2} + \eta \frac{d^2\eta}{dt^2} + \zeta \frac{d^2\zeta}{dt^2}\right)$$

und analog

$$\eta \Gamma_\zeta - \zeta \Gamma_\eta = \frac{d^2\xi}{dt^2} - \xi\left(\xi \frac{d^2\xi}{dt^2} + \eta \frac{d^2\eta}{dt^2} + \zeta \frac{d^2\zeta}{dt^2}\right),$$

$$\zeta \Gamma_\xi - \xi \Gamma_\zeta = \frac{d^2\eta}{dt^2} - \eta\left(\xi \frac{d^2\xi}{dt^2} + \eta \frac{d^2\eta}{dt^2} + \zeta \frac{d^2\zeta}{dt^2}\right).$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit $d\zeta$, $d\xi$, $d\eta$ und addirt sie, so erhält man mit Berücksichtigung der Relation

$$\xi\, d\xi + \eta\, d\eta + \zeta\, d\zeta = 0$$

die Gleichung

$$d\xi \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2} + d\eta \cdot \frac{d^2\eta}{dt^2} + d\zeta \cdot \frac{d^2\zeta}{dt^2} = (\eta \Gamma_\zeta - \zeta \Gamma_\eta)\, d\xi + (\zeta \Gamma_\xi - \xi \Gamma_\zeta)\, d\eta + (\xi \Gamma_\eta - \eta \Gamma_\xi)\, d\zeta.$$

Nun ist nach Gleichung 7)

$$dV^2 = 2\left(\frac{d\xi}{dt} d\frac{d\xi}{dt} + \frac{d\eta}{dt} d\frac{d\eta}{dt} + \frac{d\zeta}{dt} d\frac{d\zeta}{dt}\right);$$

es folgt somit

$$13)\quad \tfrac{1}{2} dV^2 = (\eta \Gamma_\zeta - \zeta \Gamma_\eta)\, d\xi + (\zeta \Gamma_\xi - \xi \Gamma_\zeta)\, d\eta + (\xi \Gamma_\eta - \eta \Gamma_\xi)\, d\zeta,$$

eine Beziehung, welche für Bewegungsprobleme der Ebene von ähnlichem Nutzen ist, wie das Princip der lebendigen Kraft für die Bewegung des Punktes.

Die bis hierher abgeleiteten Relationen sollen zunächst in einigen speciellen Fällen Anwendung finden.

**7.** Die Beschleunigung der Ebene bleibe constant der Grösse und Axe nach; es seien also

$$\Gamma_\xi = a, \quad \Gamma_\eta = b, \quad \Gamma_\zeta = c.$$

Die Gleichung 12) liefert dann

$$a\xi + b\eta + c\zeta = 0,$$

d. i. die Gleichung einer *Geraden*. Die Ebene beschreibt somit bei ihrer Bewegung einen *Ebenenbüschel*, und zwar gleichförmig beschleunigt.

**8.** Die bewegte Ebene werde in jedem Augenblicke um zwei Axen gleichzeitig beschleunigt und zwar um ihre Schnittlinien $OB$ und $OC$ mit den beiden Coordinatenebenen $\xi O \eta$ und $\xi O \zeta$. Die Grösse jeder der Beschleunigungen sei proportional dem Sinus des Neigungswinkels der bewegten mit der betreffenden Coordinatenebene. Man untersuche die Bewegung der Ebene.

Bezeichnen wir mit $\varphi$ und $\psi$ (Fig. 3) die letzterwähnten Neigungswinkel, im Sinne der Drehbeschleunigung gezählt, so sind zunächst die gegebenen Beschleunigungen um die Axen $OB$, $OC$

$$\Gamma_B = b \sin\varphi, \quad \Gamma_C = c \sin\psi$$

und sonach die Componenten der gesammten Beschleunigung

$$\Gamma_\xi = \Gamma_B \cos\beta + \Gamma_C \cos\gamma, \quad \Gamma_\eta = \Gamma_B \sin\beta, \quad \Gamma_\zeta = \Gamma_C \sin\gamma,$$

wenn man die Winkel

$$\xi OB = \beta, \quad \xi OC = \gamma$$

bezeichnet. Beschreibt man nun aus $O$ eine Kugel, welche das sphärische Dreieck $ABC$ ausschneidet, und fällt aus $A$ das Bogenperpendikel $AA'$ auf die Basis $BC$, so folgt aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke $ABA'$

$$\sin\beta . \sin\varphi = \sin\lambda = \xi$$

und ebenso aus $ACA'$

$$\sin\gamma . \sin\psi = \sin\lambda = \xi.$$

Analog wird man erhalten, wenn man statt $O\xi$ die Axen $O\eta$ und $O\zeta$ auf die Ebene projicirt und die durch sphärischen Schnitt entstehenden Dreiecke untersucht,

$$\cos\beta . \sin\varphi = -\sin\mu = -\eta, \quad \cos\gamma . \sin\psi = -\sin\nu = -\zeta,$$

daher wird nach Substitution

$$14) \qquad \Gamma_\xi = -(b\eta + c\zeta), \quad \Gamma_\eta = b\xi, \quad \Gamma_\zeta = c\xi,$$

welche Ausdrücke wieder der Bedingung 12)

$$\xi\Gamma_\xi + \eta\Gamma_\eta + \zeta\Gamma_\zeta = 0$$

genügen müssen.

Um die Geschwindigkeit der Drehbewegung zu ermitteln, benutzen wir Gleichung 13); dieselbe nimmt nach Substitution obiger Ausdrücke für die Componenten die Form an

$$\tfrac{1}{2} d V^2 = (c\eta - b\zeta)(\xi d\xi + \eta d\eta + \zeta d\zeta) - c\,d\eta + b\,d\zeta$$

oder, da der zweite Klammerausdruck verschwindet,

$$\tfrac{1}{2} d V^2 = -c\,d\eta + b\,d\zeta,$$

woraus nach Integration

$$V^2 = 2(b\zeta - c\eta) + k.$$

Um die Gleichung der Bahn zu finden, bemerken wir, dass

$$c\Gamma_\eta = b\Gamma_\zeta \text{ oder } c.dV_\eta = b.dV_\zeta,$$

woraus

$$cV_\eta = bV_\zeta.$$

Die Integrationsconstante verschwindet, wenn wir annehmen, dass die anfängliche Geschwindigkeit der Ebene null ist. Mit Benützung der Gleichungen 9) wird somit

$$c(\xi d\zeta - \zeta d\xi) = b(\eta d\xi - \xi d\eta)$$

oder

$$\frac{d\xi}{\xi} = \frac{b\,d\eta + c\,d\zeta}{b\eta + c\zeta},$$

woraus durch Integration

$$a\xi + b\eta + c\zeta = 0,$$

d. i. die Gleichung einer *Geraden*, folgt. Die Ebene bewegt sich also wieder in einem Ebenenbüschel; die Axe desselben besitzt die Richtungscosinusse

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Mit Benutzung obiger Gleichung des Ebenenbüschels gehen die Gleichungen 14) jetzt über in

$$\Gamma_\xi = a\xi, \quad \Gamma_\zeta = b\xi, \quad \Gamma_\eta = c\xi$$

und es ist somit die Drehbeschleunigung der Ebene

$$\Gamma = \xi\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Sie verschwindet, wenn die Ebene bei ihrer Drehung die $O\xi$-Axe passirt.

**9.** Die Bewegung einer Ebene entstehe dadurch, dass sich eine um die $O\xi$-Axe wirkende Drehgeschwindigkeit von constanter Grösse $a$ in jedem Moment auf die Ebene projicirt; die Grösse und Richtung dieser Projection werde zur Drehgeschwindigkeit der Ebene. Man untersuche den Beschleunigungszustand und die Bahn dieser Ebene.

Zunächst ist

$$V = a\cos\lambda$$

und

15) $$V_\xi = V\cos\lambda = a\cos^2\lambda = a(1-\xi^2).$$

Benützt man nun die bekannten Beziehungen

$$V_\xi^2 + V_\eta^2 + V_\zeta^2 = V^2, \quad \xi V_\xi + \eta V_\eta + \zeta V_\zeta = 0,$$

so findet sich

$$V_\eta = -a\xi\eta, \quad V_\zeta = -a\xi\zeta.$$

Es folgt also

$$\zeta V_\eta = \eta V_\zeta$$

und nach Einführung der Werthe aus 9)

$$\zeta(\xi\,d\zeta - \zeta\,d\xi) = \eta(\eta\,d\xi - \xi\,d\eta).$$

Es ergiebt sich hieraus

$$d\xi = \xi(\xi\,d\xi + \eta\,d\eta + \zeta\,d\zeta) = 0 \text{ und } \xi = c = const.$$

Die Ebene bewegt sich somit längs einer Kreiskegelfläche um die $O\xi$ als Axe.

Schreibt man Gleichung 15) in der Form

$$-\eta\frac{d\zeta}{dt} + \zeta\frac{d\eta}{dt} = a(1-c^2)$$

und bemerkt, dass

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad \xi\,d\xi + \eta\,d\eta + \zeta\,d\zeta = 0$$

oder im gegenwärtigen Falle

$$\eta^2 + \zeta^2 = 1 - c^2, \quad \eta\,d\eta + \zeta\,d\zeta = 0$$

ist, so folgt

$$\frac{d\eta}{dt} = a\zeta, \quad \frac{d\zeta}{dt} = -a\eta,$$

woraus nach Integration folgt

$$\eta = \sqrt{1-c^2}\sin(at+k), \quad \zeta = \sqrt{1-c^2}\cos(at+k).$$

Hierin bezeichnet $k$ eine Constante.

Die Componenten der Beschleunigung ergeben sich jetzt folgendermassen:

$$\Gamma_\xi = 0, \quad \Gamma_\eta = -a^2c\zeta, \quad \Gamma_\zeta = a^2c\eta,$$

woraus die Drehbeschleunigung selbst

$$\Gamma = a^2c\sqrt{1-c^2} = V^2\,tang\,\lambda.$$

Sie bleibt also der Grösse nach constant; ihre Axe liegt stets in der Coordinatenebene $\eta O\zeta$, sie ist der Schnitt der letzteren mit der bewegten Ebene und dreht sich während der Bewegung der Ebene mit constanter Winkelgeschwindigkeit um den Punkt $O$.

**10.** Für gewisse Bewegungen der Ebene erscheint es vortheilhaft, der analytischen Untersuchung eine Art Polarcoordinatensystem zu Grunde zu legen. Wir nehmen zu diesem Zwecke eine fixe Ebene, die *Grundebene*, an und in dieser eine Axe $OA$ mit dem Pole $O$, welch' letzterer zugleich der Scheitel des Ebenenbündels ist, in welchem sich die Ebene bewegt. Es bezeichne $OS$ den Schnitt der letztern mit der Grundebene, $\psi$ den Winkel $AOS$, von $OA$ aus entgegen dem Uhrzeiger gezählt, $\varphi$ den Neigungswinkel der beiden Ebenen, von der Grundebene aus gemessen, und zwar positiv

oder negativ, je nachdem die Drehung der Grundebene in die bewegte Ebene um $OS$, von $S$ aus gesehen, entgegen oder mit dem Uhrzeiger geschehen müsste. Wir nennen die Winkel $\varphi$ und $\psi$ die Coordinaten der Ebene im Ebenenbündel.

Beschreibt nun die Ebene im Raume eine unendlich kleine Drehung $d\sigma$ um eine in ihr liegende Axe $OG$ (Fig. 4), so lässt sich dieselbe nach dem bekannten Princip ersetzen durch zwei andere unendlich kleine Drehungen $d\varphi$ und $d\omega$ um die Axen $OS$ und $OR$, welche ebenfalls in der Ebene liegen und aufeinander senkrecht stehen sollen, so zwar, dass die Relation gilt

$$d\sigma^2 = d\varphi^2 + d\omega^2.$$

Diese beiden Drehungen werden die Coordinaten der Ebene verändern, und zwar die Drehung $d\varphi$ die Coordinate $\varphi$, $d\omega$ die Coordinate $\psi$; bezüglich letzterer ist leicht ersichtlich, dass

$$16)\qquad d\omega = \sin\varphi \, . \, d\psi,$$

sobald man untersucht, welcher Veränderung $\psi$ unterliegt, wenn die Ebene um $OR$ gedreht wird. Man hat also

$$d\sigma^2 = d\varphi^2 + \sin^2\varphi \, d\psi^2$$

und wenn man durch

$$17)\qquad V = \frac{d\sigma}{dt}, \quad V_\varphi = \frac{d\varphi}{dt}, \quad V_\omega = \frac{d\omega}{dt}$$

die Drehgeschwindigkeit und ihre Componenten nach $OS$ und $OR$ bezeichnet:

$$18)\qquad V_\varphi = \frac{\varphi}{dt}, \quad V_\omega = \sin\varphi \frac{d\psi}{dt}, \quad V^2 = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \sin^2\varphi \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2.$$

Bei fortgesetzter Drehung der Ebene um $OG$ werden $V_\varphi$ und $V_\omega$ gewisse Aenderungen erleiden, selbst wenn $\varphi$ constant bleibt; dies rührt von der Veränderung des Winkels $\alpha$, welchen die Axe der Drehgeschwindigkeit $OG$ mit $OR$ einschliesst, her. Es ist nämlich

$$V_\varphi = V . \sin\alpha, \quad V_\omega = V . \cos\alpha,$$

somit

$$\partial V_\varphi = V\cos\alpha . \partial\alpha = V_\omega . \partial\alpha, \quad \partial V_\omega = - V\sin\alpha . \partial\alpha = - V_\varphi . \partial\alpha.$$

Nun lehrt eine einfache Betrachtung, dass

$$\partial\alpha = \cos\varphi . d\psi,$$

es ergiebt sich also mit Hinweis auf die Gleichungen 18)

$$\partial V_\varphi = \sin\varphi \cos\varphi \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 dt, \quad \partial V_\omega = - \cos\varphi \frac{d\varphi}{dt}\frac{d\psi}{dt},$$

vorausgesetzt, dass sich die Drehgeschwindigkeit $V$ nicht ändert.

Tritt nun noch eine Drehbeschleunigung $\Gamma$ um eine Axe $OB$ hinzu, welche mit $OR$ einen Winkel $\beta$ einschliessen möge, so werden die Geschwindigkeitscomponenten $V_\varphi$ und $V_\omega$ neuerdings verändert und zwar um die Beträge

$$\Gamma \sin\beta \, dt = \Gamma_\varphi . dt, \quad \Gamma \cos\beta \, dt = \Gamma_\omega . dt,$$

so zwar, dass die Gesammtveränderungen jetzt betragen werden

$$dV_\varphi = \Gamma_\varphi\, dt + \sin\varphi \cos\varphi \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 dt, \quad dV_\omega = \Gamma_\omega\, dt - \cos\varphi \frac{d\varphi}{dt}\frac{d\psi}{dt} dt,$$

woraus sich mit Beziehung auf die Gleichungen 16) und 17) ergiebt

$$\Gamma_\varphi = \frac{d^2\varphi}{dt^2} - \operatorname{cotang}\varphi \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2, \quad \Gamma_\omega = \frac{d^2\omega}{dt^2} + \operatorname{cotang}\varphi \frac{d\varphi}{dt}\frac{d\omega}{dt}$$

oder nach Einführung des Winkels $\psi$

$$19)\quad \begin{cases} \Gamma_\varphi = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} - \sin\varphi\cos\varphi\left(\dfrac{d\psi}{dt}\right)^2, \\ \Gamma_\omega = \dfrac{d^2\psi}{dt^2}\sin\varphi + 2\cos\varphi\dfrac{d\varphi}{dt}\dfrac{d\psi}{dt}. \end{cases}$$

Man dürfte den analogen Bau dieser Formeln mit jenen für die Beschleunigungscomponenten eines Punktes in Polarcoordinaten sofort erkennen.

**11.** Bildet man mit Hilfe obiger Formeln den Ausdruck

$$\Gamma_\varphi\, d\varphi + \Gamma_\omega \sin\varphi . d\psi,$$

so findet man hierfür

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} d\varphi + \sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 d\varphi + \sin^2\varphi \frac{d^2\psi}{dt^2} d\psi$$

und dies ist identisch mit $\frac{1}{2} d V^2$, wenn man nach 18)

$$V^2 = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \sin^2\varphi\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2$$

berücksichtigt. Es ist also auch

$$20)\quad V^2 = 2\int(\Gamma_\varphi\, d\varphi + \Gamma_\omega \sin\varphi\, d\psi).$$

**12.** Die soeben abgeleiteten Formeln gestatten eine besonders passende Anwendung in dem Falle, wenn die bewegte Ebene jederzeit um ihre Schnittlinie mit einer festen Ebene beschleunigt wird, d. h. wenn sämmtliche Beschleunigungsaxen in einer Ebene liegen. Wählt man diese letztere zur Grundebene eines Coordinatensystems von eben behandelter Art, so bleibt während der Bewegung

$$\Gamma_\omega = \frac{1}{\sin\varphi}\frac{d}{dt}\left(\sin^2\varphi\frac{d\psi}{dt}\right) = 0,$$

woraus unmittelbar folgt

$$21)\quad \sin^2\varphi\frac{d\psi}{dt} = c = const.$$

oder mit Beziehung auf Gleichung 18)

$$V_\omega . \sin\varphi = c,$$

d. h.: die Projection der Drehgeschwindigkeit $V$ auf eine Gerade senkrecht zur Grundebene bleibt während der Bewegung constant. Diese Gattung von Bewegungen der Ebene bildet eine Analogie zu der Centralbewegung des Punktes.

**13.** Ein specielles Interesse hat in der erwähnten Gruppe von Bewegungen jene, bei welcher die Ebene verkehrt proportional dem Quadrat

des Sinus ihres Neigungswinkels mit der Grundebene beschleunigt wird. Hier sei also

$$\Gamma_\varphi = \frac{a}{sin^2 \varphi}, \quad \Gamma_\omega = 0.$$

In diesem Falle liefert Gleichung 20) unmittelbar die Drehgeschwindigkeit der Ebene:

$$V^2 = b - 2a \cot g \varphi, \tag{22}$$

worin $b$ die aus dem Anfangszustande der Bewegung zu bestimmende Constante

$$b = V_0^2 + 2a \cot g \varphi_0$$

bezeichnet. Beachtet man nun, dass nach den Gleichungen 18) und 21)

$$V^2 = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{c^2}{sin^2 \varphi},$$

so ergiebt sich durch Combination mit Gleichung 22)

$$dt = \frac{sin \varphi . d\varphi}{\sqrt{b \, sin^2 \varphi - 2a \, sin \varphi \cos \varphi - c^2}}.$$

Multiplicirt man diese Differentialgleichung mit der folgenden:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{c}{sin^2 \varphi},$$

so erhält man in

$$d\psi = \frac{c \, d\varphi}{sin \varphi \sqrt{b \, sin^2 \varphi - 2a \, sin \varphi \cos \varphi - c^2}}$$

die Differentialgleichung der Bahn der Ebene, welche nach Integration die Form annimmt:

$$const. - \psi = arc sin \frac{a + c^2 \cot g \varphi}{\sqrt{a^2 + bc^2 - c^4}}. \tag{23}$$

Wir wählen nun die Anfangslage der Ebene derart, dass dieselbe mit der Grundebene den kleinsten Winkel $\varphi = \varphi_0$ einschliesst, und verlegen sodann in ihre Spur auf der Grundebene die Axe $OA$; es ist sodann der Anfangszustand der Ebene gekennzeichnet durch

$$\varphi = \varphi_0, \quad \psi = 0, \quad \frac{d\varphi_0}{dt} = 0, \quad V_0 = \frac{c}{sin \varphi_0}.$$

Ferner ist jetzt

$$b = \frac{c^2}{sin^2 \varphi_0} + 2a \cot g \varphi_0 \tag{24}$$

und somit

$$a^2 + bc^2 - c^4 = (a + c^2 \cot g \varphi_0)^2.$$

Unter Berücksichtigung dieser Vereinfachungen nimmt die Integrationsconstante in 23) den Werth $\frac{\pi}{2}$ an und wir können somit der Gleichung der *Bahn der Ebene* die Form geben:

$$\cos \psi = \frac{a + c^2 \cot g \varphi}{a + c^2 \cot g \varphi_0}. \tag{25}$$

Diese Gleichung gehört einer Kegelfläche zweiter Classe an, welche die Ebene bei ihrer Bewegung umhüllt. Bemerkenswerth ist die Lage dieser Kegelfläche; es ist nämlich eine ihrer Schaaren von Kreisschnittsebenen zur Grundebene parallel, wie eine einfache Untersuchung lehrt.

Um eine Beziehung zwischen der Bahn der Ebene und der aufgewendeten Zeit zu ermitteln, schreiben wir Gleichung 25) in der Form

$$26)\qquad A\cos\psi - a = c^2 \operatorname{cotg}\varphi,$$

worin

$$A = a + c^2 \operatorname{cotg}\varphi_0$$

bezeichnet, und beachten, dass

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{c}{\sin^2\varphi}.$$

Es wird sich dann Gleichung 26) durch Elimination von $\varphi$ in der Form schreiben lassen:

$$dt = \frac{c^3\,d\psi}{c^4 + (A\cos\psi - a)^2},$$

welche mittels der Substitutionen

$$27)\qquad \cos\alpha = -\frac{c^2 i + a}{A}, \quad \cos\beta = \frac{c^2 i - a}{A},$$

$$i = \sqrt{-1},$$

übergeführt werden kann in

$$dt = \frac{c}{2Ai}\left\{\frac{1}{\cos\psi + \cos\alpha} - \frac{1}{\cos\psi + \cos\beta}\right\} d\psi,$$

woraus sich durch Integration ergiebt

$$t = \frac{c}{2Ai}\, l\left\{\left(\frac{\cos\frac{\psi-\alpha}{2}}{\cos\frac{\psi+\alpha}{2}}\right)^{\operatorname{cosec}\alpha}\left(\frac{\cos\frac{\psi+\beta}{2}}{\cos\frac{\psi-\beta}{2}}\right)^{\operatorname{cosec}\beta}\right\}.$$

Hierbei verschwindet die Integrationsconstante unter den für den Anfangszustand gemachten Voraussetzungen und wurde ferner

$$l(+1) = 0$$

gesetzt. Die Zeit eines vollen Umlaufs der Ebene an der Kegelfläche ergiebt sich hieraus für $\psi = 2\pi$ mit

$$T = \frac{c}{2Ai}\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right) l(+1).$$

Setzt man hierin

$$k = \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} \quad \text{und} \quad l(+1) = 2\pi i,$$

d. i. den nach 0 folgenden Werth, so wird

$$T = \frac{ck\pi}{A}.$$

$k$ ist eine reelle Constante, man findet für sie mittels der Substitutionen 27)

$$k = \sqrt{2}\,\frac{A}{c}\,\frac{\sqrt{b + \sqrt{b^2 + 4a^2}}}{\sqrt{b^2 + 4a^2}}$$

und es wird demnach die Umlaufszeit

$$28)\qquad T=\pi\sqrt{2}\frac{\sqrt{b+\sqrt{b^2+4a^2}}}{\sqrt{b^2+4a^2}}.$$

Um die kleinste Oeffnung $2\omega$ der Kegelfläche zu erhalten, deren Gleichung in 25) gegeben ist, ermitteln wir aus letzterer jene Werthe $\varphi=\varphi_0$ und $\varphi=\varphi_1$, für welche $\psi=0$ und $\psi=\pi$, oder kürzer: für welche $\frac{d\varphi}{dt}=0$ ist; es wird für dieselben die Beziehung gelten

$$c^2 \, cotg^2 \varphi + 2a \, cotg \varphi - b + c^2 = 0$$

oder auch

$$29)\qquad cotg\,\varphi_0 + cotg\,\varphi_1 = -\frac{2a}{c^2},$$

$$30)\qquad cotg\,\varphi_0 . cotg\,\varphi_1 = 1-\frac{b}{c^2}.$$

Es ist nun

$$\sin 2\omega = \sin(\varphi_0+\varphi_1)$$

und da nach 29)

$$\frac{\sin(\varphi_0+\varphi_1)}{\sin\varphi_0 . \sin\varphi_1} = -\frac{2a}{c^2},$$

sowie nach 30)

$$\sin\varphi_0 . \sin\varphi_1 = \frac{c^2 \sin\varphi_0 \cos\varphi_0}{\sqrt{c^4-(2bc^2-b^2)\sin^2\varphi_0}},$$

so ergiebt sich mit Benutzung der Relation 24)

$$\sin 2\omega = \frac{-2a}{\sqrt{b^2+4a^2}}$$

und daher

$$cotg\,2\omega = -\frac{b}{2a}.$$

Mit Hilfe dieser Beziehung nimmt jetzt Gleichung 28) die Form an

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{-a}}\sqrt{\sin\omega . \cos^3\omega}.$$

Besitzt die Ebene im Beginn ihrer Bewegung eine andere Neigung $\varphi_0$ gegen dieselbe Grundebene, so wird auch die Kegelfläche, welche jene umhüllt, und die Umlaufszeit eine andere werden; es gilt für letztere

$$T_1=\frac{2\pi}{\sqrt{-a}}\sqrt{\sin\omega_1 . \cos^3\omega_1}$$

und es besteht für die beiden Umlaufszeiten das Verhältniss

$$\frac{T^2}{T_1^2}=\frac{\sin\omega . \cos^3\omega}{\sin\omega_1 . \cos^3\omega_1}.$$

Das hier behandelte Beispiel, eine Analogie zu der Centralbewegung des Punktes nach dem Anziehungsgesetze $\gamma=\frac{a}{r^2}$, lässt die Dualität der Bewegung des Punktes und der Ebene sehr deutlich erkennen.*

* Vergl.: Die Linearbewegung des Strahles a. a. O. S. 53.

## Bewegung der Ebene im Raume.

**14.** Die allgemeine Bewegung einer Ebene im Raume, deren Grundzüge in der Einleitung bereits gegeben wurden, kann behufs ihrer analytischen Einkleidung stets auf zwei einfache Bewegungen zurückgeführt werden, nämlich auf:

1. die Bewegung der Ebene im Ebenenbündel,
2. die parallele Verschiebung oder Translation der Ebene.

Führt man durch einen beliebigen Punkt $O$ des Raumes eine Parallele zu der bewegten Ebene und ebenso zu der in letzterer gelegenen Geschwindigkeits- resp. Beschleunigungsaxe, und überträgt die Grössen der Drehgeschwindigkeit und Drehbeschleunigung jederzeit ungeändert auf die neue Ebene, so wird sich diese hinsichtlich ihrer Richtung genau so bewegen, wie die Ebene im Raume, d. h. die beiden Ebenen werden während ihrer Bewegung stets parallel bleiben. Wir wollen die so hervorgerufene Bewegung einer Ebene im Ebenenbündel die *nach O reducirte Bewegung der Ebene im Raume* nennen.

**15.** Projicirt man die Geschwindigkeitsaxe der reducirten Bewegung jederzeit orthogonal auf die Ebene im Raume, so wird diese Projection zwar zur Geschwindigkeitsaxe der räumlichen Bewegung parallel sein, jedoch in einem Abstande $p$ von ihr liegen. Um also die Projection der reducirten Drehgeschwindigkeit in die wirkliche der Ebene überzuführen, ist die Hinzufügung einer Translationsgeschwindigkeit nothwendig, welche die Ebene parallel zu sich verschiebt und deren Grösse

$$\mathfrak{B} = V . p \tag{31}$$

ist. Bezeichnen wir nun mit $\varrho$ den Abstand der Ebene im Raume von $O$, so wird für eine unendlich kleine Drehung $d\sigma$ der Ebene um ihre wirkliche Geschwindigkeitsaxe die Beziehung stattfinden

$$d\varrho = p\, d\sigma \tag{32}$$

und mit Berücksichtigung von

$$V = \frac{d\sigma}{dt}$$

erhalten wir jetzt für die Translationsgeschwindigkeit der Ebene

$$\mathfrak{B} = \frac{d\varrho}{dt}. \tag{33}$$

**16.** Aehnliche Ueberlegungen gelten für die Drehbeschleunigung der wirklichen Bewegung und ihre Beziehung zur Drehbeschleunigung der reducirten Bewegung. Projicirt man nämlich die Beschleunigungsaxe der letztern auf die Ebene im Raume, so wird diese Projection zwar parallel sein zur wirklichen Beschleunigungsaxe der Ebene, aber in einem Abstande $q$ von ihr entfernt liegen; um deshalb die Projection der reducirten Dreh-

beschleunigung in die wirkliche zu überführen, ist eine Translationsbeschleunigung senkrecht zur Ebene hinzuzufügen. Die Grösse derselben ist

$$34)\qquad \mathfrak{T} = \Gamma . q,$$

wenn $\Gamma$, wie bisher, die Drehbeschleunigung der Ebene bezeichnet.

Es erübrigt noch, einen analytischen Ausdruck für $q$ zu gewinnen, und hierzu dient folgende Ueberlegung.

Bezeichnen $V$ und $\Gamma$ (Fig. 5) die Geschwindigkeits- resp. Beschleunigungsaxe der Ebene, $V'$ die aus beiden resultirende Geschwindigkeitsaxe, $OR = \varrho$ das aus $O$ auf die Ebene errichtete Perpendikel, $Rr = p$, $Rs = q$, $Rr' = \bar{p}$ die Abstände jener Axen vom Fusspunkte $R$, so gilt zunächst nach einem bekannten Gesetze (analog dem Momentensatze in der Mechanik des Punktes)

$$\Gamma q = \frac{d}{dt}(Vp)$$

oder

$$35)\qquad \Gamma q\, dt = V'\bar{p} - Vp.$$

Nun bleibt aber die Ebene nicht in ihrer Lage, sondern wird sich während des folgenden Zeitelementes um ihre neue Axe $V'$ drehen; es käme hierdurch der Fusspunkt $R$ nach $R'$, während der Fusspunkt $r'$ seinen Ort nicht ändert. Bezeichnen wir jetzt

$$OR' = \varrho', \quad R'r' = p',$$

so gilt offenbar

$$\varrho^2 + \bar{p}^2 = \varrho'^2 + p'^2$$

oder

$$\varrho'^2 - \varrho^2 = \bar{p}^2 - p'^2, \quad d\varrho^2 = (\bar{p} + p')(\bar{p} - p')$$

und mit erlaubter Annäherung

$$\varrho\, d\varrho = p(\bar{p} - p'),$$

woraus

$$\bar{p} = \frac{\varrho}{p}\, d\varrho + p'.$$

Führt man diese Beziehung in Gleichung 35) ein, so wird

$$\Gamma q\, dt = d(Vp) + \frac{V\varrho}{p}\, d\varrho,$$

woraus sich mit Benützung der Gleichungen 31) — 34)

$$\Gamma q = \mathfrak{T}, \quad Vp = \frac{d\varrho}{dt}, \quad p = \frac{d\varrho}{d\sigma}$$

für die Translationsbeschleunigung der Ebene der Ausdruck ergiebt

$$36)\qquad \mathfrak{T} = \frac{d^2\varrho}{dt^2} + \varrho V^2.$$

Es sollen im Folgenden noch einige Anwendungen dieser Theorie gemacht werden.

**17.** Eine Ebene besitze ausser einer anfänglichen Drehgeschwindigkeit $c$ um eine beliebige Axe nur eine Translationsbeschleunigung von constanter Grösse, d. h. es sei

$$\Gamma = 0, \quad \mathfrak{T} = a.$$

Die reducirte Bewegung der Ebene ist dann eine solche im Ebenenbüschel. Wählen wir die Axe des letzteren zur $O\xi$-Axe, so ist

$$\xi = 0 \quad \text{oder} \quad \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

die Gleichung des Ebenenbüschels. Die Drehgeschwindigkeit um die Axe $O\xi$ bleibt constant, d. h.

$$V = V_\xi = c$$

oder auch

$$\zeta\, d\eta - \eta\, d\zeta = c\, dt.$$

Geht man nun von der reducirten Bewegung auf jene im Raume über, so erhält man durch Benützung der Gleichung 36) zunächst

$$a = \frac{d^2\varrho}{dt^2} + \varrho c^2,$$

woraus sich durch einmalige Integration ergiebt

$$\text{37)} \qquad \frac{d\varrho}{dt} = \sqrt{k + 2a\varrho - c^2\varrho^2}.$$

Hierbei ist die Integrationsconstante

$$k = c^2 \varrho_0^2 - 2a\varrho_0,$$

wenn angenommen wird, dass die Ebene im Beginne der Bewegung den Abstand $\varrho_0$ von $O$ besitzt und ihre Drehaxe anfänglich mit der Projection der $O\xi$ zusammenfällt, d. h. wenn $p_0 = 0$ wird.

Die zweite Integration giebt sodann die Beziehung

$$\text{38)} \qquad \sin ct = \frac{\varrho c^2 - a}{\varrho_0 c^2 - a}$$

zwischen der verflossenen Zeit und der Entfernung $\varrho$ vom Ursprunge.

Vergleicht man ferner die oben abgeleitete Relation

$$\zeta\, d\eta - \eta\, d\zeta = c\, dt$$

mit der hier geltenden

$$\eta\, d\eta + \zeta\, d\zeta = 0,$$

so findet man

$$c\, dt = \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} = -\frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

und nach Integration

$$\eta = \sin ct, \quad \zeta = \cos ct,$$

wenn das Coordinatensystem so gelegt wird, dass ausser der $O\xi$- auch noch die $O\eta$-Axe zur Anfangslage der Ebene parallel ist. Durch Vergleich mit 38) erhält man jetzt die Beziehung

$$\eta = \frac{\varrho c^2 - a}{\varrho_0 c^2 - a},$$

welche in Verbindung mit der bereits bekannten

$$\xi = 0$$

die Bahn der Ebene charakterisiren. Man überzeugt sich leicht, dass die Ebene bei ihrer Bewegung eine *Cylinderfläche* umhüllt, deren Erzeugende parallel zur $O\xi$ sind.

Giebt man noch der Gleichung 37) die Form

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{1}{c}\sqrt{(c^2\varrho_0 - a)^2 - (c^2\varrho - a)^2} = \frac{c^2\varrho_0 - a}{c} \cos ct$$

und besitzt die Drehgeschwindigkeit der Ebene die Grösse

$$c = \sqrt{\frac{a}{\varrho_0}},$$

so wird

$$\frac{d\varrho}{dt} = 0$$

oder es bleibt

$$\varrho = 0.$$

Die Ebene umhüllt in diesem Falle eine *Kreiscylinderfläche.*

18. Eine Ebene werde bei ihrer Bewegung durch eine Drehbeschleunigung von constanter Grösse $b$ angeregt, deren Axe stets die $O\xi$-Axe schneidet und zu ihr senkrecht bleibt. Die anfängliche Geschwindigkeitsaxe der Ebene sei zur Beschleunigungsaxe senkrecht. Man untersuche die Bewegung der Ebene.

Reducirt man dieselbe zunächst nach $O$ (Fig. 6), so hat man es mit dem in Art. 9 behandelten Falle zu thun. Die Ebene umhüllt dann bei ihrer Bewegung eine Kreiskegelfläche mit der Axe $O\xi$ und es gelten sowohl für die reducirte als für die wirkliche Bewegung der Ebene die an erwähnter Stelle gefundenen Relationen

$$V = V_0, \quad \Gamma = V_0^2 \operatorname{tang} \lambda,$$

woraus sich in unserem Falle für die halbe Oeffnung $\lambda$ der Kegelfläche ergiebt

$$\operatorname{tang} \lambda = \frac{b}{V_0^2}.$$

Geht man nun dazu über, die Translation der Ebene zu untersuchen, so ist zunächst im gegenwärtigen Falle

$$q = \varrho \operatorname{cotg} \lambda.$$

Beachtet man, dass nach Gleichung 34) und 36)

$$\mathfrak{T} = \frac{d^2\varrho}{dt^2} + \varrho V^2 = q\Gamma$$

und weiter aus der reducirten Bewegung

$$\varrho V^2 = \varrho V_0^2 = q\Gamma$$

gefolgert werden kann, so bleibt

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} = 0,$$

woraus nach Integration und mit Rücksicht auf die Gleichungen 31) und 33) folgt

$$\frac{d\varrho}{dt} = c = V_0 p_0$$

und weiter

$$\varrho = V_0 p_0 t,$$

wenn $p_0$ den constant bleibenden Abstand der Geschwindigkeitsaxe vom Fusspunkte $R$ bezeichnet und angenommen wird, dass die Ebene im Beginn ihrer Bewegung durch $O$ geht. Die Ebene entfernt sich somit gleichförmig vom Pole $O$.

Um noch die Gleichung der Bahn zu ermitteln, benütze man die Beziehung

$$V_\xi = V_0 \cos\lambda = \zeta \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\zeta}{dt}$$

und verbinde sie mit der oben gefundenen

$$d\varrho = V_0 p_0 \, dt.$$

Es ergiebt sich dann

$$d\varrho = \frac{p_0}{\cos\lambda}(\zeta \, d\eta - \eta \, d\zeta),$$

woraus man mit Berücksichtigung von

$$\eta \, d\eta + \zeta \, d\zeta = 0$$

erhält

$$d\varrho = p_0 \cos\lambda \frac{d\eta}{\sqrt{\cos^2\lambda - \eta^2}} = -p_0 \cos\lambda \frac{d\zeta}{\sqrt{\cos^2\lambda - \zeta^2}}.$$

Die Integration ergiebt jetzt

$$\varrho = p_0 \cos\lambda \arcsin\frac{\eta}{\cos\lambda} = p_0 \cos\lambda \arccos\frac{\zeta}{\cos\lambda},$$

wenn für die Anfangslage der Ebene

$$\varrho_0 = 0, \quad \xi_0 = \sin\lambda, \quad \eta_0 = 0, \quad \zeta_0 = \cos\lambda$$

gewählt wird. Mit Hilfe obiger Gleichungen erhält man endlich in

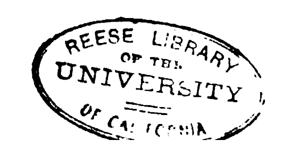
$$\varrho = p_0 \cos\lambda \, \mathrm{arctang}\frac{\eta}{\zeta}, \quad \xi = const.$$

die Gleichung der *Bahn* der Ebene. Es ist dies eine *gemeine Schraubenlinie,* welche die $O\xi$ zur Axe hat.

**19.** Ebenso, wie es hier mit den Grundzügen der Bewegung geschah, könnte eine grosse Anzahl der Probleme aus der Bewegungslehre des Punktes und Punktsystems, soweit sie eben von dem Begriffe der Masse absehen, auf die Bewegung der Ebene übertragen werden und man würde auf diesem Wege zu manchen geometrisch interessanten Resultaten gelangen. So kann z. B. eine Ebene gezwungen werden, bei ihrer Bewegung eine bestimmte vorgeschriebene Curve zu beschreiben oder aber eine bestimmte vorgeschriebene Fläche fortwährend zu berühren, und man wird zu analogen Resultaten gelangen, wie bei der Bewegung eines Punktes auf gegebener Bahn oder auf gegebener Fläche.

Die Bewegungslehre der Ebene, auf den oben skizzirten Grundsätzen erbaut, wird gewiss im Stande sein, die geläufige Vorstellung von der Bewegung im Raume im dualen Sinne zu ergänzen.

---



XII.

# Ueber $n$ simultane Differentialgleichungen der Form

$$\sum_{\mu=1}^{n+m} X_\mu \, dx_\mu = 0.$$


Von

Dr. Otto Biermann,

Docent a. d. deutschen Universität in Prag.


---

Das Pfaff'sche Problem besteht darin, einem gegebenen Differentialausdruck

$$\sum_{\varkappa=1}^{2\varkappa} X_\varkappa \, dx_\varkappa \quad \text{oder} \quad \sum_{\varkappa=1}^{2\varkappa+1} X_\varkappa \, dx_\varkappa,$$

in welchem die $X_\varkappa$ irgend Functionen der Variablen $x_\varkappa$ bedeuten, die Gestalt zu geben

$$\sum_{\varrho=1}^{\varkappa} U_\varrho \, du_\varrho \quad \text{resp.} \quad U\,du + \sum_{\varrho=1}^{\varkappa} U_\varrho \, du_\varrho,$$

wo die Grössen $U_\varrho$, $U$, $u_\varrho$ wieder Functionen der $x_\varkappa$ sind und $u$ eine ganz willkürliche Function der Veränderlichen bezeichnet. Die Integrale der Differentialgleichungen

$$\sum_{\varkappa=1}^{2\varkappa} X_\varkappa \, dx_\varkappa = 0, \quad \sum_{\varkappa=1}^{2\varkappa+1} X_\varkappa \, dx_\varkappa = 0$$

sind

$$u_1 = c_1, \quad u_2 = c_2, \quad \ldots, \quad u_\varkappa = c_\varkappa$$

beziehungsweise

$$u = c, \quad u_1 = c_1, \quad u_2 = c_2, \quad \ldots, \quad u_\varkappa = c_\varkappa,$$

wenn die $c$ beliebige Constante sind.

Wir wollen für ein System von $n$ Differentialausdrücken mit $n+m$ Variabeln

$$X_1^{(1)} dx_1 + X_2^{(1)} dx_2 + \ldots + X_n^{(1)} dx_n + X_{n+1}^{(1)} dx_{n+1} + \ldots + X_{n+m}^{(1)} dx_{n+m},$$
$$X_1^{(2)} dx_2 + X_2^{(2)} dx_2 + \ldots + X_n^{(2)} dx_n + X_{n+1}^{(2)} dx_{n+1} + \ldots + X_{n+m}^{(2)} dx_{n+m},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$X_1^{(n)} dx_1 + X_2^{(n)} dx_2 + \ldots + X_n^{(n)} dx_n + X_{n+1}^{(n)} dx_{n+1} + \ldots + X_{n+m}^{(n)} dx_{n+m}$$

das entsprechende Problem aufstellen. Dabei werden wir dem von Natani bei Behandlung des Pfaff'schen Problems eingehaltenen Gedankengange

folgen. (Siehe Borchardt's Journ. Bd. LVIII.) Wir werden vor Allem fragen, welches die Definition eines Integrals des Gleichungssystems

$$1)\qquad \sum_{\mu=1}^{n+m} X_\mu^{(\nu)}\, dx_\mu = 0 \quad (\nu = 1, 2 \ldots n)$$

ist und wieviel Integrale diese Differentialgleichungen im Allgemeinen besitzen — wenn zwischen den $n(n+m)$ Functionen $X_\mu^{(\nu)}$ der Variabeln $x_\mu$ keine Bedingungsgleichungen bestehen.

Dann werden wir das dem Pfaff'schen analoge Problem erkennen. Weiterhin soll uns die Frage nach der Ermittelung der Integrale beschäftigen.

Statt der $n+m$ Grössen $x_\mu$ denken wir ebensoviel neue Variable $v_1$, $v_2 \ldots v_p$; $u_1$, $u_2 \ldots u_r$ eingeführt, die Functionen der $x_\mu$ sind. Die beliebigen Aenderungen $\delta x_\mu$, für welche die $n$ Ausdrücke

$$\sum_\mu X_\mu^{(\nu)}\, \delta x_\mu$$

nicht Null zu sein brauchen, sind dann in der Form

$$\delta x_\mu = \sum_{\pi=1}^{p} \frac{\partial x_\mu}{\partial v_\pi}\, \delta v_\pi + \sum_{\varrho=1}^{r} \frac{\partial x_\mu}{\partial u_\varrho}\, \delta u_\varrho$$

darstellbar. Drückt man die Functionen $X_\mu^{(\nu)}$ auch durch die neuen Variabeln $v_\pi$ und $u_\varrho$ aus, so erhält man $n$ identische Gleichungen:

$$\sum_\mu X_\mu^{(\nu)}\, \delta x_\mu = \sum_\pi V_\pi^{(\nu)}\, \delta v_\pi + \sum_\varrho U_\varrho^{(\nu)}\, \delta u_\varrho,$$

in denen die Functionen $V_\pi^{(\nu)}$ und $U_\varrho^{(\nu)}$ in folgender Weise bestimmt sind:

$$V_\pi^{(\nu)} = \Sigma X_\mu^{(\nu)} \frac{\partial x_\mu}{\partial v_\pi}, \quad U_\varrho^{(\nu)} = \Sigma X_\mu^{(\nu)} \frac{\partial x_\mu}{\partial u_\varrho}.$$

Ersetzt man die allgemeinen Aenderungen $\delta x_\mu$ wieder durch die besonderen $dx_\mu$, so resultirt mit dem gegebenen Gleichungssystem 1) das folgende:

$$\sum_\pi V_\pi^{(\nu)}\, dv_\pi + \sum U_\varrho^{(\nu)}\, du_\varrho = 0, \quad (\nu = 1, 2 \ldots n),$$

und dieses ist erfüllt, wenn entweder alle Differentiale $dv_\pi$ und $du_\varrho$ Null, d. h. die $v_\pi$ und $u_\varrho$ constant gesetzt werden, oder die Coefficienten der nicht verschwindenden Differentiale Null sind.

Sind die Functionen $v_\pi$ und $u_\varrho$ derart gewählt, dass alle Grössen $V_\pi^{(\nu)}$ verschwinden und die $u_\varrho$ constant sind, so bestehen die $np$ Gleichungen:

$$2)\quad \Sigma X_\mu^{(1)} \frac{\partial x_\mu}{\partial v_\pi} = 0, \quad \Sigma X_\mu^{(2)} \frac{\partial x_\mu}{\partial v_\pi} = 0, \quad \ldots, \quad \Sigma X_\mu^{(n)} \frac{\partial x_\mu}{\partial v_\pi} = 0 \quad (\pi = 1, 2 \ldots p),$$

und diese ersetzen das gegebene System. Fassen wir nämlich in dem letzteren die $v_\pi$ als die nothwendig vorkommenden unabhängigen Variablen auf und differentiiren nach dieser, so ergiebt sich das neue System 2).

Die $r$ Grössen $u_\varrho$ Constanten gleich gesetzt, erfüllen die Gleichungen 1) und 2), darum nennen wir diese Functionen $u_\varrho$ die Integrale des vor-

gelegten Systems von Differentialgleichungen. Je geringer die Anzahl der Integrale ist, um so mehr Variable bleiben willkürlich und um so allgemeiner ist die Lösung. Daher kommt die Frage nach der allgemeinsten Lösung der Differentialgleichungen mit der nach der kleinsten Anzahl von Integralen überein. Diese wollen wir jetzt aufsuchen.

Es ist:

$$3)\qquad \sum_{\mu} X_{\mu}^{(\nu)}\,\delta x_{\mu} = \sum_{\varrho} U_{\varrho}^{(\nu)}\,\delta u_{\varrho} \quad (\nu = 1, 2 \ldots n),$$

also:

$$4)\qquad X_{\mu}^{(\nu)} = \Sigma U_{\varrho}^{(\nu)} \frac{\partial u_{\varrho}}{\partial x_{\mu}} \quad (\mu = 1, 2 \ldots n+m),$$

und aus diesen $n(n+m)$ Gleichungen sind die $r(n+1)$ Grössen $U_{\varrho}^{(\nu)}$ und $u_{\varrho}$ zu berechnen.

Ist zuerst $n(n+m)$ durch $(n+1)r$, also auch $n+m$ durch $n+1$ theilbar, etwa

$$n+m = k(n+1),$$

so kann $r$ nicht kleiner sein als $kn$, sonst ergäben sich Bedingungsgleichungen zwischen den Grössen $X_{\mu}^{(\nu)}$, was ausgeschlossen werden mag.

Im Falle die Anzahl der Variabeln $x_{\mu}$ durch die um Eins vermehrte Zahl der gegebenen Gleichungen theilbar ist, besteht daher das allgemeinste Problem der Integration in einer Transformation, durch welche die Identitäten

$$\text{I)}\qquad \sum_{\mu=1}^{k(n+1)} X_{\mu}^{(\nu)}\,\delta x_{\mu} = \sum_{\varrho=1}^{kn} U_{\varrho}^{(\nu)}\,\delta u_{\varrho} \quad (\nu = 1, 2 \ldots n)$$

entstehen, und die Anzahl der Integrale $u_{\varrho} = c_{\varrho}$ der Gleichungen:

$$\text{A)}\qquad \sum_{\mu=1}^{k(n+1)} X_{\mu}^{(\nu)}\,dx_{\mu} = 0$$

ist dasjenige Vielfache der Anzahl der Gleichungen, welches der Quotient $\frac{m+n}{n+1}$ angiebt.

Ist aber

$$m+n = k(n+1) + \varkappa,$$

wo $\varkappa$ die Werthe von 1 bis $n$ annehmen kann, dann giebt es neben $kn$ bestimmten $\varkappa$ willkürliche Integrale. Hier dienen nämlich die $n(n+m)$ Gleichungen 4) dazu, $n(nk+\varkappa)$ Grössen $U$ zu bestimmen; doch weil dann für die $nk+\varkappa$ Grössen $u_{\varrho}$ nur mehr $nk$ Gleichungen übrig sind, bleiben $\varkappa$ willkürlich. Wir bezeichnen diese mit $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{\varkappa}$ und die zugehörigen Coefficienten $U^{(\nu)}$ mit $A^{(\nu)}$. Nun ist das Problem der Integration der Gleichungen:

$$\text{B)}\qquad \sum_{\mu=1}^{k(n+1)+\varkappa} X_{\mu}^{(\nu)}\,dx_{\mu} = 0 \quad (\nu = 1, 2 \ldots n)$$

in einer Transformation zu suchen, durch welche die Identitäten:

$$\text{II)}\quad \sum_{\mu} X_{\mu}^{(\nu)}\,\delta x_{\mu} = A_1^{(\nu)}\,\delta\varphi_1 + A_2^{(\nu)}\,d\varphi_2 + \ldots + A_{\varkappa}^{(\nu)}\,\delta\varphi_{\varkappa} + \sum_{\varrho=1}^{nk} U_{\varrho}^{(\nu)}\,\delta u_{\varrho}$$
$$(\nu = 1, 2 \ldots n)$$

hergestellt werden. Die Integrale sind:

$$\varphi_1 = C_1,\ \ \varphi_2 = C_2,\ \ldots,\ \ \varphi_{\varkappa} = C_{\varkappa};\quad u_1 = c_1,\ \ u_2 = c_2,\ \ldots,\ \ u_{nk} = c_{nk},$$

wo die $C$ und $c$ willkürliche Constanten bedeuten.

Ist die Anzahl der Variabeln $k(n+1)-\varkappa$, so giebt es $(k-1)n$ bestimmte und $n+1-\varkappa$ willkürliche Integrale.

Die Integrale ändern sich nicht, was für Functionen von $x_{\mu}$ auch für die $k$ als unabhängig betrachteten Variabeln $v_{\pi}$ gewählt werden mögen; denn nehmen wir $\mu = n+m$ Gleichungen

$$x_{\mu} = f_{\mu}(v_1, v_2 \ldots v_k,\ u_1, u_2 \ldots u_r)$$

an, in denen die $v$ willkürlich sind, aber die $u_{\varrho}$ die in den Identitäten

$$\sum_{\mu=1}^{n+m} X_{\mu}^{(\nu)}\,\delta x_{\mu} = \sum_{\varrho=1}^{r} U_{\varrho}^{(\nu)}\,\delta u_{\varrho}$$

ausgesprochene Bedeutung haben, so ist

$$\sum_{\mu=1}^{n+m} X_{\mu}^{(\nu)}\,dx_{\mu} = \sum_{\varrho=1}^{r} U_{\varrho}'^{(\nu)}\,\delta u_{\varrho} + \sum_{\pi=1}^{k} V_{\pi}'^{(\nu)}\,\delta v_{\pi}.$$

Doch weil die hierauf folgenden Identitäten

$$\sum_{\varrho} U_{\varrho}^{(\nu)}\,\delta u_{\varrho} = \sum_{\varrho} U_{\varrho}'^{(\nu)}\,\delta u_{\varrho} + \sum_{\pi} V_{\pi}'^{(\nu)}\,\delta v_{\pi}$$

nur zu erfüllen sind, wenn

$$U_{\varrho}'^{(\nu)} = U_{\varrho}^{(\nu)},\quad V_{\pi}'^{(\nu)} = 0$$

ist, so sind die $u_{\varrho}$ Integrale, was immer die $v_{\pi}$ für Functionen der $x_{\mu}$ sein mögen. —

In den obengenannten Transformationsproblemen erkennen wir die den Pfaff'schen analogen Aufgaben.

Die Integration der Gleichungen B) ist mit Hilfe der Elimination von $\varkappa$ Variabeln und deren Differentialen aus den willkürlich zu wählenden Gleichungen

$$\varphi_1 = C_1,\quad \varphi_2 = C_2,\ \ldots,\quad \varphi_{\varkappa} = C_{\varkappa}$$

und

$$\delta\varphi_1 = 0,\quad \delta\varphi_2 = 0,\quad \ldots,\ \delta\varphi_{\varkappa} = 0$$

auf die Integration eines Systems der Form A) zurückzuführen, indem in den Identitäten II) links nur $k(n+1)$ Variable $x$ und deren Differentiale stehen bleiben und rechts die $\varkappa$ ersten Glieder ausfallen.

Die Integrale der Gleichungen A) sind

$$u_1 = c_1,\quad u_2 = c_2,\quad \ldots,\quad u_{nk} = c_{nk}.$$

Differentiirt man diese Gleichungen und addirt die mit gewissen Grössen multiplicirten Differentiale $du$, so entstehen die Gleichungen A). Mit Hilfe

der Integrale kann man auch $\Sigma X_\mu^{(\nu)}\,\delta x_\mu$ auf die Form $\Sigma U_\varrho^{(\nu)}\,\delta u_\varrho$ bringen, und zwar sind die $n^2 k$ Grössen $U_\varrho^{(\nu)}$ durch die Gleichungen

$$U_\varrho^{(\nu)} = \Sigma X_\mu^{(\nu)} \frac{\partial x_\mu}{\partial u_\varrho}$$

definirt, in welchen die $x_\mu$ als Functionen der $u_\varrho$ und der $k$ willkürlichen $v_\varkappa$ aufzufassen sind.

Es giebt noch Integrale, welche statt der willkürlichen Constanten willkürliche Functionen enthalten.

Alle Beziehungen zwischen den $U$ und $u$, welche die $n$ Ausdrücke zum Verschwinden bringen, haben die Gleichungen A) zur Folge und geben auch ein System von Integralen ab. Bestehen nun etwa die $kn-q$ willkürlichen Relationen:

$$u_{q+1} = f_1(u_1, u_2 \ldots u_q), \quad u_{q+2} = f_2(u_1, u_2 \ldots u_q), \quad \ldots,$$
$$\ldots, \quad u_{kn} = f_{kn-q}(u_1, u_2 \ldots u_q),$$

so werden die Ausdrücke:

$$\sum_\varrho U_\varrho^{(\nu)} \delta u_\varrho = \sum_{i=1}^{q} \left( U_i^{(\nu)} + U_{q+1}^{(\nu)} \frac{\partial f_1}{\partial u_i} + U_{q+2}^{(\nu)} \frac{\partial f_2}{\partial u_i} + \ldots + U_{kn}^{(\nu)} \frac{\partial f_{kn-q}}{\partial u_i} \right) \delta u_i \quad (\nu = 1, 2 \ldots n),$$

und diese verschwinden, wenn

$$U_i^{(\nu)} + U_{q+1}^{(\nu)} \frac{\partial f_1}{\partial u_i} + \ldots + U_{kn}^{(\nu)} \frac{\partial f_{kn-q}}{\partial u_i} \quad (i = 1, 2 \ldots q, \ \nu = 1, 2 \ldots n)$$

Null sind. Die neuen $kn + (n-1)q$ Relationen sind auch Integrale, enthalten aber statt Constanten $kn - q$ willkürliche Functionen von $q$ Variabeln.

Je grösser $q$ ist, um so weniger willkürliche Functionen giebt es, aber desto mehr Integrale. Blos im Falle einer Gleichung A) mit $2k$ Variabeln bleibt die Anzahl der Integrale constant $2k$.

Die Ausdrücke $\Sigma U_\varrho^{(\nu)}\,\delta u_\varrho$ können endlich dadurch zum Verschwinden gebracht werden, dass alle $U_\varrho^{(\nu)}$ Null sind, und dieses System von Integralen ohne willkürliche Constante und Functionen heisse das singuläre.

Wenn wir in den Gleichungssystemen A) und B) $k=1$ setzen, so gelangen wir einerseits zu dem System totaler Differentialgleichungen

$$\sum_{\mu=1}^{n+1} X_\mu^{(\nu)}\, dx_\mu = 0,$$

andererseits zu dem System

$$\sum_{\mu=1}^{k+1+\varkappa} X_\mu^{(\nu)}\, dx_\mu = 0.$$

Das erste System schreibt man nach Berechnung der $n$ Verhältnisse

$$\frac{dx_\mu}{dx_1} = \frac{Y_\mu}{Y_1} \quad (\mu = 2, 3 \ldots n+1)$$

in der Form

$$dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_{n+1} = Y_1 : Y_2 : \ldots : Y_{n+1}.$$

Dieses System ist integrirt, wenn man $n$ von einander unabhängige Integrale $u_1=c_1$, $u_2=c_2$, ..., $u_n=c_n$ der linearen partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} Y_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} Y_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_{n+1}} Y_{n+1} = 0$$

kennt. Dasselbe ist aber auch integrirt, wenn man $n$ aus den angenommenen Gleichungen

$$\frac{\partial u_\nu}{\partial x_1} Y_1 + \frac{\partial u_\nu}{\partial x_2} Y_2 + \ldots + \frac{\partial u_\nu}{\partial x_{n+1}} Y_{n+1} = 0 \quad (\nu = 1, 2 \ldots n)$$

ableitbare identische Beziehungen

$$Y_1\,\delta x_\mu - Y_\mu\,\delta x_1 = A_1^{(\mu)}\,\delta u_1 + A_2^{(\mu)}\,\delta u_2 + \ldots + A_n^{(\mu)}\,\delta u_n$$
$$(\mu = 2, 3 \ldots n+1)$$

aufstellen kann, in denen $A_1^{(\mu)}$, $A_2^{(\mu)}$ ... $A_n^{(\mu)}$ Functionen der $x$ sind. Nach Multiplication der letzten $n$ Identitäten mit geeigneten Factoren und Addition derselben ergiebt sich ein System der Gestalt I).

Das zweite der obigen Systeme besitzt $k$ willkürliche Integrale und ist auf das System totaler Differentialgleichungen zurückführbar.

Setzen wir in den Gleichungen A) und B) $n=1$, so kommen wir auf die beiden Pfaff'schen Gleichungen. Die Uebertragung der bekannten Methode der Lösung der Gleichung $\sum_\mu^{2k} X_\mu\,dx_\mu = 0$ auf das System

$$\sum_{=1}^{(n+1)k} X_\mu^{(\nu)}\,dx_\mu = 0 \quad (\nu = 1, 2 \ldots n)$$

würde verlangen, dass wir die $n$ Gleichungen in $n$ andere mit $k(n+1)-1$ neuen Variabeln $x^{(1)}$ transformiren, welche Functionen der $k(n+1)$ Variabeln $x$ sind. Gelingt das, so kann man $n$ derselben Constanten gleich setzen und die entstehenden Gleichungen mit $(k-1)(n+1)$ Variabeln wieder auf ein System von $n$ Gleichungen mit $(k-1)(n+1)-1$ neuen Variabeln $x^{(2)}$ zu transformiren suchen und wieder $n$ Functionen Constanten gleich setzen, da ja $n$ willkürliche Integrale existiren werden. Fährt man in gleicher Weise fort, so erhält man schliesslich $n$ Gleichungen mit $n+1$ Variabeln, welche $n$ Integrale besitzen. Im Ganzen hat man $kn$ Functionen der Variabeln $x_\mu$ Constanten gleich gesetzt und diese sind Integrale des Systems.

Man überzeugt sich jedoch leicht, dass eine Transformation der verlangten Art ohne Bedingungsgleichungen für die Functionen $X_\mu^{(\nu)}$ nur dann möglich ist, wenn die Anzahl der Gleichungen Eins ist. Auch wenn wir das gegebene System in ein anderes mit gleichviel Variabeln überführen, ist im Allgemeinen nicht zu erreichen, dass das neue System die verlangte Transformation zulässt.

Wenn darnach die Integrationsmethode von Pfaff nicht verwendet werden kann und offenbar auch die Verallgemeinerung der Methode von

Clebsch nicht möglich ist, beschränken wir uns darauf, aus den $n$ Gleichungen

$$\sum_{\mu=1}^{k(n+1)} X_\mu^{(\nu)}\, dx_\mu = \sum_{\varrho=1}^{kn} U_\varrho^{(\nu)}\, du_\varrho$$

Differentialgleichungen für die Functionen $U_\varrho^{(\nu)}$ und $u_\varrho$ abzuleiten, welche das „erste Pfaff'sche System" als specielles System enthalten.

Mit Hilfe der $nk(n+1)$ Grössen $X_\mu^{(\nu)}$ können wir $(nk(n+1))^2$ Grössen

$$5)\qquad \frac{\partial X_\lambda^{(\nu)}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial X_\mu^{(\nu')}}{\partial x_\lambda} = a_{\lambda\mu}^{(\nu\nu')}$$

definiren und darnach lassen sich durch die $nk(n+1)$ linearen Gleichungen

$$6)\qquad X_\mu^{(\nu)} = \sum_{\nu'=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{k(n+1)} a_{\lambda\mu}^{(\nu\nu')}\, z_{(\nu'-1)k(n+1)+\lambda}$$

ebensoviele Grössen $z$ bestimmen. Die Determinante dieses Gleichungssystems:

$$D = \Sigma \pm a_{11}^{(11)} a_{22}^{(11)} \dots a_{k(n+1),\,k(n+1)}^{(11)},\ a_{11}^{(22)} \dots a_{k(n+1),\,k(n+1)}^{(n,n)},$$

ist eine schiefe und symmetrische, da

$$a_{\lambda\mu}^{(\nu\nu)} = 0, \quad a_{\lambda\mu}^{(\nu\nu')} = -\,a_{\mu\lambda}^{(\nu'\nu)}$$

ist, und ohne eine Bedingungsgleichung in den $X_\mu^{(\nu)}$ verschwindet sie auch nicht, da ihre Ordnungszahl $nk(n+1)$ jedenfalls gerade ist.

Beachtet man die $nk(n+1)$ Gleichungen:

$$X_\mu^{(\nu)} = U_1^{(\nu)} \frac{\partial u_1}{\partial x_\mu} + U_2^{(\nu)} \frac{\partial u_2}{\partial x_\mu} + \dots + U_{kn}^{(\nu)} \frac{\partial u_{kn}}{\partial x_\mu}$$

und die Darstellungen:

$$\begin{aligned} a_{\lambda\mu}^{(\nu\nu')} = &\left(\frac{\partial U_1^{(\nu)}}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial U_2^{(\nu)}}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x_\lambda} + \dots + \frac{\partial U_{kn}^{(\nu)}}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial u_{kn}}{\partial x_\lambda}\right) \\ &-\left(\frac{\partial U_1^{(\nu')}}{\partial x_\lambda}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_\mu} + \frac{\partial U_2^{(\nu')}}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x_\mu} + \dots + \frac{\partial U_{kn}^{(\nu')}}{\partial x_\lambda}\cdot\frac{\partial u_{kn}}{\partial x_\mu}\right) \\ &+ (U_1^{(\nu)} - U_1^{(\nu')}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_\mu\, \partial x_\lambda} + (U_2^{(\nu)} - U_2^{(\nu')}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_\mu\, \partial x_\lambda} + \dots \\ &\dots + (U_{kn}^{(\nu)} - U_{kn}^{(\nu')}) \cdot \frac{\partial^2 u_{kn}}{\partial x_\mu\, \partial x_\lambda}, \end{aligned}$$

so lassen sich die Gleichungen 6) auf die Form bringen:

$$\begin{aligned} &\sum_{\varrho=1}^{kn} U_{\varrho}^{(\nu)} \frac{\partial u_\varrho}{\partial x_\mu} \\ &= \sum_{\nu'=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{k(n+1)} \sum_{\varrho=1}^{kn} \left(\frac{\partial U_\varrho^{(\nu)}}{\partial x_\mu} \frac{\partial u_\varrho}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial U_\varrho^{(\nu')}}{\partial x_\lambda} \frac{\partial u_\varrho}{\partial x_\mu} + (U_\varrho^{(\nu)} - U_\varrho^{(\nu')}) \frac{\partial^2 u_\varrho}{\partial x_\mu\, \partial x_\lambda}\right) \\ &\times z_{(\nu'-1)k(n+1)+\lambda}, \end{aligned}$$

oder bei anderer Anordnung der Summanden auf die Form:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\varrho}\frac{\partial U_{\varrho}^{(\nu)}}{\partial x_{\mu}}\Big[\frac{\partial u_{\varrho}}{\partial x_1}z_1+\frac{\partial u_{\varrho}}{\partial x_2}z_2+\ldots+\frac{\partial u_{\varrho}}{\partial x_{k(n+1)}}z_{k(n+1)}+\ldots\\
&\qquad\ldots+\frac{\partial u_{\varrho}}{\partial x_1}z_{(n-1)k(n+1)+1}+\ldots+\frac{\partial u_{\varrho}}{\partial x_{k(n+1)}}z_{nk(n+1)}\Big]\\
&-\sum_{\varrho}\frac{\partial u_{\varrho}}{\partial x_{\mu}}\Big[\frac{\partial U_{\varrho}^{(1)}}{\partial x_1}z_1+\frac{\partial U_{\varrho}^{(1)}}{\partial x_2}z_2+\ldots+\frac{\partial U_{\varrho}^{(1)}}{\partial x_{k(n+1)}}z_{k(n+1)}+\ldots\\
7)\quad&\qquad\ldots+\frac{\partial U_{\varrho}^{(n)}}{\partial x_1}z_{(n-1)k(n+1)+1}+\ldots+\frac{\partial U_{\varrho}^{(n)}}{\partial x_{k(n+1)}}z_{nk(n+1)}+U_{\varrho}^{(\nu)}\Big]\\
&=\sum_{\varrho=1}^{kn}\sum_{\nu'=1}^{n}(U_{\varrho}^{(\nu')}-U_{\varrho}^{(\nu)})\Big[\frac{\partial^2 u_{\varrho}}{\partial x_{\mu}\partial x_1}z_{(\nu'-1)k(n+1)+1}+\ldots\\
&\qquad\ldots+\frac{\partial^2 u_{\varrho}}{\partial x_{\mu}\partial x_2}z_{(\nu'-1)k(n+1)+2}+\ldots+\frac{\partial^2 u_{\varrho}}{\partial x_{\mu}\partial x_{k(n+1)}}z_{nk(n+1)}\Big]\\
&\qquad(\mu=1,2\ldots k(n+1),\ \nu=1,2\ldots n).
\end{aligned}
$$

Diese Gleichungen fassen wir als linear in den $nk$ Grössen

$$Y_{\varrho}=\sum_{\lambda=1}^{k(n+1)}\frac{\partial u_{\varrho}}{\partial x_{\lambda}}(z_{\lambda}+z_{k(n+1)+\lambda}+\ldots+z_{(n-1)k(n+1)+\lambda})$$

und den $n^2k$ Grössen

$$Z_{\varrho}^{(\nu)}=\frac{\partial U_{\varrho}^{(1)}}{\partial x_1}z_1+\frac{\partial U_{\varrho}^{(1)}}{\partial x_2}z_2+\ldots+\frac{\partial U_{\varrho}^{(n)}}{\partial x_{k(n+1)}}z_{nk(n+1)}+U_{\varrho}^{(\nu)}$$

auf und lösen sie nach diesen Unbekannten.

Die Determinante des Systems 7) lautet nach Einführung der Zeichen

$$\frac{\partial U_{\varrho}^{(\nu)}}{\partial x_{\mu}}=P_{\varrho,\mu}^{(\nu)},\quad \frac{\partial u_{\varrho}}{\partial x_{\mu}}=Q_{\varrho,\mu}:$$

$$
\begin{aligned}
\Delta=(-1)^{n^2k}\Sigma\pm(&P_{11}^{(1)},P_{22}^{(1)}\ldots P_{kn,kn}^{(1)};\ Q_{1,kn+1},Q_{2,kn+2}\ldots Q_{k,k(n+1)};\\
&0_1,0_2\ldots 0_{k(n-1)},\ Q_{1,k(n-1)+1},Q_{2,k(n-1)+2}\ldots Q_{2k,k(n+1)};\ \ldots\\
&0_1,0_2\ldots 0_k,\ Q_{1,k+1},Q_{2,k+2}\ldots Q_{nk,k(n+1)})
\end{aligned}
$$

(wo den Nullen Indices beigesetzt sind, dass man deren Anzahl ersehe), und wird im Allgemeinen nicht verschwinden. Sie ist in eine Summe von Producten von je $n$ Determinanten der Ordnung $k(n+1)$ zerlegbar, und zwar sind diese Producte so gebildet, dass eine erste Determinante lautet:

$$
\begin{vmatrix}
P_{\lambda_1,1}^{(\nu_1)} & \ldots & P_{\lambda_k,1}^{(\nu_1)}, & Q_{11} & \ldots & Q_{kn,1}\\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\
P_{\lambda_1,k(n+1)}^{(\nu_1)} & \ldots & P_{\lambda_k,k(n+1)}^{(\nu_1)}, & Q_{1,k(n+1)} & \ldots & Q_{kn,k(n+1)}
\end{vmatrix},
$$

wo $\lambda_1,\lambda_2\ldots\lambda_k$ irgend $k$ Zahlen der Reihe, $1,2\ldots kn$ und $\nu_1$ eine der Zahlen $1,2\ldots n$ bedeutet. Die weiteren $n-1$ Determinanten sind ebenso gebildet, nur bedeuten $\lambda_1\ldots\lambda_k$ dort andere und andere der Zahlen $1,2\ldots kn$ und auch $\nu'$ hat in jeder Determinante einen andern Werth.

Bezeichnet man mit $C_{\alpha}^{(\beta)}$ die Anzahl der Combinationen $\beta^{\text{ter}}$ Classe mit $\alpha$ Elementen, so giebt es offenbar

$$C_{nk}^{(k)} \cdot C_{nk-k}^{(k)} \ldots C_{nk-(n-1)k}^{(k)} = \frac{(nk)!}{(k!)^n}$$

Producte besagter Art. Die Summe dieser Glieder — jedes mit dem gehörigen Zeichen versehen — ist gleich $\Delta$, wie man bei Beachtung des Satzes: „Wenn ein System von $n^2$ Elementen in $m$ Zeilen mehr als $n-m$ Colonnen Nullen hat, so ist seine Determinante Null“ leicht ersieht.

Bei Berechnung des Zählers von $(-1)^{n^2 k} Y_\varrho$ hat man in den eben beschriebenen $\frac{(nk)!}{(k!)^n}$ Producten die Colonnen

$$P_{\varrho,1}^{(\nu)} \ldots P_{\varrho,k(n+1)}^{(\nu)} \quad (\nu = 1, 2 \ldots n)$$

durch

$$A_1^{(\nu)} \ldots A_{k(n+1)}^{(\nu)}$$

zu ersetzen, wo unter $A_\mu^{(\nu)}$ die Doppelsumme auf der rechten Seite der Gleichung 7) zu verstehen ist.

In dem Zähler von $(-1)^{n^2 k - 1} Z_\varrho^{(\nu)}$ kommen vor Allem $\frac{(nk)!}{(k!)^n}$ Glieder vor, die aus der früher zerlegten Determinante $\Delta$ dadurch hervorgehen, dass man in denjenigen Determinanten der $n$-gliedrigen Producte, welche Elemente $P^{(\nu)}$ enthalten, die Verticalreihen

$$Q_{\varrho 1},\ Q_{\varrho 2} \ldots Q_{\varrho\, k(n+1)}$$

durch

$$A_1^{(\nu)},\ A_2^{(\nu)} \ldots A_{k(n+1)}^{(\nu)}$$

ersetzt. — Daneben giebt es andere $n$-gliedrige Producte von Determinanten $k(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, die folgendermassen gebildet sind. Eine erste Determinante lautet:

$$\begin{vmatrix} P_{\lambda_1,1}^{(\nu)} & \ldots P_{\lambda_k,1}^{(\nu)}, & Q_{11} & \ldots Q_{\varrho-1,1}, & P_{\lambda_{k+1},1}^{(\nu)}, & Q_{\varrho+1,1} & \ldots Q_{kn,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{\lambda_1,k(n+1)}^{(\nu)} & \ldots P_{\lambda_k,k(n+1)}^{(\nu)}, & Q_{1,k(n+1)} & \ldots Q_{\varrho-1,k(n+1)}, & P_{\lambda_{k+1},k(n+1)}^{(\nu)}, & Q_{\varrho+1,k(n+1)} & \ldots Q_{kn,k(n+1)} \end{vmatrix}$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{k+1}$ irgend $k+1$ Zahlen der Reihe $1, 2 \ldots kn$ bezeichnen. Die zweite, dritte ... $(n-2)^{\text{te}}$ Determinante des Productes hat die Form:

$$\begin{vmatrix} P_{\lambda'_1,1}^{(\nu')} & \ldots P_{\lambda'_k,1}^{(\nu')}, & Q_{11} & \ldots Q_{kn,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{\lambda'_1,k(n+1)}^{(\nu')} & \ldots P_{\lambda'_k,k(n+1)}^{(\nu')}, & Q_{1,k(n+1)} & \ldots Q_{kn,k(n+1)} \end{vmatrix}$$

und darin bedeuten $\lambda'_1 \ldots \lambda'_k$ immer andere und andere Zahlen der Reihe $1, 2 \ldots kn$ und $\nu'$ nimmt der Reihe nach $n-2$ von $\nu$ verschiedene Werthe aus der Reihe $1, 2 \ldots n$ an. Bleiben dann unter den Zahlen $1, 2 \ldots kn$ resp. $1, 2 \ldots n$ noch die folgenden übrig: $\lambda''_1 \ldots \lambda''_{k-1}$ resp. $\nu''$, so hat die letzte Determinante des Productes die Form:

$$\begin{vmatrix} P^{(\nu'')}_{\lambda''_1,1} & \dots P^{(\nu'')}_{\lambda''_{k-1},1}, & A^{(\nu'')}_1, & Q_{11} & \dots Q_{kn,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P^{(\nu'')}_{\lambda''_1,k(n+1)} & \dots P^{(\nu'')}_{\lambda''_{k-1},k(n+1)}, & A^{(\nu'')}_{k(n+1)}, & Q_{1,k(n+1)} & \dots Q_{kn,k(n+1)} \end{vmatrix},$$

Solcher Producte lassen sich

$$(n-1)!\, C^{(k+1)}_{kn} \cdot C^{(k)}_{kn-k-1} \dots C^{(k)}_{kn-(n-2)k-1} \cdot C^{(k-1)}_{kn(n-1)k-1}$$
$$= (n-1)!\, \frac{(kn)!}{(k+1).(k-1).(k!)^{n-1}}$$

bilden, darum giebt es im Zähler von $(-1)^{n^2k-1} Z^{(\nu)}_\varrho$ im Ganzen

$$\frac{(nk)!}{(k+1)\,(k!)^n\,(k-1)!}\,[(k+1).(k-1)! + (n-1)!\,k!]$$

$n$-gliedrige Producte von Determinanten der Ordnung $k(n+1)$ und weitere Glieder der Ordnung kommen nicht vor.

Aus dieser Beschreibung des Baues der Werthe für die $nk(n+1)$ Unbekannten $Y_\varrho$ und $Z^{(\nu)}_\varrho$ ersieht man, dass diese Werthe im Allgemeinen verschieden ausfallen, ausser in dem Falle $n=1$, wo alle Grössen $A^{(\nu)}_\mu$ verschwinden. Die Lösungen des Systems 7) sind dann:

$$\alpha)\qquad \frac{\partial u_\varrho}{\partial x_1} z_1 + \frac{\partial u_\varrho}{\partial x_2} z_2 + \dots + \frac{\partial u_\varrho}{\partial x_{2k}} z_{2k} = 0,$$

$$\beta)\qquad \frac{\partial U_\varrho}{\partial x_1} z_1 + \frac{\partial U_\varrho}{\partial x_2} z_2 + \dots + \frac{\partial U_\varrho}{\partial x_{2k}} z_{2k} + U_\varrho = 0,$$

weil die Determinante

$$\varDelta = (-1)^k\, \Sigma \pm \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \dots \frac{\partial U_k}{\partial x_n} \frac{\partial u_1}{\partial x_{k+1}} \frac{\partial u_2}{\partial x_{k+2}} \dots \frac{\partial u_k}{\partial x_{2k}}$$

im Allgemeinen nicht verschwindet. (Hier ist $U_\varrho$ für $U^{(1)}_\varrho$ geschrieben.)

Die $k$ Gleichungen $\beta$) ziehen die folgenden $k-1$ nach sich:

$$z_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{U_\varrho}{U_k}\right) + z_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{U_\varrho}{U_k}\right) + \dots + z_{2k} \frac{\partial}{\partial x_{2k}}\left(\frac{U_\varrho}{U_k}\right) = 0$$
$$(\varrho = 1, 2 \dots k-1),$$

und darum genügen die $2k-1$ Functionen $u_1, u_2 \dots u_k, \frac{U_1}{U_k}, \frac{U_2}{U_k} \dots \frac{U_{k-1}}{U_k}$ alle derselben linearen partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} z_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} z_2 + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{2k}} z_{2k} = 0,$$

deren allgemeine Lösung $\varphi$ eine willkürliche Function der letztgenannten Functionen ist. Diese ist aber auch eine Lösung des ersten Pfaff'schen Problems und $\varphi = c$ ist ein erstes Integral der Pfaff'schen Gleichung $\sum_{\mu=1}^{2k} X_\mu\, dx_\mu = 0$. Wie man mit dessen Hilfe die Bestimmung weiterer Integrale einzuleiten und durchzuführen hat, ist von Clebsch gezeigt worden (Borchardt's Journal Bd. LX).

Hier ist klar geworden, warum man bei dem Pfaff'schen Problem einen successiven Fortgang von einem Integral $\varphi = c$ zu einem zweiten, von dem zweiten zu einem dritten u. s. w. nehmen muss. Wegen des Zusammenfallens der Werthe für $Y_\varrho$ und $Z_\varrho$ oder wegen der Uebereinstimmung der Differentialgleichungen für die Functionen $u_\varrho$ und $\frac{U_\varrho}{U_k}$ kann man nämlich ein System zusammengehöriger Functionen $u_\varrho$ und $\frac{U_\varrho}{U_k}$, welche das Problem lösen, nicht finden.

Der Umstand, dass man in dem allgemeinen Falle von $n$ Gleichungen A) mit $k(n+1)$ Variabeln $nk(n+1)$ Differentialgleichungen, die man in den $nk(n+1)$ Lösungen des Systems 7) findet, gleichzeitig betrachten und diesen ein System zusammengehöriger Functionen $u_\varrho$ und $U_\varrho^{(\nu)}$ entnehmen muss, welche das Problem lösen, erschwert natürlich gerade die fernere Untersuchung, und die Complication der Differentialgleichungen, welche in Bezug auf die Functionen $u_\varrho$ von der zweiten, in Bezug auf die Functionen $U_\varrho^{(\nu)}$ von der ersten Ordnung sind, lässt selbst bei niedrigen Werthen für $n$ und $k$ nicht leicht eine Discussion zu. Hier kam es darauf an, das Verhältniss des Pfaff'schen Problems zu dem allgemeinen zu charakterisiren.

Prag, den 18. December 1884.

# Kleinere Mittheilungen.

---

### XI. Der Doppelpunkt symmetrischer räumlicher Systeme.

Die Thatsache, dass der Schnittpunkt der normalhalbirenden Ebenen der Strecken, welche entsprechende Ecken zweier in verschiedenen Ebenen liegenden congruenten Dreiecke verbinden, mit diesen Dreiecken zwei Tetraeder bestimmt, die im Allgemeinen symmetrisch, nicht congruent sind, ist zwar schon längst bekannt (vergl. u. A. Magnus, Aufg. aus der analyt. Geometrie des Raumes, sowie Baltzer, Die Gleichheit und Aehnlichkeit der Figuren und die Aehnlichkeit derselben, Dresden 1852); wegen der Einfachheit des Gedankenganges erschien trotzdem die folgende Darstellung der Mittheilung werth.

1. Zu zwei gleichen Strecken $AB$ und $A'B'$, die auf derselben Ebene $\mathfrak{E}$ enthalten sind und nicht zusammenfallen, giebt es immer auf $\mathfrak{E}$ einen eindeutig bestimmten Punkt $S$, welcher mit $AB$ und $A'B'$ gleichsinnig congruente Figuren bildet.

Ist $S$ der Schnittpunkt der Normalhalbirenden von $AA'$ und $BB'$, so ist $SA = SA'$, $SB = SB'$; hieraus und aus $AB = A'B'$ folgt $SAB \cong SA'B'$.

Angenommen, die beiden Dreiecke $SAB$ und $SA'B'$ wären ungleichsinnig congruent, so wäre, unter Berücksichtigung des Sinnes,

$$\angle ASB = B'SA'. \tag{1}$$

Wird eine durch $S$ gehende Gerade $MN$ durch die Gleichung bestimmt

$$\angle BSM = MSB', \tag{2}$$

so folgt aus 1) und 2)

$$\angle ASB + BSM = MSB' + B'SA',$$

d. i.

$$\angle ASM = MSA'.$$

Hieraus und aus der gleichen Länge der Strecken $SA = SA'$, $SB = SB'$ folgt, dass $A$ und $A'$, sowie $B$ und $B'$ symmetrisch gegen $SM$ liegen; daher ist $MN$ die gemeinsame Normalhalbirende von $AA'$ und $BB'$, und für jeden Punkt $P$ derselben ist $PA = PA'$, $PB = PB'$, $PAB$ ungleichsinnig congruent $PA'B'$. Der Schnittpunkt $S_0$ von $AB$ und $A'B'$ liegt auf $MN$; die verschwindenden Dreiecke $S_0AB$ und $S_0A'B'$ können als gleichsinnig congruent angesehen werden. —

Wenn die Strecken $AB$ und $A'B'$ gleichsinnig parallel sind, so ist $ABA'B'$ ein Parallelogramm und der Punkt $S$ liegt unendlich fern in der zu $AA'$ und $BB'$ normalen Richtung.

2. Zwei auf derselben Ebene $\mathfrak{E}$ liegende gleichsinnig congruente Systeme $\Sigma$ und $\Sigma'$ haben nach 1. einen eindeutig bestimmten, endlich oder unendlich fernen selbstentsprechenden Punkt $S$ und können durch Drehung um denselben zur Deckung gebracht werden.

Zwei auf $\mathfrak{E}$ symmetrisch liegende Systeme $\Sigma$ und $\Sigma''$ haben eine selbstentsprechende Gerade, die Symmetrieaxe; jeder Punkt derselben ist Doppelpunkt. Wenn zwei auf $\mathfrak{E}$ liegende Systeme $\Sigma$ und $\Sigma''$ ungleichsinnig congruent sind und nicht symmetrisch liegen, so giebt es keinen Punkt, der von den Ecken eines nicht verschwindenden Dreiecks $ABC$ in $\Sigma$ ebenso weit entfernt wäre, wie von den entsprechenden Punkten $A''$, $B''$, $C''$ in $\Sigma''$. Denn sind die Systeme $\Sigma'$ und $\Sigma''$ symmetrisch und haben sie $A''B''$ zur Symmetrieaxe, so ist durch $PA = PA'$ und $PB = PB'$ der selbstentsprechende Punkt von $\Sigma$ und $\Sigma'$ bestimmt; für denselben ist $PC = PC'$. Wäre nun $PC = PC''$, so wäre $PC' = PC''$ und daher $P$ auf der Symmetrieaxe $A''B''$ gelegen; dann würde $P$ auch auf $AB$ liegen, im Widerspruche damit, dass $\Sigma$ und $\Sigma''$ nicht symmetrisch liegen.

3. Zu zwei congruenten Dreiecken $ABC$ und $A'B'C'$, die auf parallelen Ebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ liegen und von einem Punkte im Innern der Schicht $\mathfrak{E}\mathfrak{E}'$ aus gesehen ungleichsinnig erscheinen, giebt es einen Punkt $S$, der mit ihnen symmetrische Tetraeder $SABC$ und $SA'B'C'$ bestimmt.

Ist $A''B''C''$ die Normalprojection von $A'B'C'$ auf $\mathfrak{E}$, so sind $ABC$ und $A''B''C''$ gleichsinnig congruent.

Wenn $A''B''C''$ mit $ABC$ zusammenfällt, so bildet jeder Punkt der Ebene $\mathfrak{F}$, welche die Schicht $\mathfrak{E}\mathfrak{E}'$ halbirt, mit $ABC$ und $A'B'C'$ symmetrische Tetraeder.

Wenn $A''B''C''$ und $ABC$ nicht zusammenfallen, so bestimme man den selbstentsprechenden Punkt $T$ der congruenten Systeme $A''B''C''\ldots$ und $ABC\ldots$; die Normalprojection von $T$ auf die Ebene $\mathfrak{F}$ ist der Punkt $S$.

Wenn $ABC$ und $A'B'C'$ entsprechende Dreiecke symmetrischer räumlicher Systeme sind, so ist $S$ selbstentsprechender Punkt derselben.

4. Wenn die auf $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ enthaltenen Dreiecke $ABC$ und $A'B'C'$ von einem im Innern der Schicht $\mathfrak{E}\mathfrak{E}'$ gelegenen Punkte aus gleichsinnig congruent erscheinen, so sind $A''B''C''$ und $ABC$ ungleichsinnig congruent. Wenn nun $A''B''C''$ und $ABC$ symmetrisch liegen und $t$ die Symmetrieaxe ist, so bildet jeder Punkt $S$ der Normalprojection $s$ der Geraden $t$ auf die Ebene $\mathfrak{F}$ mit $ABC$ und $A'B'C'$ congruente Tetraeder; die congruenten ebenen Systeme $\Sigma \equiv ABC\ldots$ und $\Sigma' \equiv A'B'C'\ldots$ kommen alsdann durch Drehung um die Axe $s$ zur Deckung.

5. Wenn die Dreiecke $A''B''C''$ und $ABC$ nicht symmetrisch liegen, so kann es keinen Punkt $S$ geben, der mit $A'B'C'$ und $ABC$ symmetrische oder congruente Tetraeder bestimmt; denn die Normalprojectionen von $S$

auf $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ würden entsprechende Punkte der congruenten Systeme $\Sigma$ und $\Sigma'$ sein, die Normalprojection $T$ desselben auf die Ebene $\mathfrak{E}$ würde daher so gelegen sein, dass $TA = TA''$, $TB = TB''$, $TC = TC''$; ein solcher Punkt ist nach Nr. 2 nicht vorhanden.

Hieraus folgt, dass die drei normalhalbirenden Ebenen der Strecken $AA'$, $BB'$, $CC'$ einen endlichen Punkt nicht gemeinsam haben.

Aus 3) und 4) ergiebt sich der Satz: Wenn die congruenten Systeme $\Sigma$ und $\Sigma'$ auf parallelen Ebenen so liegen, dass die Normalprojection $\Sigma''$ von $\Sigma'$ auf $\Sigma$ mit $\Sigma$ ungleichsinnig congruent ist, so haben die Ebenen, welche die Strecken entsprechender Punkte normal halbiren, entweder eine gemeinsame Gerade oder nur einen gemeinsamen unendlich fernen Punkt, je nachdem $\Sigma''$ und $\Sigma$ symmetrisch liegen oder nicht.

6. Wenn die congruenten Dreiecke $ABC$ und $A'B'C'$ auf Ebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ liegen, die einander schneiden, so giebt es unter den zwei Paar Scheitelflächenwinkeln, welche $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ bestimmen, ein Paar $\alpha$ und $\alpha_1$, von dessen Innern aus $ABC$ und $A'B'C'$ ungleichsinnig congruent erscheinen; von den Punkten im Innern des andern Paares $\beta$ und $\beta_1$ aus erscheinen sie gleichsinnig.

Der Schnittpunkt der normalhalbirenden Ebenen der Strecken $AA'$, $BB'$, $CC'$ sei $S$. Da $S$ gleiche Abstände von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ hat, so ist $S$ auf einer der beiden Ebenen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ enthalten, welche die Winkel $\alpha$ und $\beta$ halbiren. Sind $T$ und $T'$ die Normalprojectionen von $S$ auf $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$, so kommen diese Punkte zur Deckung, wenn man $\mathfrak{E}'$ durch Drehung um die Gerade $\mathfrak{E}\mathfrak{E}'$ mit $\mathfrak{E}$ vereint, und zwar indem die Winkel $\alpha$, $\alpha_1$ oder die Winkel $\beta$, $\beta_1$ beschrieben werden, je nachdem $S$ auf $\mathfrak{H}$ oder $\mathfrak{H}'$ enthalten ist.

Nach der Drehung deckt sich $\Sigma'$ im ersten Falle mit einem System $\Sigma''$, das mit $\Sigma$ gleichsinnig ist, im andern mit einem System $\Sigma'''$, das mit $\Sigma$ ungleichsinnig ist.

Wenn $\Sigma''$ und $\Sigma$ identisch sind, so sind $\Sigma'''$ und $\Sigma$ symmetrisch und haben die Gerade $\mathfrak{E}\mathfrak{E}'$ zur Symmetrieaxe; jeder Punkt von $\mathfrak{H}$ giebt mit $ABC$ und $A'B'C'$ symmetrische, jeder Punkt der Kante $\mathfrak{E}\mathfrak{E}'$ verschwindende congruente Tetraeder.

Wenn $\Sigma''$ und $\Sigma$ nicht identisch sind, so haben sie nur einen selbstentsprechenden Punkt $T$; der Punkt $S$ von $\mathfrak{H}$, welcher $T$ zur Normalprojection auf $\mathfrak{E}$ hat, ist der einzige Punkt $S$, der mit $ABC$ und $A'B'C'$ symmetrische Tetraeder bestimmt. $S$ kann auch unendlich fern sein; die Richtung, in der er liegt, bestimmt die Längskanten zweier symmetrischer dreiseitiger Prismen, welche $ABC$ und $A'B'C'$ zu Basen haben.

Wenn die ungleichsinnig congruenten Dreiecke $A'''B'''C'''$ und $ABC$ nicht symmetrisch liegen, so haben sie keinen Punkt, der von den Ecken des einen dieselben Entfernungen hätte, wie von den entsprechenden des andern; alsdann giebt es auf $\mathfrak{H}'$ keinen Punkt, für welchen $SA = SA'$, $SB$

$=SB'$, $SC=SC'$ wäre, also giebt es dann keinen Punkt, welcher mit $ABC$ und $A'B'C'$ congruente Tetraeder bestimmt.

Wenn daher die Systeme $\Sigma$ und $\Sigma'''$ nicht symmetrisch liegen, so haben die normalhalbirenden Ebenen der Strecken entsprechender Punkte der Systeme $\Sigma$ und $\Sigma'$ einen Punkt gemein, der auf $\mathfrak{H}$ in endlicher oder unendlicher Entfernung liegt und nicht in die Schnittlinie $\mathfrak{E}\mathfrak{E}'$ fällt.

Wenn die Systeme $\Sigma$ und $\Sigma''$ nicht zusammenfallen und $\Sigma$ und $\Sigma'''$ gegen eine Gerade $t$ symmetrisch liegen, so bestimme man die Gerade $s$ auf $\mathfrak{H}'$, deren Normalprojection auf $\mathfrak{E}$ mit $t$ zusammenfällt. Jeder Punkt von $t$ giebt alsdann mit $ABC$ und $A'B'C'$ congruente Tetraeder und $\Sigma$ und $\Sigma'$ kommen durch Drehung um $s$ zur Deckung. Der Schnittpunkt der Geraden $\mathfrak{E}\mathfrak{E}'$ mit $t$ ist in diesem Falle der selbstentsprechende Punkt von $\Sigma$ und $\Sigma''$, da $\Sigma$ und $\Sigma'''$ symmetrisch gegen $t$ und $\Sigma''$ und $\Sigma'''$ symmetrisch gegen $\mathfrak{E}\mathfrak{E}'$ liegen; daher verschwinden in diesem Falle die symmetrischen Tetraeder mit gemeinsamer Spitze und den Basen $ABC$ und $A'B'C'$. Hieraus folgt:

Wenn die Systeme $\Sigma$ und $\Sigma'''$ symmetrisch liegen und $\Sigma\Sigma''$ nicht zusammenfallen, so haben die normalhalbirenden Ebenen der Strecken entsprechender Punkte der Systeme $\Sigma$ und $\Sigma'$ eine gemeinsame Gerade $s$, welche die Kante $\mathfrak{E}\mathfrak{E}'$ trifft; jeder Punkt von $s$ bestimmt mit entsprechenden Dreiecken von $\Sigma$ und $\Sigma'$ congruente Tetraeder; der Schnittpunkt von $s$ und $\mathfrak{E}\mathfrak{E}'$ kann als gemeinsame Spitze verschwindender symmetrischer Tetraeder betrachtet werden.

Dresden. R. HEGER.

---

## XII. Ueber einen Satz von Burmester.

Herr Burmester hat folgenden, die Bewegung ebener veränderlicher Systeme betreffenden Satz ausgesprochen:*

„Die Curve, welche von den Bahnen der Punkte einer Systemcurve umhüllt wird, ist zugleich die Enveloppe verschiedener Phasen derselben Systemcurve."

Dieser Satz, welcher ursprünglich nur auf collinear-veränderliche ebene Systeme bezogen wurde, kann nicht nur auf jedes continuirlich-veränderliche ebene System übertragen werden, wie es Herr Geisenheimer bemerkt hat,** sondern auch auf ein räumliches, continuirlich-veränderliches System bezogen werden.

Die Richtigkeit dieses Satzes ist auf geometrischem Wege nicht schwer einzusehen; ich erlaube mir aber, grösserer Genauigkeit wegen, einen analytischen Beweis desselben anzuführen.

---

* Diese Zeitschrift Bd. XIX und XX.

** Diese Zeitschrift Bd. XXIV.

Es seien $a$, $b$, $c$ die Anfangscoordinaten eines Systempunktes, $x$, $y$, $z$ dessen Coordinaten zur Zeit $t$ und

$$1)\qquad x = f_1(a, b, c, t), \quad y = f_2(a, b, c, t), \quad z = f_3(a, b, c, t)$$

die Bewegungsgleichungen. Es sei weiter eine Systemfläche

$$2)\qquad F(a, b, c) = 0$$

gegeben. Es möge die Lage dieser Fläche zur Zeit $t$ durch die Gleichung

$$3)\qquad \Phi(x, y, z, t) = 0$$

bestimmt werden; wir erhalten bekanntlich diese Gleichung, wenn wir $a$, $b$, $c$ aus den Gleichungen 1) und 2) eliminiren. Die Enveloppe, welche von den Bahnen verschiedener Punkte der Fläche 2) gebildet wird, wollen wir im folgenden Sinne verstehen. Es seien $M(a, b, c)$ und $M'(a+da, b+db, c+dc)$ zwei Punkte der gegebenen Fläche, $\sigma$ und $\sigma'$ die Bahnen derselben. Diese Bahnen schneiden sich im Allgemeinen nicht; wir können jedoch die Differentiale $da$, $db$, $dc$ so wählen, dass der Durchschnitt derselben stattfindet. Da der gesuchte Durchschnittspunkt $Q$ zugleich den beiden Curven $\sigma$ und $\sigma'$ angehört, so müssen wir die genannten Differentiale so nehmen, dass die Coordinaten des Punktes $M$ auf der Curve $\sigma$ zur Zeit $t$ den Coordinaten des Punktes $M'$ auf der Curve $\sigma'$ zur Zeit $t+dt$ gleich seien. Es ist also

$$\begin{aligned} f_1(a+da,\ b+db,\ c+dc,\ t+dt) &= f_1(a, b, c, t),\\ f_2(a+da,\ b+db,\ c+dc,\ t+dt) &= f_2(a, b, c, t),\\ f_3(a+da,\ b+db,\ c+dc,\ t+dt) &= f_3(a, b, c, t) \end{aligned}$$

und folglich

$$4)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial a}da + \frac{\partial f_1}{\partial b}db + \frac{\partial f_1}{\partial c}dc + \frac{\partial f_1}{\partial t}dt &= 0,\\ \frac{\partial f_2}{\partial a}da + \frac{\partial f_2}{\partial b}db + \frac{\partial f_2}{\partial c}dc + \frac{\partial f_2}{\partial t}dt &= 0,\\ \frac{\partial f_3}{\partial a}da + \frac{\partial f_3}{\partial b}db + \frac{\partial f_3}{\partial c}dc + \frac{\partial f_3}{\partial t}dt &= 0. \end{aligned}\right.$$

Die Differentiale $da$, $db$, $dc$ müssen ausserdem der Bedingung

$$5)\qquad \frac{\partial F}{\partial a}da + \frac{\partial F}{\partial b}db + \frac{\partial F}{\partial c}dc = 0$$

genügen. Eliminiren wir aus den Gleichungen 4) und 5) die Differentiale, so erhalten wir die Gleichung

$$6)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a}, & \frac{\partial f_1}{\partial b}, & \frac{\partial f_1}{\partial c}, & \frac{\partial f_1}{\partial t}\\ \frac{\partial f_2}{\partial a}, & \frac{\partial f_2}{\partial b}, & \frac{\partial f_2}{\partial c}, & \frac{\partial f_2}{\partial t}\\ \frac{\partial f_3}{\partial a}, & \frac{\partial f_3}{\partial b}, & \frac{\partial f_3}{\partial c}, & \frac{\partial f_3}{\partial t}\\ \frac{\partial F}{\partial a}, & \frac{\partial F}{\partial b}, & \frac{\partial F}{\partial c}, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

welche, mit der Gleichung 2) verbunden, diejenige Curve auf der gegebenen Systemfläche bestimmt, für deren Punkte die Bahncurven mit den Bahncurven unendlich naher Punkte derselben Systemfläche sich zur Zeit $t$ schneiden.

Alle der Zeit $t$ entsprechende Durchschnittspunkte bilden im Raume eine Curve und wir erhalten die Gleichung derselben, wenn wir aus fünf Gleichungen 1), 2) und 6) die drei Coordinaten $a$, $b$ und $c$ eliminiren. Wenn wir aus den so erhaltenen zwei Gleichungen die Zeit $t$ oder, was dasselbe ist, $a, b, c, t$ aus den fünf Gleichungen 1), 2) und 6) eliminiren, so erhalten wir die Gleichung einer Fläche $K$, welche durch alle solche Curven gebildet wird.

Die Verallgemeinerung des Satzes von Burmester besteht darin, dass diese Fläche mit der Enveloppe verschiedener Phasen der gegebenen Systemfläche zusammenfällt. In der That kann die Gleichung dieser Enveloppe auch folgendermassen abgeleitet werden. Die Verschiebung eines Systempunktes, welcher zur Zeit $t$ sich in der Enveloppe befindet, geschieht in der Tangentialebene zur Fläche 3); sie muss daher der Bedingung

$$7)\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}=0$$

genügen. Das erste Glied dieser Gleichung wird mit der Determinante 6) identisch, wenn man nur in diese Gleichung anstatt $x$, $y$, $z$ die Variablen $a$, $b$, $c$ einführt. Wenn man nämlich in die Function $\Phi(x, y, z, t)$ mit Hilfe der Gleichungen 1) wieder $a$, $b$, $c$ einsetzt, so verwandelt sich diese Function in $F(a, b, c)$; daher

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}=\frac{\partial F}{\partial a},$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial b}=\frac{\partial F}{\partial b},$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c}+\frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c}+\frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial c}=\frac{\partial F}{\partial c}.$$

Wenn wir hieraus $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ bestimmen und in die Gleichung 7) einsetzen, erhalten wir die Gleichung 6). Es kann also die Gleichung der von der Systemfläche gebildeten Enveloppe durch die Elimination von $a, b, c, t$ aus den Gleichungen 1), 2) und 6) erhalten werden, wodurch die Identität dieser Enveloppe und der Fläche $K$ bewiesen ist.

St. Petersburg. P. Somoff.

## XIII. Ueber einen aus der Potentialtheorie hergeleiteten geometrischen Satz.

Auf einer Geraden $XY$ seien die Punkte $A$, $B$, $C$ etc. gegeben und zwar in der Reihenfolge $X, A, B, C \dots Y$. Wir setzen die zwischen je zwei benachbarten Punkten liegenden Entfernungen $AB$, $BC$, $CD$ etc. resp. gleich $a_1$, $a_2$, $a_3$ etc. Die Gerade $XY$ sei gleichmässig mit Masse belegt und zwar auf jeder Längeneinheit mit der Masseneinheit. Das Potential jeder Strecke $a_1, a_2 \dots$ für einen ausserhalb der Geraden $XY$ liegenden Punkt $P$ lässt sich leicht angeben, wenn man die Strecken $PA$, $PB$, $PC \dots$ bezüglich mit $r_1, r_2, r_3$ etc. bezeichnet. Durch Integration findet man, dass das Potential von $a_1$ für den Punkt $P$ den Werth $log\left(\frac{r_1+r_2+a_1}{r_1+r_2-a_1}\right)$ besitzt, und das Potential von $a_2$ den Werth $log\left(\frac{r_2+r_3+a_2}{r_2+r_3-a_2}\right)$. Das Potential der ganzen Strecke $a_1+a_2$ ist aber $= log\left(\frac{r_1+r_3+a_1+a_2}{r_1+r_3-a_1-a_2}\right)$. Da nun das Potential der Summe zweier Massen gleich der Summe der Potentiale der beiden Massen ist, so muss die Summe der beiden ersten Logarithmen gleich dem dritten Logarithmus sein. Hieraus folgt die Relation:

$$1)\qquad \frac{r_1+r_2+a_1}{r_1+r_2-a_1}\cdot\frac{r_2+r_3+a_2}{r_2+r_3-a_2}=\frac{r_1+r_3+a_1+a_2}{r_1+r_3-a_1-a_2}.$$

Diese Beziehung lässt sich auch direct nachweisen.

Wir wollen Gleichung 1) noch auf andere Form bringen. Das Dreieck $ABP$ habe den Umfang $S_1$, das Dreieck $BCP$ den Umfang $S_2$, das Dreieck $ACP$ den Umfang $S$, so ist

$$2)\qquad \frac{S_1}{S_1-2a_1}\cdot\frac{S_2}{S_2-2a_2}=\frac{S}{S-2(a_1+a_2)}.$$

Sei nun $d_1$ der Durchmesser des dem $\triangle ABP$ einbeschriebenen Kreises, so ist $S_1 d_1 = 4J = 2a_1 h$, wo $h$ den Abstand des Punktes $P$ von der Geraden $XY$ bedeutet, also $\frac{2a_1}{S_1}=\frac{d_1}{h}$. Demnach geht 2) über in

$$3)\qquad \frac{1}{1-\frac{d_1}{h}}\cdot\frac{1}{1-\frac{d_2}{h}}=\frac{1}{1-\frac{d}{h}},$$

wo $d$ der Durchmesser des dem $\triangle ACP$ einbeschriebenen Kreises ist.

Die Relation 1) lässt sich sofort verallgemeinern, wenn man statt der zwei Potentiale von $a_1$ und $a_2$ gleich $n$ Potentiale der Strecken $a_1$ bis $a_n$ einführt. Man erhält so folgenden Satz:

W e n n  i n  e i n e m  D r e i e c k e  $n-1$ G e r a d e  v o n  d e r  S p i t z e  $C$ n a c h  d e r  B a s i s  $AB$  g e z o g e n  w e r d e n ,  s o  g i l t  f ü r  d i e  D u r c h m e s s e r

$d_1, d_2 \ldots d_n$ der in die $n$ Theildreiecke eingezeichneten Kreise die Gleichung

$$4)\qquad \left(1-\frac{d_1}{h}\right)\left(1-\frac{d_2}{h}\right)\cdots\left(1-\frac{d_n}{h}\right)=1-\frac{d}{h},$$

worin $h$ die Höhe des Dreiecks $ABC$ und $d$ den Durchmesser des ihm einbeschriebenen Kreises bezeichnet.

Von Interesse ist folgende Bemerkung, die aus der Vertauschbarkeit der Factoren in 4) folgt. Zeichnet man im $\triangle ABC$ $n-1$ andere Gerade von $C$ nach $AB$ und zwar so, dass $n-1$ in der neuen Figur gezeichnete eingeschriebene Kreise mit $n-1$ Kreisen aus der alten Figur übereinstimmen, so muss auch der $n^{\text{te}}$ Kreis in der neuen Figur gleich den $n^{\text{ten}}$ in der alten Figur sein. — Mit Hilfe von 4) lässt sich eine Reihe geometrischer Aufgaben lösen. Wenn verlangt wird, dass im $\triangle ABC$ von $C$ nach $AB$ $n-1$ Gerade so gezogen werden sollen, dass die in den $n$ entstehenden Dreiecken gezeichneten eingeschriebenen Kreise gleich gross sind, so findet sich der Durchmesser $x$ jedes dieser Kreise aus $\left(1-\frac{x}{h}\right)^n = 1-\frac{d}{h}$, also ist die Construction geometrisch nur ausführbar, wenn $n$ eine Potenz von 2 ist. — Vergleicht man die identische Gleichung

$$(1-k)\left(1-\frac{k}{1-k}\right)\left(1-\frac{k}{1-2k}\right)\cdots\left(1-\frac{k}{1-(n-1)k}\right)=1-nk$$

mit 4), so kann man die $n$ Kreise so wählen, dass $\frac{d_1}{h}=k$, $\frac{d_2}{h}=\frac{1}{1-k}$ etc. ist; nur muss dann $nk=\frac{d}{h}$ oder $k=\frac{d}{nh}$ sein.

Zeichnet man für die $n$ Dreiecke die die Basis berührenden angeschriebenen Kreise und nennt ihre Durchmesser $\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_n$, so ist

$$\left(1-\frac{d_\lambda}{h}\right)\left(1+\frac{d_\lambda}{h}\right)=1,$$

wie sich leicht geometrisch nachweisen lässt. Man kann demnach statt 4) auch folgende Gleichung aufstellen:

$$5)\qquad \left(1+\frac{\delta_1}{h}\right)\left(1+\frac{\delta_2}{h}\right)\cdots\left(1+\frac{\delta_n}{h}\right)=1+\frac{\delta}{h},$$

wo $\delta$ der Durchmesser des die Basis berührenden angeschriebenen Kreises ist.

Leipzig. Dr. Niemöller.

---

### XIV. Bemerkung zum vorigen Aufsatze.

Den von Herrn Dr. Niemöller gefundenen Relationen 4) und 5) lässt sich eine dritte Gleichung von besonderer Einfachheit zugesellen, nämlich

$$\frac{d_1}{\delta_1}\cdot\frac{d_2}{\delta_2}\cdots\frac{d_n}{\delta_n}=\frac{d}{\delta}.$$

Dieselbe ist geometrisch leicht herzuleiten und führt mittels der Formeln

$$\frac{d}{\delta}=1-\frac{d}{h}=\frac{1}{1+\frac{\delta}{h}}$$

auf die Resultate 4) und 5) zurück.

SCHLÖMILCH.

---

## XV. Zum Schwering'schen Liniencoordinatensystem.

(Hierzu Taf. VI Fig. 7 u. 8.)

### § I.

Im Nachstehenden werde ich zeigen, wie die im obigen System höchst einfachen Gleichungsformen der Centralkegelschnitte $uv=\pm b^2$ und der Parabel $u^2-v^2=e^2$ (vergl. Bd. XXI S. 278 dieses Journals) durch Sätze der projectivischen Geometrie zu erklären sind. Die duale Herleitung der entsprechenden Gleichungen in Cartesischen Punktcoordinaten giebt die Verwandtschaft beider Systeme zu erkennen.

1. Man denke sich zwei projectivische Punktreihen. Auf jedem Träger ist der unendlich ferne Punkt bemerkenswerth. Mögen die beiden Punkte $\varrho$, $\eta_1$ heissen, die ihnen entsprechenden $\varrho_1$, $\eta$. Dann ist

$$\varrho_1\alpha_1 . \eta\alpha = const.,$$

wenn $\alpha$, $\alpha_1$ entsprechende Punkte sind.

2. Die unendlich fernen Punkte $\varrho$ und $\eta_1$ können zusammenfallen. Die Träger sind dann parallel. (Fig. 7.)

$$\xi\alpha_1=u,\quad \eta\alpha=v,\quad \xi\varrho_1=m.$$

Es ist $(u-m)v=const.$

3. Die einfachste Gleichung $uv=b^2$ resultirt nur dann, wenn der die Träger bestimmende unendlich ferne Punkt richtig gewählt wird. Hier kann jeder der unendlich fernen Punkte der beiden Kegelschnittsaxen gewählt werden.

1. Man denke sich zwei projectivische Strahlbüschel. In jedem derselben ist ein rechtwinkliges Strahlenpaar bemerkenswerth. Es seien dies die Strahlen $st$ und $s_1t_1$. Dann ist

$$tg(tz)\,tg(s_1z_1)=const.,$$

wenn $z$ und $z_1$ entsprechende Strahlen sind.

2. Der Strahl $s$ kann mit $t_1$ zusammenfallen. (Fig. 8.)

$$AB=2a,$$

$$tg(tz)=\frac{PC}{AC}=\frac{a+x}{y},$$

$$tg(s_1z_1)=\frac{PD}{DB}=\frac{a-x}{y},$$

$$\frac{a^2-x^2}{y^2}=\frac{a^2}{b^2},\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

3. Die einfachste Gleichung resultirt nur dann, wenn der Anfangspunkt der Zählung der $x$ und $y$ richtig gewählt wird, nämlich der Mittelpunkt.

In diesem Verhalten erblicken wir den wahren Zusammenhang beider Systeme.

4. Beim Kreise ist die Wahl des unendlich fernen Punktes beliebig. Immer kommt man zur einfachsten Gleichungsform.

4. Beim Kreise bestimmt die Forderung, dass $s$ mit $t_1$ zusammenfallen soll, nicht die Axen. Die Wahl derselben ist willkürlich und führt immer zur einfachsten Gleichungsform.

5. Beim Centralkegelschnitt bestimmt die Forderung: „$\varrho_1$ soll mit $\eta$ zusammenfallen und die Gleichungsform möglichst einfach sein" zwei allein mögliche Systeme.

5. Beim Centralkegelschnitt bestimmt im Allgemeinen die Forderung: „$s$ soll mit $t_1$ zusammenfallen und die Gleichungsform möglichst einfach sein" zwei allein mögliche Systeme.

6. Für die Parabel wird die vorige Darstellung illusorisch. In Liniencoordinaten haben wir die Gleichung $u^2 - v^2 = e^2$. Wenn wir den Analogieschluss machen, so müssen wir setzen

$$\frac{u}{e} = tg\,m = \frac{x + \frac{e}{2}}{y} \quad \text{und} \quad \frac{v}{e} = tg\,n = \frac{x - \frac{e}{2}}{y}.$$

Es resultirt sodann

$$e^2\left(\frac{x + \frac{e}{2}}{y}\right)^2 - e^2\left(\frac{x - \frac{e}{2}}{y}\right)^2 = e^2$$

oder

$$y^2 = 2ex.$$

7. Wir wenden dasselbe Verfahren auf die Gleichungen des Punktes und der geraden Linie an.

Es sei gegeben

$$Au + Bv + C = 0.$$

Es folgt

$$A\,tgm + B\,tgn + C = 0$$

oder

$$(A + B)x + Cy + \frac{A - B}{2}e = 0$$

oder

$$-\frac{x}{a} + y + \frac{e - 2c}{2a}e = 0$$

als Gleichung der dem Punkte entsprechenden Geraden.

Umgekehrt sei die Gleichung einer Geraden gegeben

$$ax + by + c = 0.$$

Für $x_0 = \frac{e}{2}$ sei

* Vergl.: Theorie und Anwendung der Liniencoordinaten, von K. Schwering. Leipzig, Teubner. 1884.

$$y_0 = v = \frac{\xi - \frac{e}{2}}{\eta} e$$

und für $x_1 = -\frac{e}{2}$ sei

$$y_1 = u = \frac{\xi + \frac{e}{2}}{\eta} e.$$

Es folgt dann aus $\frac{x - x_0}{y - y_0} = \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}$

$$ex + \eta y - e\xi = 0$$

als Gleichung der dem Punkte $(\xi, \eta)$ entsprechenden Geraden.

## § II.

Es sei noch gestattet, hier einige kleine Bemerkungen zum System anzuschliessen.

1. „Die unendlich ferne Gerade ist Doppeltangente einer Curve $n^{\text{ter}}$ Classe, wenn die Glieder $n^{\text{ten}}$ Grades den Factor $(u-v)^2$ und die Glieder $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades den Factor $u - v$ enthalten.“

Der Beweis folgt sofort aus dem Umstande, dass die Punkte der unendlich fernen Geraden durch die Gleichung $u - v = \alpha$ dargestellt werden.

2. Der Krümmungsradius der Curve $F(u, v) = 0$ wird gefunden durch die Formel

$$R = -\frac{1}{e} \frac{rq^2 - 2spq + tp^2}{(p+q)^3} (e^2 + (u-v)^2)^{3/2}.$$

($p$, $q$, $r$, $s$, $t$ sind Abkürzungen für die ersten und zweiten partiellen Ableitungen von $F(u, v)$ nach $u$ und $v$.)

3. Um eine Gleichung in Cartesischen Punktcoordinaten in Schwering'sche Liniencoordinaten überzuführen, dienen die Gleichungen

$$u = y + \frac{dy}{dx}(a - x), \quad v = y - \frac{dy}{dx}(a + x).$$

Bekanntlich lautet die Gleichung der Tangente

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0) = 0.$$

Nimmt man nun für $x = \pm a$ $y = u$ resp. $v$, so folgert man dieselben sofort, wenn man noch

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}} = -\frac{dy}{dx}$$

setzt.

Hierzu ein Beispiel. Die Gleichung $(x^2 - y^2)(y^2 + 4b^2) = 4b^4$ soll in Liniencoordinaten umgeformt werden. Man setze für den Augenblick $b = 1$. Durch die Substitutionsformeln

$$x = \frac{\cos 2\omega}{\cos \omega}, \quad y = \frac{\sin 2\omega}{\cos \omega}$$

erhält man mit Hilfe des Parameters $\lambda = \cos \omega$ die verlangte Gleichung in der Form

$$[3(u-v)^2 - 4uv - 16b^2]^3 = 27(u^2 - v^2)^2(u+v)^2.$$

Füchtorf, 20. März 1885. W. KRIMPHOFF.

## XIII.

# Ueber die Vertheilung der inducirten Elektricität auf einem unbegrenzten elliptischen Cylinder.

Von

Dr. RUDOLF BESSER

in Dresden.

---

Die Untersuchungen über die Vertheilung der Elektricität und Wärme, welche im Wesentlichen auf die Integration der Differentialgleichung des Potentials $\Delta V = 0$ hinauskommen, sind auf fast alle Körper, die von Flächen zweiten Grades begrenzt werden, ausgedehnt worden. Nachdem schon früher die geschlossenen Flächen zweiten Grades behandelt worden waren, hat man sodann auch ungeschlossene Flächen in das Bereich der Betrachtung gezogen, so z. B.: den Kreiscylinder durch Kirchhoff und Heine*, den Kreiskegel durch Herrn Mehler**, das Rotationsparaboloid***, bei welchem Herr Baer die Theorie der Wärmevertheilung behandelte, während sich die Formeln für die elektrische Vertheilung, wie ich mich überzeugte, ebenfalls sehr leicht aufstellen lassen, und schliesslich auch das zweitheilige Rotationshyperboloid durch Herrn Arendt†.

Ich versuche in den nachstehenden Zeilen einige der Fundamentalaufgaben, betreffend das Flächenpotential eines elliptischen Cylinders, in ähnlicher Weise und mit Anwendung derselben Methoden zu bearbeiten, wie dies von Heine a. a. O. mit den entsprechenden Aufgaben für den Kreiscylinder gethan worden ist.

Diese Aufgaben sind im Wesentlichen folgende:

1. Das Potential einer durch ihre Dichtigkeit gegebenen Flächenbelegung eines elliptischen Cylinders für äussere und innere Punkte desselben zu bestimmen;

2. das Potential für äussere und innere Punkte zu ermitteln, wenn sein Werth auf der Oberfläche des Cylinders gegeben ist.

Im Anschluss an diese beiden Aufgaben wird noch die Green'sche Belegung und Green'sche Function eines elliptischen Cylinders aufgesucht und damit das Problem der inducirten Elektricität gelöst.

---

* Crelle's Journal, Bd. 48 S. 348–376; – Heine, Kugelfunctionen, II. Bd. S. 173 flg.

** Programm des Gymnasiums zu Elbing. 1870.

*** Programm des Gymnasiums zu Cüstrin. 1881.

† Diss. Dessau, 1884.

Die Auflösung dieser Aufgaben bedarf einiger Vorbereitungen.

Es ist zunächst die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\Delta V \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

welcher jedes Potential zu genügen hat, für den elliptischen Cylinder zu integriren. Die Integration erfolgt durch Reduction obiger Gleichung auf gewöhnliche Differentialgleichungen. Die hierbei entstehende Frage, bei welchen Cylinderflächen eine Reduction dieser Gleichung auf gewöhnliche Differentialgleichungen möglich ist, wird dahin beantwortet, dass nur Cylinderflächen zweiten Grades eine Reduction zulassen. — Nachdem wir den allgemeinen Ausdruck für $V$ hergestellt haben, entwickeln wir die reciproke Entfernung zweier Punkte und gelangen dann zur Lösung unserer zwei Hauptaufgaben.

Von besonderem Interesse wird die Aufgabe dadurch, dass zu ihrer Lösung die wohl zuerst von Heine eingeführten, von ihm als „Functionen des elliptischen Cylinders" bezeichneten Functionen angewandt werden, welche sich zu den allgemeineren Lamé'schen Functionen ähnlich verhalten, wie die Cylinder- oder Bessel'schen Functionen zu den Laplace-schen Kugelfunctionen. Ich bemerke, dass diese Functionen, wie *a priori* zu erwarten war, auch bei der Lösung der auf das elliptische Paraboloid sich beziehenden Potentialaufgaben auftreten, dessen Untersuchung ich später auszuführen gedenke.

Heine behandelt von Potentialaufgaben, betreffend den elliptischen Cylinder, nur eine: das Potential für innere Punkte zu bestimmen, wenn sein Werth auf dem Mantel und den beiden Grenzflächen gegeben ist. Ich beschränke mich auf die Betrachtung eines unendlich langen Cylinders.

---

## § 1.

### Integration der Gleichung $\Delta V = 0$.

Man integrirt bekanntlich die Differentialgleichung des Potentials

$$\Delta V \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{1}$$

dadurch, dass man zunächst statt der rechtwinkligen Coordinaten $x$, $y$, $z$ orthogonale krummlinige Coordinaten $\varrho$, $\varrho_1$, $\varrho_2$ von solcher Beschaffenheit einführt, dass die den betrachteten Körper begrenzende Fläche zu einer der Schaaren $\varrho = const.$, $\varrho_1 = const.$, $\varrho_2 = const.$ gehört. Dann versucht man der Gleichung 1) durch eine partikuläre Lösung von der Form $U(\varrho) . V(\varrho_1) . W(\varrho_2)$ zu genügen, wo die Functionen $U$, $V$, $W$ nur von je einem Argumente abhängen und sich durch gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung bestimmen. Nicht für alle Flächengattungen ist eine solche Re-

duction möglich. Herr Wangerin fand*, dass sich für Rotationsflächen z. B. die Gleichung 1) nur dann in der angegebenen Weise behandeln lässt, wenn zwischen den rechtwinkligen Coordinaten $x$ und $r$ der Meridiancurve die Beziehung:

$$x + ir = F(t + iu)$$

besteht und die Function $F(t+iu)$ überdies so beschaffen ist, dass

$$\frac{F'(t+iu) \,.\, F'(t-iu)}{r^2}$$

in zwei Theile zerfällt, deren einer nur von $t$, deren anderer nur von $u$ abhängt. Die Discussion obiger Bedingung führt dann zu dem Ergebnisse, dass

$$x + ir = \frac{\alpha + \beta \sin am(t+iu)}{\alpha' + \beta' \sin am(t+iu)}$$

sein muss, wo rechts an Stelle von $\sin am$ auch $\cos am$ oder $\tan am$ stehen kann.

Die Frage, für welche Cylinderflächen die Gleichung 1) auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurückführbar ist, lässt sich mit Hilfe der von Herrn Wangerin benutzten Methode beantworten.

Ist die $x$-Axe des Coordinatensystems zugleich die Cylinderaxe, sind ferner in der $yz$-Ebene zwei orthogonale Curvenschaaren durch ihre Parameter $\varrho$ und $\varrho_1$ gegeben, deren einer die Leitcurve des Cylinders angehört, so definiren die Gleichungen:

$$2)\qquad x = x, \quad y = f(\varrho, \varrho_1), \quad z = f_1(\varrho, \varrho_1)$$

die Coordinaten eines Punktes der betrachteten Cylinderfläche.

Setzt man nun:

$$3)\qquad V = a_h \cosh x \,.\, V_h + b_h \sinh x \,.\, W_h,$$

wo $a_h$, $b_h$ und $h$ beliebige Constanten, $V_h$ und $W_h$ aber Functionen sind, die ausser von $h$ auch von $\varrho$ und $\varrho_1$ abhängen, so ergeben sich für diese die identischen Differentialgleichungen:

$$4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V_h}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 V_h}{\partial z^2} - h^2 V_h = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 W_h}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 W_h}{\partial z^2} - h^2 W_h = 0 \end{cases}$$

oder, wenn man $\varrho$ und $\varrho_1$ statt $y$ und $z$ einführt:

$$4a)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{AB}} \dfrac{\partial}{\partial \varrho}\left(\sqrt{\dfrac{B}{A}}\, \dfrac{\partial V_h}{\partial \varrho}\right) + \dfrac{1}{\sqrt{AB}} \dfrac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\sqrt{\dfrac{A}{B}}\, \dfrac{\partial V_h}{\partial \varrho_1}\right) - h^2 V_h = 0, \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{AB}} \dfrac{\partial}{\partial \varrho}\left(\sqrt{\dfrac{B}{A}}\, \dfrac{\partial W_h}{\partial \varrho}\right) + \dfrac{1}{\sqrt{AB}} \dfrac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\sqrt{\dfrac{A}{B}}\, \dfrac{\partial W_h}{\partial \varrho_1}\right) - h^2 W_h = 0, \end{cases}$$

wo sich $A$ und $B$ aus der Gleichung:

$$5)\qquad dy^2 + dz^2 = A\, d\varrho^2 + B\, d\varrho_1^2$$

bestimmen.

---

* Monatsber. d. Berl. Akad. d. W. 1878, S. 152–166.

Macht man nun mit Wangerin die Annahme:

$$V_h = \lambda\, R(\varrho) . R_1(\varrho_1),$$

wo $\lambda$ von $\varrho$ und $\varrho_1$, aber nicht von $h$ abhängt, so findet man, dass sich $R$ und $R_1$ nur dann aus gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung bestimmen lassen, wenn erstens zwischen $y$ und $z$ die Gleichung:

$$6\text{a)} \qquad y + iz = F(t + iu)$$

besteht und zweitens $F(t + iu)$ so beschaffen ist, dass

$$6\text{b)} \qquad F'(t + iu) . F'(t - iu) = g(t) + h(u).$$

$t$ und $u$ sind dabei gewisse nur von $\varrho$ bez. $\varrho_1$ abhängende Functionen. Man erhält also ganz ähnliche Bedingungen wie bei den Rotationsflächen. Die Einzelheiten der Untersuchung glaube ich hier übergehen zu dürfen, da die Wangerin'schen Formeln fast unverändert angewandt werden, und verweise deshalb auf die schon citirte Abhandlung des Herrn Wangerin.

Ist zur Abkürzung:

$$t + iu = \omega, \quad t - iu = \bar{\omega},$$

so führt die Bedingungsgleichung 6b) leicht zu der Differentialgleichung:

$$\frac{F'''(\omega)}{F'(\omega)} = \frac{F'''(\bar{\omega})}{F'(\bar{\omega})}$$

oder:

$$\frac{F'''(\omega)}{F'(\omega)} = const. = m^2.$$

Die Integration dieser Differentialgleichung dritter Ordnung aber liefert:

$$F(\omega) = F(t + iu) = \gamma + \frac{\alpha}{m} e^{m(t+iu)} + \frac{\beta}{m} e^{-m(t+iu)},$$

worin $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ neue beliebige Constanten bezeichnen. Somit folgt:

Die Differentialgleichungen 4) oder 4a) lassen sich nur dann auf gewöhnliche Differentialgleichungen reduciren, wenn zwischen den rechtwinkligen Coordinaten $y$ und $z$ der Directrix des Cylinders die Gleichung:

$$7) \qquad y + iz = \gamma + \frac{\alpha}{m} e^{m(t+iu)} + \frac{\beta}{m} e^{-m(t+iu)}$$

besteht. Dann sind $t$ und $u$ die Parameter confocaler Kegelschnitte.

Dies giebt also das weitere Resultat:

Die Differentialgleichung des Potentials

$$\Delta V = 0$$

lässt sich nur bei Cylinderflächen zweiten Grades auf gewöhnliche Differentialgleichungen reduciren.

Die Aufstellung dieser Differentialgleichungen, welche keinen Schwierigkeiten unterliegt, möge hier unterbleiben, da es bequemer ist, die Cylinderflächen zweiten Grades gesondert zu betrachten.*

* Der Nachweis, dass die Differentialgleichung 4):

$$\frac{\partial^2 V_h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_h}{\partial z^2} - h^2 V_h = 0$$

Beim elliptischen Cylinder kann die Gleichung 7) durch die einfachere Gleichung:

8) $$y + iz = c . cos(t + iu)$$

ersetzt werden, aus welcher

9) $$y = c\, cos t\, cos iu, \quad z = ic\, sin t\, sin iu$$

folgt.

Aus 9) ergiebt sich:

10) $$\frac{y^2}{c^2\, cos^2 iu} + \frac{z^2}{c^2 (cos^2 iu - 1)} = 1, \quad \frac{y^2}{c^2\, cos^2 t} - \frac{z^2}{c^2\, sin^2 t} = 1,$$

so dass die Gleichung $u = const.$ confocale Ellipsen mit den Halbaxen $c\, cos iu$ und $ic\, sin iu$, die Gleichung $t = const.$ confocale Hyperbeln mit der gemeinsamen Excentricität $c$ darstellt.

Die Gleichungen:

11) $$x = x, \quad y = c\, cos t\, cos iu, \quad z = ic\, sin t\, sin iu$$

repräsentiren daher

für $x = const.$ parallele Ebenen,
für $u = const.$ elliptische Cylinder,
für $t = const.$ hyperbolische Cylinder.

Aus ihnen folgt für das Quadrat des Linienelements $ds$ der Werth:

12) $$ds^2 = dx^2 + \psi(du^2 + dt^2),$$

wenn:

13) $$\psi = \frac{c^2}{2}(cos 2iu - cos 2t).$$

Da allgemein:

$$\psi = F'(t + iu) . F'(t - iu),$$

so ist die Bedingung 6b) erfüllt, und zwar ist:

$$g(t) = -\frac{c^2}{2} cos 2t, \quad h(u) = \frac{c^2}{2} cos 2iu.$$

Wir sind nun im Stande, die Differentialgleichungen, welche für die unbekannten Functionen bestehen, aufzustellen.

Die Gleichung 4a) für $V_h$ geht, wenn man darin die Coordinaten $\varrho$ und $\varrho_1$ mit $t$ und $u$ vertauscht, da

---

sich nur dann, wenn $y$ und $z$ durch eine Gleichung von der Form 7) verbunden sind, auf gewöhnliche Differentialgleichungen reduciren lässt, ist zum Theil schon von Herrn Weber in seiner Abhandlung „Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0$" (Math. Annal., Bd. I. S. 1–32) geführt worden (l. c. S. 27). Herr Weber nimmt indessen von vornherein an, dass die neuen Coordinaten $\xi$, $\eta$ mit den gegebenen $x$, $y$ durch eine Gleichung

α) $$x + iy = f(\xi + i\eta)$$

verbunden sind, und bestimmt unter dieser Annahme die Form von $f(\xi + i\eta)$, während wir die Nothwendigkeit jenes Zusammenhanges α) gezeigt haben.

$$A = B = \psi = \frac{c^2}{2}(\cos 2iu - \cos 2t),$$

über in:

14) $$\frac{\partial^2 V_h}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 V_h}{\partial t^2} - \frac{h^2 c^2}{2}(\cos 2iu - \cos 2t)\, V_h = 0.$$

Setzt man:

$$V_h(u, t) = U(u) \,.\, T(t),$$

so ergeben sich für $U$ und $T$ die Gleichungen:

15) $$\frac{d^2 U}{du^2} - \left(\frac{h^2 c^2}{2}\cos 2iu + k^2\right) U = 0,$$

16) $$\frac{d^2 T}{dt^2} + \left(\frac{h^2 c^2}{2}\cos 2t + k^2\right) T = 0,$$

worin $k$ eine neue willkürliche Constante bezeichnet, welche neben $h$ als Parameter in $U$ und $T$ eingeht.

Die Gleichung 15) geht durch die Substitution $u = iw$ in die der Gleichung 16) analog gebaute Gleichung:

$$\frac{d^2 U}{dw^2} + \left(\frac{h^2 c^2}{2}\cos 2w + k^2\right) U = 0$$

über; die Integration von 15) wird daher durch die von 16) geleistet.

Die durch die Gleichungen 15) und 16) definirten Functionen sind zuerst von Heine näher untersucht und von ihm Functionen erster Art des elliptischen Cylinders genannt worden.* Wir bezeichnen sie nach ihm durch $\mathfrak{E}(iu)$, bez. $\mathfrak{E}(t)$, und die zweiten partikulären Integrale von 15) und 16), die Functionen zweiter Art des elliptischen Cylinders, durch $\mathfrak{F}(iu)$, bez. $\mathfrak{F}(t)$, indem wir einstweilen von der Abhängigkeit dieser Functionen von den Parametern $h$ und $k$ noch absehen.

Heine nimmt $c = 1$ an und führt zwei Constanten $\beta$ und $s$ statt $h$ und $k$ ein, welche mit $h$ und $k$ durch die Gleichungen:

$$8\beta^2 = \frac{h^2 c^2}{2}, \quad k^2 = 4s$$

zusammenhängen.

Die Gleichung 14) wird nach dem Obigen durch Producte:

$$\mathfrak{E}(t)\,\mathfrak{E}(iu), \quad \mathfrak{E}(t)\,\mathfrak{F}(iu), \quad \mathfrak{E}(iu)\,\mathfrak{F}(t), \quad \mathfrak{F}(t)\,\mathfrak{F}(iu)$$

integrirt. Mit Rücksicht auf die Gleichung 3) finden wir dann, dass sich die Lösung der Gleichung:

$$\Delta V = 0$$

aus Partikularlösungen von den Formen:

$\cosh hx\, \mathfrak{E}(iu)\,\mathfrak{E}(t)$, $\cosh hx\, \mathfrak{E}(iu)\,\mathfrak{F}(t)$, $\cosh hx\, \mathfrak{F}(iu)\,\mathfrak{E}(t)$, $\cosh hx\, \mathfrak{F}(iu)\,\mathfrak{F}(t)$,
$\sinh hx\, \mathfrak{E}(iu)\,\mathfrak{E}(t)$, $\sinh hx\, \mathfrak{E}(iu)\,\mathfrak{F}(t)$, $\sinh hx\, \mathfrak{F}(iu)\,\mathfrak{E}(t)$, $\sinh hx\, \mathfrak{F}(iu)\,\mathfrak{F}(t)$

zusammensetzt.

---

* Kugelfunctionen I, S. 401, 404, 405 flg.

Die allgemeine Lösung $V$ erhält man durch Summation aller besonderen Lösungen, die dadurch entstehen, dass man den Parametern $h$ und $k$ alle zulässigen Werthe beilegt. Denkt man sich $V$, als Function von $x$ betrachtet, in ein Fourier'sches Integral entwickelt, so folgt, dass man nach $h$ integriren darf, während man für jedes einzelne $h$ eine unendliche Menge von $k$ findet und also alle Partikularlösungen, die zu demselben $h$ gehören, zu summiren sind.

$V$ lässt sich sonach unter der Form:

$$V=\int_0^\infty dh(a_h \cos hx\, V_h + b_h \sin hx\, W_h)$$

darstellen, wo $V_h$ und $W_h$ Aggregate von Producten der $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{F}$ sind.

## § 2.

### Entwickelung der Functionen erster Art des elliptischen Cylinders.*

Zur weiteren Entwickelung der Functionen $\mathfrak{C}$ gehen wir am bequemsten von der Gleichung 16) aus, welche lautet:

$$16)\qquad \frac{d^2\mathfrak{C}}{dt^2}+\left(\frac{h^2c^2}{2}\cos 2t+k^2\right)\mathfrak{C}=0.$$

Heine integrirt diese Gleichung durch die trigonometrische Reihe

$$17)\qquad \mathfrak{C}=\tfrac{1}{2}c_0+\sum_1^\infty{}^n (c_n \cos nt + s_n \sin nt).$$

Die Substitution von 17) in 16) ergiebt die Gleichung:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}c_0\left(k^2+\frac{\lambda^2}{2}\cos 2t\right)&+\sum_1^\infty{}^n \Big\{c_n(k^2-n^2)\cos nt+\frac{\lambda^2}{4}c_n\cos(n-2)t\\&\qquad+\frac{\lambda^2}{4}c_n\cos(n+2)t\Big\}\\&+\sum_1^\infty{}^n\Big\{s_n(k^2-n^2)\sin nt+\frac{\lambda^2}{4}s_n\sin(n-2)t\\&\qquad+\frac{\lambda^2}{4}s_n\sin(n+2)t\Big\}=0,\end{aligned}$$

wobei zur Abkürzung $hc=\lambda$ gesetzt worden ist. Hieraus erhält man folgende Gleichungen zur Bestimmung der $c_n$ und $s_n$:

---

* Ueber die Integration der Gleichung 16) handelt neuerdings Herr Lindemann (Math. Ann., Bd. 22, S. 117—123). Er betrachtet aber nicht unsern Fall, bei welchem die Auswahl der Constanten $k$ beschränkt ist, sondern integrirt die Gleichung mit Anwendung Hermite'scher Methoden für beliebige $h$ und $k$.

Vorher ist diese Gleichung auch von Herrn Émile Mathieu in seiner Abhandlung „Sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique" (Journ. v. Liouville, II. Serie, T. XIII S. 137—203) behandelt worden.

$$
18a)\quad \begin{aligned}
&\tfrac{1}{2} q_0 c_0 + c_2 = 0,\\
&c_0 + q_2 c_2 + c_4 = 0,\\
&c_2 + q_4 c_4 + c_6 = 0,\\
&\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

und als allgemeine Gleichung:

$$
c_{2m-2} + q_{2m} c_{2m} + c_{2m+2} = 0, \quad \dots\dots \quad m = 1, 2, 3, \dots
$$

Ferner:

$$
18b)\quad \begin{aligned}
&(q_1 + 1) c_1 + c_3 = 0,\\
&c_1 + q_3 c_3 + c_5 = 0,\\
&\dots\dots\dots\\
&c_{2m-1} + q_{2m+1} c_{2m+1} + c_{2m+3} = 0,\\
&m = 1, 2, 3, \dots;
\end{aligned}
$$

dann:

$$
18c)\quad \begin{aligned}
&s_2 q_2 + s_4 = 0,\\
&s_2 + s_4 q_4 + s_6 = 0,\\
&\dots\dots\dots\\
&s_{2m-2} + s_{2m} q_{2m} + s_{2m+2} = 0,\\
&\dots\dots\dots\\
&m = 2, 3, \dots;
\end{aligned}
$$

endlich:

$$
18d)\quad \begin{aligned}
&(q_1 - 1) s_1 + s_3 = 0,\\
&s_1 + q_3 s_3 + s_5 = 0,\\
&\dots\dots\dots\\
&s_{2m-1} + q_{2m+1} s_{2m+1} + s_{2m+3} = 0,\\
&m = 1, 2, 3, \dots
\end{aligned}
$$

Dabei ist überall

$$
q_n = \frac{4(k^2 - n^2)}{\lambda^2} = \frac{4(k^2 - n^2)}{h^2 c^2}.
$$

Diese Gleichungen, aus denen man alle $c_n$ und $s_n$ durch $c_0$, $c_1$ bez. $s_0$ und $s_1$ ausdrücken kann, zeigen, dass für jedes $h$ die Functionen $\mathfrak{E}$ in vier Classen zerfallen, von denen die erste und zweite nach den Cosinus der geraden und ungeraden, die dritte und vierte nach den Sinus der ungeraden und geraden Vielfachen von $t$ fortschreitet. Bezeichnet man daher durch $\mathfrak{E}^{I}$, $\mathfrak{E}^{II}$, $\mathfrak{E}^{III}$ und $\mathfrak{E}^{IV}$ diese vier Classen, so ist:

$$
19)\quad \begin{aligned}
\mathfrak{E}^{I}(t) &= \tfrac{1}{2} c_0 + c_2 \cos 2t + c_4 \cos 4t + \dots,\\
\mathfrak{E}^{II}(t) &= c_1 \cos t + c_3 \cos 3t + \dots,\\
\mathfrak{E}^{III}(t) &= s_1 \sin t + s_3 \sin 3t + \dots,\\
\mathfrak{E}^{IV}(t) &= s_2 \sin 2t + s_4 \sin 4t + \dots
\end{aligned}
$$

Die Coefficienten $c$ und $s$ jeder Reihe hängen vom ersten Coefficienten ab und sind im Uebrigen ganze Functionen von $k^2$ und $\lambda^{-2}$.

Man erkennt leicht die Analogie der vier Classen der $\mathfrak{E}$ mit den vier Classen der Lamé'schen Functionen; sie lassen sich aber nicht wie diese durch endliche Reihen darstellen. Denn setzt man in die Gleichung 16) statt der unendlichen Reihe 17) eine mit $\cos nt$ und $\sin nt$ abbrechende endliche Reihe ein, bestimmt dann die Coefficienten $c$ und $s$ aus den Gleichungen 18), so würden diese, was z. B. die $c$ anlangt, mit

$$c_n = 0, \quad c_n q_n + c_{n-2} = 0$$

abschliessen. $c_n$ ist der Coefficient von $\cos(n+2)t$, $c_n q_n + c_{n-2}$ der Coefficient von $\cos nt$. Diese Gleichungen sind aber nur durch $c_n = 0$, $c_{n-2} = 0$ zu erfüllen, und dann würden auch alle anderen $c$, also $c_{n-4}$, $c_{n-6}$, ... gleich Null sein müssen. Das Gleiche gilt von den $s$. Hierdurch ist die Richtigkeit der vorigen Behauptung erwiesen. Damit aber die Reihen 19) convergiren, müssen in ihnen die unendlich weit entfernten Coefficienten verschwinden. Diese Bedingung, welche sich, wie Heine zeigt, auch als das Verschwinden der unendlich entfernten Näherungsnenner und -Zähler zweier Kettenbrüche darstellen lässt, giebt eine Gleichung unendlich hohen Grades in $k$ und $h$, aus der sich für jedes $h$ unendlich viele Lösungen $k$ ergeben. Dieselben mögen der Reihe nach mit $k_0$, $k_1$, $k_2$, ... bezeichnet werden. Es ist nicht schwierig, die ungefähre Form dieser Gleichungen festzustellen. So findet man z. B., dass sich $c_{2m}$ durch eine Gleichung der Form

$$\text{20)} \qquad c_{2m} = c_0[(q_{2m-2} q_{2m-4} \cdots q_0) + G_{m-2} + G_{m-4} + \cdots]$$

ausdrückt, worin die $G$ Aggregate von $q$-Producten sind, deren jedes aus soviel Factoren $q$ besteht, als der Index von $G$ angiebt. Der erste Posten besteht aus $m$ Factoren $q$, in den folgenden fällt die Factorenzahl immer um 2, mithin, da jeder Factor $q$ vom zweiten Grade in $k$ und $\lambda^{-1}$ ist, der Grad in $k$ und $\lambda^{-1}$ um 4. Hebt man $\lambda^{-2m}$ aus, so kann man auch

$$\text{21)} \qquad c_{2m} = \frac{C}{\lambda^{2m}}[(k^2 - \overline{2m-2}^2)(k^2 - \overline{2m-4}^2)\ldots(k^2 - 2^2).k^2 + \lambda^4.G_{m-2} + \lambda^8.G_{m-4} + \cdots]$$

setzen. Aehnliche Formen besitzen auch die Werthe für $c_{2m+1}$, $s_{2m}$ und $s_{2m+1}$.

Die Integrale der Differentialgleichung 15) ergeben sich nach früheren Bemerkungen aus denen der Gleichung 16) durch Vertauschung von $t$ mit $iu$. Sie lauten also:

$$\text{22)} \qquad \begin{aligned} \mathfrak{C}^{I}(iu) &= \tfrac{1}{2}c_0 + c_2 \cos 2iu + c_4 \cos 4iu + \ldots, \\ \mathfrak{C}^{II}(iu) &= c_1 \cos iu + c_3 \cos 3iu + \ldots, \\ \mathfrak{C}^{III}(iu) &= s_1 \sin iu + s_3 \sin 3iu + \ldots, \\ \mathfrak{C}^{IV}(iu) &= s_2 \sin 2iu + s_4 \sin 4iu + \ldots, \end{aligned}$$

worin die Coefficienten $c$ und $s$ genau dieselben Werthe wie in 19) haben.

Noch sei bemerkt, dass man durch die Substitution:

$$c \sin t = x$$

die Integrale 19) in Form von Potenzreihen darstellen kann, nämlich:

$$\text{23)} \qquad \begin{aligned} \mathfrak{C}^{I}(x) &= a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \ldots, \\ \mathfrak{C}^{II}(x) &= a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \ldots, \\ \mathfrak{C}^{III}(x) &= \sqrt{c^2 - x^2}(b_0 + b_2 x^2 + b_4 x^4 + \ldots), \\ \mathfrak{C}^{IV}(x) &= x\sqrt{c^2 - x^2}(b_1 + b_3 x^2 + b_5 x^4 + \ldots). \end{aligned}$$

Da für jeden Werth von $h$ unendlich viele Constanten $k$ existiren, so findet man für jedes $h$ unendlich viele Functionen $\mathfrak{E}(t)$. Das zu $k_\nu$ gehörige $\mathfrak{E}$ möge ausführlich durch $\mathfrak{E}_\nu(t, h, k_\nu)$, kürzer in der Regel durch $\mathfrak{E}_\nu(t)$ bezeichnet werden.

Heine zeigt*, wie man angenähert die Parameter $k$ finden kann.

Am Schlusse dieses Paragraphen mögen noch einige Specialwerthe der $\mathfrak{E}(t)$ und $\mathfrak{E}(iu)$ angegeben werden.

Für $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, d. h. in den Endpunkten der Axen der Ellipse $u = const.$, erhalten die $\mathfrak{E}(t)$ folgende Werthe:

$$24)\quad \begin{aligned} &\mathfrak{E}^{I}(0) = \tfrac{1}{2}c_0 + c_2 + c_4 + \ldots = C_1, && \mathfrak{E}^{I}(\pi) = \tfrac{1}{2}c_0 + c_2 + c_4 + \ldots = C_1, \\ &\mathfrak{E}^{II}(0) = c_1 + c_3 + c_5 + \ldots = C_2, && \mathfrak{E}^{II}(\pi) = -c_1 - c_3 - c_5 - \ldots = -C_2, \\ &\mathfrak{E}^{III}(0) = 0, && \mathfrak{E}^{III}(\pi) = 0, \\ &\mathfrak{E}^{IV}(0) = 0, && \mathfrak{E}^{IV}(\pi) = 0, \end{aligned}$$

ferner:

$$25)\quad \begin{aligned} &\mathfrak{E}^{I}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}c_0 - c_2 + c_4 - \ldots = C'_1, && \mathfrak{E}^{I}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}c_0 - c_2 + c_4 - \ldots = C'_1, \\ &\mathfrak{E}^{II}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, && \mathfrak{E}^{II}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0, \\ &\mathfrak{E}^{III}\left(\frac{\pi}{2}\right) = s_1 - s_3 + s_5 - \ldots = S_1, && \mathfrak{E}^{III}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -s_1 + s_3 - s_5 + \ldots = -S_1, \\ &\mathfrak{E}^{IV}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, && \mathfrak{E}^{IV}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Die Werthe der $\mathfrak{E}$ in symmetrisch gelegenen Punkten einer Ellipse können sich nur im Vorzeichen unterscheiden, da für solche Punkte $t$ die Werthe $t$, $\pi - t$, $\pi + t$, $2\pi - t$ hat. Folgende kleine Tabelle soll dies darstellen. Dabei sind die $\mathfrak{E}$ für Winkel im ersten Quadranten positiv angenommen worden.

26)

| Classe: | 0: | 1. Quadr.: | $\frac{\pi}{2}$: | 2. Quadr.: | $\pi$: | 3. Quadr.: | $\frac{3\pi}{2}$: | 4. Quadr.: |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I. | $C_1$ | + | $C'_1$ | + | $C_1$ | + | $C'_1$ | + |
| II. | $C_2$ | + | 0 | − | $-C_2$ | − | 0 | + |
| III. | 0 | + | $S_1$ | + | 0 | − | $-S_1$ | − |
| IV. | 0 | + | 0 | − | 0 | + | 0 | − |

Endlich findet man noch für $u = 0$:

$$27)\quad \begin{aligned} &\mathfrak{E}^{I}(0) = \tfrac{1}{2}c_0 + c_2 + c_4 + \ldots = C_1, \\ &\mathfrak{E}^{II}(0) = c_1 + c_3 + \ldots = C_2, \\ &\mathfrak{E}^{III}(0) = 0, \\ &\mathfrak{E}^{IV}(0) = 0, \end{aligned}$$

wie $\mathfrak{E}(t)$ für $t = 0$.

* Kugelfunctionen, I. Bd S. 406–412.

Aus diesen Gleichungen folgt, dass das Product $\mathfrak{E}(t).\mathfrak{E}(iu)$ im Coordinatenanfang, also für $t=\frac{\pi}{2}$, $u=0$, oder auch für Punkte auf der Cylinderaxe verschwindet, wenn die Functionen $\mathfrak{E}$ von 2., 3., 4. Classe sind, dagegen für $\mathfrak{E}$ der 1. Classe $=C_1^2$ ist. Für Punkte, die auf den Axen der Directrix oder einer zu ihr parallelen Ellipse liegen, verschwindet dies Product aber nur für zwei Classen der $\mathfrak{E}$.

## § 3.

### Integraleigenschaften der Functionen $\mathfrak{E}$ mit reellem Argumente. Entwickelung gegebener Functionen nach den $\mathfrak{E}$.

Die Functionen $\mathfrak{E}(t)$ besitzen zwei Arten von Integraleigenschaften, welche sie, ebenso wie die trigonometrischen, die Kugel- und Lamé'schen Functionen, zur Vornahme von Entwickelungen gegebener Functionen geeignet machen. Ich betrachte hier nur die erste Art dieser Integraleigenschaften, welche auf die Verwandtschaft der $\mathfrak{E}$ mit den Kreisfunctionen hinweist, und welche auch Heine erwähnt (Kugelfunct. I, S. 415), ohne sie indess abzuleiten.

Seien $\mathfrak{E}_\mu$ und $\mathfrak{E}_\nu$ zwei Functionen $\mathfrak{E}(t)$, die zu gleichem $h$, aber zwei verschiedenen Werthen $k_\mu$ und $k_\nu$ von $k$ gehören sollen. Sie genügen den Gleichungen:

$$\frac{d^2\mathfrak{E}_\mu}{dt^2}+\left(\frac{h^2c^2}{2}\cos 2t+k_\mu^2\right)\mathfrak{E}_\mu=0,$$

$$\frac{d^2\mathfrak{E}_\nu}{dt^2}+\left(\frac{h^2c^2}{2}\cos 2t+k_\nu^2\right)\mathfrak{E}_\nu=0.$$

Aus diesen folgt:

$$\mathfrak{E}_\mu\frac{d^2\mathfrak{E}_\nu}{dt^2}-\mathfrak{E}_\nu\frac{d^2\mathfrak{E}_\mu}{dt^2}=(k_\nu^2-k_\mu^2)\,\mathfrak{E}_\nu\mathfrak{E}_\mu,$$

mithin durch Integration nach $t$ zwischen 0 und $2\pi$:

$$(k_\nu^2-k_\mu^2)\int_0^{2\pi}\mathfrak{E}_\nu\mathfrak{E}_\mu.dt=\left[\mathfrak{E}_\mu\frac{d\mathfrak{E}_\nu}{dt}-\mathfrak{E}_\nu\frac{d\mathfrak{E}_\mu}{dt}\right]_0^{2\pi}.$$

Nun verschwindet aber die rechte Seite dieser Gleichung, wie eine einfache Rechnung lehrt, an den Grenzen 0 und $2\pi$ stets, sofern nicht die Functionen $\mathfrak{E}_\mu$ und $\mathfrak{E}_\nu$ derselben Classe angehören und $k_\mu=k_\nu$ ist. Dann ist aber die Gleichung an sich identisch. Man findet also, da $k_\mu^2-k_\nu^2$ nicht $=0$, dass:

$$\text{28)}\qquad \int_0^{2\pi}\mathfrak{E}_\mu(t)\,\mathfrak{E}_\nu(t)\,dt=0,\quad \mu\neq\nu.$$

Für $\mu=\nu$ besteht diese Gleichung nicht mehr, da dann die zu integrirende Function, $[\mathfrak{E}_\mu(t)]^2$, stets positiv ist, das Integral also nicht verschwinden

kann. Es ist vielmehr gleich einer gewissen Constanten, deren Werth von dem Werthe des Anfangsgliedes in der Entwickelung von $\mathfrak{E}_\mu$ abhängt. Wir denken uns dasselbe so bestimmt, dass die Constante $= \pi$ gesetzt werden kann, so dass:

$$28\text{a)} \qquad \int_0^{2\pi} [\mathfrak{E}_\mu(t)]^2 \, dt = \pi.$$

Die Gründe für diese Wahl werden später erhellen.

Man bemerkt, dass diese Formeln den bekannten Integraleigenschaften der Kreisfunctionen:

$$\int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos n\varphi \, d\varphi = 0, \quad m \neq n,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin m\varphi \sin n\varphi \, d\varphi = 0, \quad m \neq n,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos m\varphi \sin n\varphi \, d\varphi = 0$$

entsprechen. Für $m = n$ nehmen die beiden ersten Integrale den gemeinsamen Werth $\pi$ an, mit Ausschluss des Falles $m = n = 0$.*

Mit Benutzung der Gleichungen 28) und 28a) löst man die Aufgabe:

Die von $t$ abhängende Function $f(t)$ in eine nach den Functionen $\mathfrak{E}(t)$ fortschreitende Reihe zu entwickeln.

Setzt man nämlich:

$$29) \qquad f(t) = \sum_0^\infty{}_\nu \, a_\nu \mathfrak{E}_\nu(t, h, k_\nu),$$

---

* Für die Functionen $\mathfrak{E}(iu)$ scheinen ähnliche Integraleigenschaften nicht zu existiren. Aus der Differentialgleichung 15) für $\mathfrak{E}(iu)$:

$$15) \qquad \frac{d^2 \mathfrak{E}(iu)}{du^2} - \left(\frac{h^2c^2}{2} \cos 2iu + k^2\right) \mathfrak{E}(iu) = 0,$$

erhält man zwar gerade wie vorher, falls $\mathfrak{E}_\mu$ und $\mathfrak{E}_\nu$ zwei verschiedene $\mathfrak{E}(iu)$ bedeuten:

$$\left[\mathfrak{E}_\mu \frac{d\mathfrak{E}_\nu}{du} - \mathfrak{E}_\nu \frac{d\mathfrak{E}_\mu}{du}\right]_a^b = (k_\mu^2 - k_\nu^2) \cdot \int_a^b \mathfrak{E}_\mu \cdot \mathfrak{E}_\nu \cdot du,$$

aber es lassen sich keine Grenzen $a$ und $b$ angeben, für die die linke Seite dieser Gleichung verschwände. Dies abweichende Verhalten der Functionen $\mathfrak{E}(iu)$ ist darin begründet, dass für $c = 0$ sich die $\mathfrak{E}(iu)$ in Bessel'sche Functionen mit imaginärem Argumente verwandeln, während die $\mathfrak{E}(t)$ in Kreisfunctionen übergehen. Für die Cylinderfunctionen existiren aber Integraleigenschaften, die denen für die Kreisfunctionen entsprechen, nicht.

wo alle $\mathfrak{C}(t)$ zu demselben $h$ gehören und die Summation sich auf alle zu jenem $h$ gehörenden unendlich vielen Werthe von $k$ bezieht, so folgt sogleich:

$$30)\qquad a_\nu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathfrak{C}_\nu(t, h, k_\nu)\,dt,$$

womit die gestellte Aufgabe gelöst ist.

Ist $f(t)$ identisch Null, so verschwinden alle $a_\nu$, d. h.: Ist die Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu \mathfrak{C}_\nu(t) = 0$ für alle $t$ im Intervalle Null bis $2\pi$, so müssen die Coefficienten $a_\nu$ einzeln verschwinden.

Daraus folgt weiter:

Stimmen zwei nach den $\mathfrak{C}(t)$ fortschreitende Reihen für alle $t$ überein, so müssen die Coefficienten gleicher $\mathfrak{C}(t)$ gleich sein.

**Zusatz.** Durch die Formeln 29) und 30) wird eine Function $f(t)$ entwickelt, deren Argument $t$ zwischen 0 und $2\pi$ variirt, oder welche für alle Punkte einer Ellipse gegeben ist. Ich füge noch die Entwickelung einer auf der Oberfläche eines unendlich langen elliptischen Cylinders gegebenen Function bei, welche neben $t$ auch von $x$ abhängt, wobei $x$ zwischen $-\infty$ und $+\infty$ sich bewegt.

Wir entwickeln die vorgelegte Function $F(x, t)$ nach $x$ in ein Fourier'sches Integral. Hierzu ist, wie Herr C. Neumann zeigte,* im Allgemeinen erforderlich, dass $F(x)$ im Intervalle $-\infty$ bis $+\infty$ endlich und abtheilungsweise stetig, und $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x, t)\,\partial x$ endlich sei. Diese Entwickelung ist also für eine von $x$ unabhängige Function nicht mehr giltig. — Man findet:

$$a)\qquad F(x, t) = \int_0^\infty A_h(t)\cos hx\,dh + \int_0^\infty B_h(t)\sin hx\,dh,$$

wo $A_h$ und $B_h$ nur noch von $t$ abhängen und sich durch Integrale ausdrücken. Beide Functionen sind nach dem Vorigen durch eine nach den Functionen $\mathfrak{C}_\nu(t)$ fortschreitende Reihe darstellbar. Nach Substitution der Reihen in a) erhält man das Resultat:

Für jede auf der Oberfläche eines elliptischen Cylinders gegebene Function $F(x, t)$ existirt eine Entwickelung:

$$31)\qquad F(x, t) = \int_0^\infty dh \sum_0^\infty{}^\nu\, [a_\nu(h)\cos hx + b_\nu(h)\sin hx]\,\mathfrak{C}_\nu(t, h, k_\nu),$$

wobei:

---

* Ueber die nach Kreis-, Kugel- und Cylinderfunctionen fortschreitenden Entwickelungen etc. Leipzig 1881. S. 70.

$$a_\nu(h) = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{E}_\nu(t)\cos hx\, F(x,t)\,dt\,dx,$$

$$b_\nu(h) = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{E}_\nu(t)\sin hx\, F(x,t)\,dt\,dx.$$

Man kann der Gleichung 31) auch folgende symbolische Form geben:

$$\text{31 a)}\quad F(x,t) = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\infty} dh \sum_0^{\infty}{}^{\nu}\, \mathfrak{E}_\nu(t)\int\limits_0^{2\pi}\mathfrak{E}_\nu(\psi)\,d\psi\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\xi,\psi)\cos h(\xi - x)\,d\xi.$$

## § 4.

### Die Functionen zweiter Art $\mathfrak{F}(iu)$ des elliptischen Cylinders. Verhalten von $\mathfrak{E}(iu)$ und $\mathfrak{F}(iu)$ für sehr grosse Argumente.

Wir geben der Differentialgleichung 16) für $\mathfrak{E}(iu)$ und $\mathfrak{F}(iu)$ durch die Substitution:

a) $$ic\sin iu = \varrho$$

die Form:

b) $$(\varrho^2 + c^2)\frac{d^2y}{d\varrho^2} + \varrho\frac{dy}{d\varrho} - (h^2\varrho^2 + k_1^2)y = 0,$$

wo:

$$k_1^2 = k^2 + \frac{h^2c^2}{2}.$$

Aus ihren Integralen, welche mit $\mathfrak{E}(\varrho)$ und $\mathfrak{F}(\varrho)$ bezeichnet werden sollen, können wir durch die Substitution a) sofort $\mathfrak{E}(iu)$ und $\mathfrak{F}(iu)$ bilden. — Aus b) folgt:

c) $$\mathfrak{F}(\varrho)\frac{d\mathfrak{E}}{d\varrho} - \mathfrak{E}(\varrho)\frac{d\mathfrak{F}}{d\varrho} = \frac{\Gamma}{\sqrt{\varrho^2 + c^2}}$$

und:

d) $$\mathfrak{F}(\varrho) = \Gamma\mathfrak{E}(\varrho)\int\limits_\varrho^\infty \frac{d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + c^2}\,[\mathfrak{E}(\varrho)]^2}.$$

Zur Bestimmung der Constanten $\Gamma$ setze man in c) oder d) für $\varrho$ einen unendlich grossen Werth ein. Dann lassen sich die Beträge von $\mathfrak{E}(\varrho)$ und $\mathfrak{F}(\varrho)$ *a priori* angeben, da man in der Gleichung b) bei dem Factor $\varrho^2 + c^2$ von $\frac{d^2y}{d\varrho^2}$ $c^2$ gegen das unendlich grosse $\varrho^2$ vernachlässigen kann und so die einfachere Gleichung:

$$\varrho^2\frac{d^2y}{d\varrho^2} + \varrho\frac{dy}{d\varrho} - (h^2\varrho^2 + k_1^2)\,y = 0$$

erhält. Deren Integrale sind aber die Cylinderfunctionen $J_{k_1}(hi\varrho)$ und $Y_{k_1}(hi\varrho)$. Für sehr grosse Werthe von $\varrho$ nehmen also die Functionen des elliptischen Cylinders $\mathfrak{E}(\varrho)$ und $\mathfrak{F}(\varrho)$ angenähert die Werthe der Functionen

des Kreiscylinders $J_{k_1}(hi\varrho)$, $Y_{k_1}(hi\varrho)$ an. Und da, wie aus a) folgt, mit $\varrho$ auch $u$ unendlich wird, so gilt das Gleiche auch von den Functionen $\mathfrak{E}(iu)$, $\mathfrak{F}(iu)$.

Nun giebt Heine* folgende Formeln, in denen statt des Index $\nu$ $k_1$, statt $K$ für die Function zweiter Art $Y$ geschrieben worden ist:

$$J_{k_1}(p+qi)=\frac{i^{k_1}e^{q-pi}}{\sqrt{2q\pi}},\quad Y_{k_1}(p+qi)=(-i)^{k_1}e^{-q+pi}\sqrt{\frac{\pi}{2q}}.$$

giltig für positive unendlich grosse $q$. In unserem Falle ist $q=h\varrho$, also positiv, da $h$ und $\varrho$ es sind, mithin können beide Formeln angewandt werden, und geben, wenn $p=0$, $q=h\varrho$ gesetzt wird:

$$\text{e)}\qquad J_{k_1}(h\varrho i)=\frac{i^{k_1}e^{h\varrho}}{\sqrt{2\pi h\varrho}},\quad Y_{k_1}(h\varrho i)=(-i)^{k_1}e^{-h\varrho}\sqrt{\frac{\pi}{2h\varrho}}.$$

Dieselben Werthe haben also auch $\mathfrak{E}(\varrho)$ und $\mathfrak{F}(\varrho)$. — Setzt man dies in d) ein, führt rechts die Integration aus, wobei im Nenner des Integranden einfach $\varrho$ statt $\sqrt{\varrho^2+c^2}$ geschrieben werden darf, so erkennt man, dass

$$\Gamma=1$$

wird. Dasselbe Ergebniss liefert auch Gleichung c).

Ersetzen wir in c) und d) $\varrho$ durch $u$, so resultirt:

$$\text{32)}\qquad \mathfrak{F}(iu)\frac{d\mathfrak{E}(iu)}{du}-\mathfrak{E}(iu)\frac{d\mathfrak{F}(iu)}{du}=1,$$

$$\text{33)}\qquad \mathfrak{F}(iu)=\mathfrak{E}(iu)\int_u^\infty\frac{du}{[\mathfrak{E}(iu)]^2}.$$

Setzt man endlich in e) $\varrho=\infty$, so folgt:

$$\text{34)}\qquad \mathfrak{E}(iu)=\infty,\quad \mathfrak{F}(iu)=0,\quad u=\infty$$

für jedes $h$ und $k$.

## § 5.

### Betrachtung zweier Specialfälle.

Ist $h=0$ oder $c=0$, so lassen sich die Integrale von 15) und 16) sofort angeben, was des Folgenden wegen hier geschehen soll.

Für $h=0$ lauten die Gleichungen 15) und 16):

$$\frac{d^2\mathfrak{E}(t)}{dt^2}+k^2\mathfrak{E}(t)=0,$$

$$\frac{d^2\mathfrak{E}(iu)}{du^2}-k^2\mathfrak{E}(iu)=0;$$

also gehen die Functionen $\mathfrak{E}_\nu(t)$ in $\cos kt$, $\sin kt$, die Functionen $\mathfrak{E}_\nu(iu)$ in $\cos kiu$, $\sin kiu$ über, wobei für die Constanten $k$ die ganzen Zahlen zu

* Kugelfunctionen II. Bd., Anhang S. 367.

nehmen sind, wie aus den Gleichungen 18), die man sich zuvor mit $k^2c^2$ multiplicirt zu denken hat, hervorgeht. Der constante Factor, mit dem die $\mathfrak{C}(t)$ noch behaftet sind, sei $=1$; dagegen setze man für $k=0$ $\mathfrak{C}_0(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}$, damit die Integralformel

$$\int_0^{2\pi} [\mathfrak{C}_k(t)]^2\, dt = \pi$$

auch für $k=0$ gelte.

$\mathfrak{F}(iu)$ verwandelt sich in $\frac{1}{k}e^{-ku}$, wobei der Factor $\frac{1}{k}$ der Gleichungen 32) und 33) wegen nicht fehlen darf.

Ist $c=0$, d. h. tritt an die Stelle des elliptischen Cylinders ein Kreiscylinder, so sind statt der elliptischen Coordinaten $t$, $u$ die gewöhnlichen Polarcoordinaten $r$, $\varphi$ einzuführen, was durch die Substitutionen

$$u=\omega+\log r,\quad t=\varphi,\quad c=2e^{-\omega},$$
$$\omega=\infty$$

geschieht. In den Gleichungen 9) darf $c$ nicht $=0$ gesetzt werden. Die Ausdrücke:

$$\frac{c}{2}(e^u+e^{-u}),\quad \frac{c}{2}(e^u-e^{-u}),$$

welche die Axen der Ellipse $u=const.$ repräsentiren, gehen für $\omega=\infty$ beide in $r$ über, während für ein endliches $\omega$ $r$ die halbe Summe der Axen bedeutet.

Gleichung 15) lautet in $r$:

$$\text{35)}\qquad \frac{d^2y}{dr^2}r^2+\frac{dy}{dr}r-\left(h^2r^2+\frac{h^2e^{-4\omega}}{r^2}+k^2\right)y=0,$$

also für $\omega=\infty$:

$$\frac{d^2y}{dr^2}r^2+\frac{dy}{dr}r-(h^2r^2+k^2)y=0.$$

Demnach werden die Functionen $\mathfrak{C}_\nu(iu)$, $\mathfrak{F}_\nu(iu)$ ersetzt durch die Cylinderfunctionen $J_k(hir)$, $Y_k(hir)$, was ohne Weiteres evident ist. — Die $\mathfrak{C}_\nu(t)$ gehen, wie im ersten Falle, in $\cos k\varphi$, $\sin k\varphi$ über.

Denkt man sich das Product:

$$\mathfrak{C}_\nu(iu)\,\mathfrak{F}_\nu(iu_1)\,\mathfrak{C}_\nu(t)\,\mathfrak{C}_\nu(t_1)$$

entsprechend den vier Classen der $\mathfrak{C}$ in seine vier Theile zerlegt, so erkennt man, dass für $c=0$ sich dasselbe in:

$$\frac{\varepsilon_k}{2}J_k(hir)\,Y_k(hir_1)\cos k(\varphi-\varphi_1)$$

verwandelt, wobei $\varepsilon_k=1$ für $k=0$, $\varepsilon_k=2$ für $k=1,2,\ldots$ Die Hinzufügung jenes Factors wird durch das abweichende Verhalten von $\mathfrak{C}_0(t)$ nothwendig. $k$ ist gerade für die $\mathfrak{C}$ 1. und 4., ungerade für die $\mathfrak{C}$ 2. und 3. Classe.

Wir haben hier die einfacheren Functionen, in welche die $\mathfrak{C}$ für $c=0$ übergehen, durch Betrachtung der Differentialgleichung gefunden. Es ist nicht ohne Interesse, auch an den von uns gegebenen Entwickelungen diese Uebergänge zu verificiren. Die Entwickelungen der $\mathfrak{C}(iu)$ nach den $\cos kiu$ und $\sin kiu$ sind hierzu nicht verwendbar. Man gelangt zum Ziele, wenn man die Lösung der Gleichung b), S. 270, in eine nach Potenzen von $\varrho$ fortschreitende Reihe entwickelt und in deren Coefficienten $c=0$ setzt, oder noch einfacher, wenn man das Integral gedachter Gleichung durch eine Cylinderfunctionenreihe $\Sigma a_n J_n(hi\varrho)$ darstellt. Wie Heine zuerst bemerkte, bestimmen sich die Coefficienten dieser Reihe aus denselben Gleichungen, welche die Coefficienten in der trigonometrischen Reihe liefern.* Für $c=0$ bleibt von der Reihe nur das Glied $J_k(hi\varrho)$ oder $J_k(hir)$ stehen, da die übrigen Coefficienten verschwinden.

* Vergl. Kugelfunct. I, S. 414. Heine betrachtet daselbst nur Cylinderfunctionen $\mathfrak{C}(\varphi)$, nach unserer Bezeichnung $\mathfrak{C}(t)$, und entwickelt sie in Bessel'sche Functionen mit dem Argument $i\lambda \cos\varphi$; doch erhält man dieselben Resultate auch für Cylinderfunctionen $\mathfrak{C}(iu)$, deren Entwickelung, wie oben bemerkt wurde, nach den $J_n(hi\varrho)$ fortschreitet.

(Schluss folgt.)

# XIV.

## Ueber die Lage der Verschwindungspunkte einer ganzen Function.

Von

A. Witting,

Cand. math. in Leipzig.

---

In **Gauss'** Werken* findet sich in einer Anmerkung der Satz:

„Sind $a$, $b$, $c$, ..., $m$, $n$ die Wurzeln einer Gleichung $f(x)=0$, $a'$, $b'$, $c'$, ..., $m'$ die Wurzeln der Gleichung $f'(x)=0$, wo $f'(x)=\frac{df(x)}{dx}$, und werden durch dieselben Buchstaben die entsprechenden Punkte *in plano* bezeichnet, so ist, wenn man sich in $a$, $b$, $c$, ..., $m$, $n$ gleiche abstossende oder anziehende Massen denkt, die im umgekehrten Verhältniss der Entfernungen wirken, in $a'$, $b'$, $c'$, ..., $m'$ Gleichgewicht."

Herr F. **Lucas** sprach denselben in den Comptes rendus** in einer Form aus, durch welche ein bekanntes Theorem über Gleichungen mit nur reellen Wurzeln auf das complexe Gebiet ausgedehnt wird:

*„Tout contour fermé convexe environnant le groupe des points racines de l'équation proposée environne aussi le groupe des points racines de l'équation dérivée."*

Der Beweis ist daselbst mit Hilfe mechanischer Principien im Sinne des **Gauss**'schen Satzes geführt.***

Ein geometrischer Beweis, der zugleich eine strengere Fassung des Satzes liefern wird, ist folgendermassen möglich.

Betrachten wir die Gleichung:

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)=0,$$

---

* **Gauss**' Werke Bd. III S. 112.

** Comptes rendus, t. 89 p. 224: Sur une application de la mécanique rationelle à la théorie des équations.

*** Eine nicht ganz correcte Fassung des Theorems gaben Herr **Legebeke** mit einem auf functionentheoretische Betrachtungen gegründeten Beweise und Herr **Stieltjes**, dessen Entwickelungen der *Analysis situs* angehören; Arch. néerl. t. XVI p. 273–278 und t. XVIII p. 1.

deren linke Seite eine ganze transcendente Function ist, bei welcher die Summe der reciproken Moduln der Verschwindungspunkte

$$\sum \left| \frac{1}{a_n} \right|$$

convergirt, und nehmen wir weiter an, dass sämmtliche Punkte $a_n$ in einer Halbebene liegen. Dann lässt sich nach Analogie des Puiseux'schen Verfahrens bei der Untersuchung algebraischer Functionen in den kritischen Punkten derselben ein ganz bestimmtes Polygon construiren, dessen Ecken Wurzelpunkte von $f(z)$ sind. Ein Eckpunkt, welcher mehrfacher Verschwindungspunkt von $f(z)$ ist, heisse kurz vielfache Ecke. Auf jeder Seite des Polygons befinden sich nur zwei Nullpunkte der Function, es können aber mehrere aufeinander folgende, ja alle Seiten in eine Gerade fallen. Das Polygon zerlegt die Ebene in zwei Theile, in deren einem alle Wurzelpunkte von $f(z)$ gelegen sind. Dieser Theil heisse das Innere des Polygons, welches letztere wir das Wurzelpolygon von $f(z)$ nennen. Dasselbe ist nach aussen überall convex.

Es lässt sich nun zeigen, dass die Wurzelpunkte der Ableitung $f'(z)$ nicht ausserhalb, noch auf den Seiten des Wurzelpolygons von $f(z)$ liegen können. Dazu ordnen wir jedem Punkte $z$ durch die Gleichung:

$$\zeta = -\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum \frac{1}{a_n - z} \equiv \sum \frac{1}{r_n e^{i\varphi_n}}$$

einen Punkt $\zeta$ zu. Liegt $z$ ausserhalb des Polygons, das wir zunächst als nicht ganz in eine Gerade fallend voraussetzen, so verbinden wir den Punkt mit einer Ecke $a_1$ des Wurzelpolygons, so dass letzteres ganz auf einer Seite der Verbindungsgeraden sich befindet, und wählen die Indices der Wurzelpunkte von $f(z)$ so, dass von der um $z$ rotirenden Geraden $\overline{za_1}$ beim Durchstreichen des Polygons der Reihe nach die Punkte $a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ getroffen werden. Construiren wir dann geometrisch die convergente Summe:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{r_n e^{i\varphi_n}},$$

so erhalten wir einen vom Coordinatenanfang ausgehenden, sich nicht selbst durchschneidenden Linienzug, dessen Endpunkt $\zeta$ ist. Da bei der Lage von $z$ ausserhalb des Wurzelpolygons die Drehung von $\overline{za_1}$ bis zum Austritt aus dem Polygon immer kleiner als $\pi$ ist, so kann der zur Construction von $z$ dienende Linienzug niemals ein geschlossener werden. Dies ist aber erforderlich, wenn $z$ eine Wurzel von $f'(z)$ ist, denn dann fällt $\zeta$ in den Coordinatenanfang. Es kann also keine Wurzel $z$ von $f'(z) = 0$ ausserhalb des Polygons gelegen sein. Ebenso wenig kann aber auch $z$ auf einer Polygonseite liegen, sondern nur noch in einer vielfachen Ecke. Wir erhalten also den Satz:

Die Wurzelpunkte der Ableitung $f'(z)$ einer ganzen transcendenten Function von der Form

$$f(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$$

liegen im Innern des Wurzelpolygons von $f(z)$, soweit sie sich nicht in dessen vielfachen Ecken befinden.

Reducirt sich das Wurzelpolygon auf eine einzige Gerade, so liegt jener Punkt $a_1$ im Unendlichen und $\overline{za_1}$ dreht sich um $\pi$, wenn $z$ ausserhalb der Geraden liegt; die Wurzelpunkte der Ableitung befinden sich also auf der Geraden.

Betrachten wir nun die ganze transcendente Function:

$$f(z) = \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \cdots + \frac{z^k}{k a_n^k}},$$

deren Wurzelpunkte die Eigenschaft haben, dass

$$\sum \left| \frac{1}{a_n^{k+\sigma}} \right|$$

convergirt, wenn $\sigma > 0$. Die Ableitung der Function ist

$$f'(z) = -f(z) \sum_{n=1}^\infty \left( \frac{1}{a_n - z} - \frac{1}{a_n} - \frac{z}{a_n^2} - \cdots - \frac{z^{k-1}}{a_n^k} \right)$$

$$= -z^k f(z) \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{a_n^k (a_n - z)},$$

woraus ersichtlich, dass die Ableitung unabhängig von den $a_n$ einen $k$-fachen Wurzelpunkt im Coordinatenanfang besitzt und dass schon deshalb die früheren Sätze nicht allgemein gelten können.

Seien daher speciell die $a_n$ sämmtlich reell. Es kann dann

$$\zeta = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{a_n^k (a_n - z)}$$

keine complexen Wurzelpunkte besitzen. Zur Construction des Punktes $\zeta$ für einen complexen Punkt $z$ verbinden wir den letzteren mit den $a_n$ und addiren, vom Unendlichen anfangend, die Glieder obiger Summe wieder in der Reihenfolge, wie sie von einer um $z$ rotirenden Geraden getroffen werden. Ist nun $k$ gerade, so ist $a_n^k$ immer positiv und es gestaltet sich die geometrische Summation wie oben; $\zeta$ kann nie in den Coordinatenanfangspunkt gelangen, höchstens wird die letzte Strecke des Linienzuges der reellen Axe parallel.

Ist $k$ ungerade,

$$k = 2m + 1,$$

so construiren wir die Summe:

$$z \cdot \sum \frac{1}{a_n^{2m+1}(a_n - z)} = \sum \left\{ \frac{1}{a_n^{2m}(a_n - z)} - \frac{1}{a_n^{2m+1}} \right\}.$$

Auf eine Strecke $\frac{1}{a_n^{2m}(a_n - z)}$ folgt dann die positive oder negative, der reellen Axe parallele Strecke $-\frac{1}{a_n^{2m+1}}$, so dass man einen Linienzug erhält, der sich nicht durchsetzt und auch nicht schliesst; denn die Strecken $\frac{1}{a^{2m}(a_n - z)}$ vollführen wieder höchstens eine Drehung um $\pi$, so dass jede der Parallelen $-\frac{1}{a_n^{2m+1}}$ weiter von der reellen Axe abliegt, als alle vorher construirten. Es ergiebt sich mithin der Satz:*

Besitzt die ganze transcendente Function:

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \cdots + \frac{z^k}{k a_n^k}}$$

nur reelle Wurzelpunkte, so verschwindet auch ihre Ableitung nur auf der reellen Axe.

Einen rein algebraischen Beweis statt des geometrischen kann man mit Hilfe einer Betrachtungsweise führen, welche von F. Chio herrührt und schon häufig zur Ableitung verwandter Sätze benutzt wurde.**

Wir nehmen dazu von den Wurzeln

$$a_n = \alpha_n + i\beta_n$$

der Gleichung

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) = 0$$

an, dass die Coefficienten von $i$ sämmtlich positiv oder wenigstens nicht alle Null sind, keiner aber negativ ist. Dann sind für die Ableitung alle $\beta > 0$ — wenn man von den in die mehrfachen reellen Wurzelpunkte von $f(z)$ fallenden Verschwindungspunkten absieht.

Durch die Gleichung

$$f'(z) = -f(z) \sum \frac{1}{a_n - z}$$

erhält man, dass $f'(z)$ in einem $k$-fachen Wurzelpunkte von $f(z)$ $(k-1)$-mal verschwindet. Aus einer Wurzel

$$z = \alpha - i\beta \quad (\beta > 0)$$

würde nun folgen

$$\sum \frac{1}{(\alpha_n - \alpha) + i(\beta_n + \beta)} = \sum \frac{\overline{\alpha_n - \alpha} - i\,\overline{\beta_n + \beta}}{\overline{\alpha_n - \alpha}^2 + \overline{\beta_n + \beta}^2} = 0,$$

also insbesondere

$$\sum \frac{\beta_n + \beta}{\overline{\alpha_n - \alpha}^2 + \overline{\beta_n + \beta}^2} = 0,$$

---

* Für $k = 1$ ist der Satz von Herrn Laguerre in den Comptes rendus t. 94 ohne Beweis gegeben. Ein algebraischer Beweis findet sich bei Hermite, Cours prof. à la fac. des sciences de Paris, p. 70.

** Hermite, a. a. O.; Laguerre, Nouv. Ann. de Math. II, 19, p. 224 u. 241.

was unmöglich ist, da die $\beta_n + \beta$ sämmtlich positiv sind. Ebenso wenig kann aber bei endlichem $\alpha$

$$\sum \frac{\beta_n}{\overline{\alpha_n - \alpha}^2 + \beta_n^2} = 0$$

sein, d. h.: die Ableitung kann im Endlichen auch keine reellen Wurzelpunkte besitzen — die vielfachen reellen Verschwindungspunkte von $f(z)$ ausgenommen. Man erkennt auch, dass die Wurzelpunkte der Ableitung im Endlichen nicht beliebig nahe an die reelle Axe heranrücken können; verschwinden aber alle $\beta_n$ der Wurzeln von $f(z) = 0$, so werden für die Ableitung alle $\beta$ gleich Null.

Durch Coordinatentransformation erhält man demnach folgenden Satz:*

Befinden sich die Wurzelpunkte einer ganzen transcendenten Function

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$$

entweder innerhalb, oder doch nicht alle auf der Grenze einer Halbebene, so liegen innerhalb derselben auch sämmtliche Wurzelpunkte der Ableitung $f'(z)$ — mit Ausnahme der in die vielfachen Verschwindungspunkte von $f(z)$ auf der Geraden fallenden.

Als Grenze einer Halbebene, in welcher sich alle Wurzelpunkte von $f(z)$ befinden, kann man aber jede Seite des Wurzelpolygons von $f(z)$ ansehen, und es ergiebt sich somit auch hier der weiter oben ausgesprochene Satz. Für die Function

$$\prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \cdots + \frac{z^k}{k a_n^k}}$$

ist der Beweis *mutatis mutandis* derselbe. Bei ungeradem $k = 2m + 1$ hat man wieder die Summe:

$$\sum \left(\frac{1}{a_n^{2m}(a_n - z)} - \frac{1}{a_n^{2m+1}}\right)$$

zu betrachten.

Nimmt man statt der ganzen transcendenten Function ein Polynom $n^{\text{ten}}$ Grades, so ist das Wurzelpolygon im Endlichen geschlossen; der Satz bleibt ersichtlich bestehen, gestattet aber hier noch eine Umkehrung. Wenn die Wurzelpunkte der Ableitung nicht alle auf einer Geraden liegen, so muss auch $f(z)$ ein wirkliches Wurzelpolygon besitzen, welches mithin wenigstens ein Dreieck ist. Wir haben also die Umkehrung:

Im Innern des Wurzelpolygons der Ableitung eines Polynoms $n^{\text{ten}}$ Grades $f(x)$ liegen höchstens $(n-3)$ Wurzelpunkte von $f(z)$.

Durch das Auftreten von vielfachen Ecken wird diese obere Grenze noch reducirt.

---

* Im Wesentlichen findet sich dieser Satz schon bei Herrn Laguerre a. a. O. S. 250. Etwas anders giebt Herr Berloty den Beweis: C. R. Nr. 18, 3. Nov. 1884, t. XCIX p. 745–747, Sur les équations alg.; nur ist die Fassung des Satzes nicht correct, dass die Wurzelpunkte auch auf dem Perimeter des Polygons *(polygone des racines)* liegen können, was bei einer algebraischen Gleichung unmöglich ist.

Dresden, April 1885.

# XV.

# Bemerkungen zum Pascal'schen Satze über Kegelschnittsechsecke.

Von

R. Heger

in Dresden.

---

1. Sind $T_0$, $T_1$, $T_2$ lineare Functionen in Punktcoordinaten, so erzeugen die projectiven Strahlbüschel

$$T_0 - \lambda T_1 = 0, \quad T_1 - \lambda T_2 = 0$$

einen Kegelschnitt, der von $T_0$ und $T_2$ in den Punkten berührt wird, welche auf $T_1$ liegen. Wird der von den Strahlen $T_0 - \lambda T_1 = T_1 - \lambda T_2 = 0$ erzeugte Punkt mit $\lambda$ bezeichnet, so ist*

$$T_0 - (\lambda_i + \lambda_k) T_1 + \lambda_i \lambda_k T_2 = 0$$

die Gleichung der Geraden $\lambda_i \lambda_k$. Die Seiten des Sechsecks

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6$$

haben daher die Gleichungen

$$\begin{aligned}
T_{12} &\equiv T_0 - (\lambda_1 + \lambda_2) T_1 + \lambda_1 \lambda_2 T_2 = 0,\\
T_{23} &\equiv T_0 - (\lambda_2 + \lambda_3) T_1 + \lambda_2 \lambda_3 T_2 = 0,\\
T_{34} &\equiv T_0 - (\lambda_3 + \lambda_4) T_1 + \lambda_3 \lambda_4 T_2 = 0,\\
T_{45} &\equiv T_0 - (\lambda_4 + \lambda_5) T_1 + \lambda_4 \lambda_5 T_2 = 0,\\
T_{56} &\equiv T_0 - (\lambda_5 + \lambda_6) T_1 + \lambda_5 \lambda_6 T_2 = 0,\\
T_{61} &\equiv T_0 - (\lambda_6 + \lambda_1) T_1 + \lambda_6 \lambda_1 T_2 = 0.
\end{aligned}$$

2. Bedeuten die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 beliebige Zahlen (der Kürze wegen statt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ gesetzt), so gelten folgende Identitäten:

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ 1 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 3-1 & 5-1 \\ 4 & 6-4 & 2-4 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ 1-3 & 3 & 5-3 \\ 4-6 & 6 & 2-6 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 1-5 & 3-5 & 5 \\ 4-2 & 6-2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Hieraus folgt

$$\text{I)} \quad \begin{aligned} (3-1)(2-4) + (5-1)(4-6) &\equiv (3-5)(6-4) + (1-3)(6-2) \\ &\equiv (1-5)(6-2) + (2-4)(3-5). \end{aligned}$$

Ferner ergiebt sich aus den beiden Identitäten

---

* Salmon-Fiedler, Kegelschnitte, 3. Aufl. 1873, S. 353.

$$(1-3)+(3-5)+(5-1)\equiv 0, \quad (1-3)5+(3-5)1+(5-1)3\equiv 0$$

die folgende:

$$(1-3)(5+2)+(3-5)(1+2)+(5-1)(3+2)\equiv 0.$$

Ebenso ist

$$(2-4)(6+5)+(4-6)(2+5)+(6-2)(4+5)\equiv 0.$$

Wenn man von diesen Identitäten die vorletzte mit $(6-4)$, die letzte mit $(1-3)$ multiplicirt und addirt, so erhält man

$$(3-5)(6-4)(1+2)+(1-3)(6-2)(4+5)$$
$$\equiv (5-1)(4-6)(2+3)+(3-1)(2-4)(6+5).$$

In gleicher Weise ergiebt sich, wenn man die Identitäten

$$(1-3)(5+6)+(3-5)(1+6)+(5-1)(3+6)\equiv 0,$$
$$(2-4)(6+3)+(4-6)(2+3)+(6-2)(4+3)\equiv 0$$

der Reihe nach mit $(2-4)$ und $(1-5)$ multiplicirt und addirt.

$$(5-1)(4-6)(2+3)+(3-1)(2-4)(6+5)$$
$$\equiv (2-4)(3-5)(1+6)+(1-5)(6-2)(4+3).$$

Daher hat man

$$\text{II)}\quad \begin{aligned} &(3-5)(6-4)(1+2)+(1-3)(6-2)(4+5)\\ \equiv\ &(5-1)(4-6)(2+3)+(3-1)(2-4)(6+5)\\ \equiv\ &(2-4)(3-5)(1+6)+(1-5)(6-2)(4+3). \end{aligned}$$

Wenn man die Identitäten

$$(1-3)5+(3-5)1+(5-1)3\equiv 0, \quad (2-4)6+(4-6)2+(6-2)4\equiv 0$$

zuerst nach einander mit $(6-4)2$ und $(1-3)5$ und dann mit $(2-6)4$ und $(3-5)1$ multiplicirt und dann addirt, so erhält man

$$\text{III)}\quad \begin{aligned} &(3-5)(6-4)12+(1-3)(6-2)45\\ \equiv\ &(5-1)(4-6)23+(3-1)(2-4)56\\ \equiv\ &(1-5)(6-2)34+(3-5)(2-4)61. \end{aligned}$$

Setzt man nun zur Abkürzung

$$m_{12}\equiv(3-5)(6-4), \quad m_{45}\equiv(1-3)(6-2),$$
$$m_{23}\equiv(5-1)(4-6), \quad m_{56}\equiv(3-1)(2-4),$$
$$m_{34}\equiv(1-5)(6-2), \quad m_{61}\equiv(2-4)(3-5),$$

so hat man aus I), II) und III)

$$\text{IV)}\quad \begin{aligned} m_{12}+m_{45}&\equiv m_{23}+m_{56}\equiv m_{34}+m_{61},\\ (1+2)m_{12}+(4+5)m_{45}&\equiv(2+3)m_{23}+(5+6)m_{56}\equiv(3+4)m_{34}+(6+1)m_{61},\\ 12\,m_{12}+45\,m_{45}&\equiv 23\,m_{23}+56\,m_{56}\equiv 34\,m_{34}+61\,m_{61}. \end{aligned}$$

3. Ersetzt man hierin 1, 2, ... durch die gleichbezifferten $\lambda$, so erkennt man die Identitäten

$$\mathfrak{T}\equiv m_{12}T_{12}+m_{45}T_{45}\equiv m_{23}T_{23}+m_{56}T_{56}\equiv m_{34}T_{34}+m_{61}T_{61}.$$

Hierin ist der Beweis des Pascal'schen Satzes enthalten; wenn man die Multiplicationen ausführt und alsdann $\lambda$ durch $\lambda:\mu$ ersetzt und $\lambda_i$ und $\mu_i$ durch $i$ und $i'$ andeutet, so erhält man für die Pascal'sche Gerade $\mathfrak{T}$ die Gleichung

$$\mathfrak{T} \equiv (1'2'3'4'56 - 2'3'4'5'61 + 3'4'5'6'12 - 4'5'6'1'23).T_0$$
$$+ [(14'-41')(253'6'-2'5'36) + (36'-3'6)(142'5'-1'4'23)$$
$$+ (52'-25')(361'4'-3'6'14)].T_1$$
$$+ (12345'6'-23456'1'+34561'2'-45612'3').T_2 = 0.$$

4. Wenn man zwei projective Curvenbüschel hergestellt hat, die eine gegebene Curve $C$ erzeugen, so werden durch dieselben auf $C$ Punktgruppen ausgeschnitten; jede solche Gruppe kann als Vertreter einer bestimmten Zahl $\lambda$ angesehen werden, nämlich des Doppelverhältnisses, welches die durch diese Gruppe gehenden Büschelcurven mit drei festen Grundcurven des Büschels bestimmen. Es gelingt alsdann immer, eine Function in der Weise zusammenzusetzen:

$$F_{ik} \equiv F_0 - (\lambda_i + \lambda_k)F_1 + \lambda_i \lambda_k F_2,$$

und zwar so, dass $F_{ik} = 0$ die Gruppen $\lambda_i$ und $\lambda_k$ enthält. Man kann alsdann, ganz ähnlich wie beim Pascal'schen Sechseck, von sechs Gruppen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6$ ausgehen und die sechs Curven $F_{12}, F_{23}, \ldots, F_{61}$ erzeugen. Die soeben für den Pascal'schen Satz gegebene Ableitung lässt sich dann auf das Curvensechseck anwenden, und man erhält damit den Satz, dass alle Schnittpunkte, welche von den Gegenseiten $F_{12}$ und $F_{45}$, $F_{23}$ und $F_{56}$, $F_{34}$ und $F_{61}$ des Curvensechsecks bestimmt werden, auf einer Curve $\mathfrak{F}$ liegen, die, ebenso wie die $F_{ik}$, alle Punkte enthält, für welche

$$F_0 = F_1 = F_2 = 0.$$

5. Sind $T_0$, $T_1$, $S_0$, $S_1$ lineare Functionen, also $T_0 - \lambda T_1 = 0$, $S_0 - \lambda S_1 = 0$ entsprechende Strahlen zweier projectiven Büschel, so enthält der Kegelschnitt

$$F_{ik} \equiv T_0 S_0 - (\lambda_i + \lambda_k) T_1 S_0 + \lambda_i \lambda_k T_1 S_1 = 0$$

die Punkte $\lambda_i$ und $\lambda_k$ des von den Büscheln erzeugten Kegelschnittes $K$ und die festen Punkte

$$T_0 = T_1 = 0, \quad S_0 = S_1 = 0, \quad T_1 = S_0 = 0,$$

von denen die beiden ersten auf $K$ liegen; zwei $F_{ik}$ haben ausser diesen drei Punkten noch einen realen Schnittpunkt. Hieraus folgt: Wird einem Kegelschnitte $K$ ein Sechseck eingeschrieben, dessen Seiten Kegelschnitte sind, die einem Netze angehören, das zwei Träger auf $K$ hat, so liegen die drei Punkte, die durch den Schnitt gegenüberliegender Seiten des Curvensechsecks neu bestimmt werden, auf einem Netzkegelschnitte.

6. Zwei Punkte einer Curve dritter Ordnung $C_3$, die mit einem Punkte $A$ der Curve in einer Geraden liegen, sollen als ein Begleiterpaar des $A$ bezeichnet werden. Hat $C_3$ einen Doppelpunkt $\varDelta$, so werden alle Begleiterpaare des $A$ von $\varDelta$ aus durch eine quadratische Strahlinvolution projicirt, die mit dem Strahlbüschel $A$ projectiv ist.

Ist $T_0$ die Tangente in $A$, wird mit $T_1$ der Strahl $\varDelta A$ bezeichnet, ist $T_2$ der nach dem Begleiter von $A$ gehende Doppelpunktsstrahl, und sind $S_1$, $S_2$

die Doppelpunktstangenten, so sind $T_1$, $T_2$ und $S_1$, $S_2$ Paare der Involution $\Delta$ und entsprechen den Strahlen $T_0$ und $T_1$; entsprechende Strahlen von $A$ und Strahlenpaare von $\Delta$ sind

$$T_0 - \lambda T_1 = 0, \quad T_1 T_2 - \lambda S_1 S_2 = 0.$$

Der Kegelschnitt

$$F_{ik} \equiv T_0 T_2 - (\lambda_i + \lambda_k) T_1 T_2 + \lambda_i \lambda_k S_1 S_2 = 0$$

enthält die Punktpaare $\lambda_i$ und $\lambda_k$ der $C_3$ und berührt $T_2$ im Schnittpunkte mit $S_1$ und $S_2$, d. i. in $\Delta$. Jeder Kegelschnitt, der zwei Begleiterpaare des $A$ und den Doppelpunkt $\Delta$ enthält, wird daher in $\Delta$ von der Geraden berührt, welche $\Delta$ mit dem Begleiter des $A$ verbindet.

Zwei $F_{ik}$ haben ausser $\Delta$ noch zwei gemeinsame Punkte. Daher folgt: Wählt man auf einer Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt sechs Begleiterpaare 1, 2, 3, 4, 5, 6 eines Punktes $A$ der Curve und construirt die Kegelschnitte $F_{12}$, $F_{23}$, ..., $F_{61}$, welche zwei benachbarte Begleiterpaare mit dem Doppelpunkte verbinden, so liegen die drei Punktpaare, welche durch die gegenüberliegenden $F_{ik}$ bestimmt werden, auf einem Kegelschnitte, der in $\Delta$ mit den $F_{ik}$ eine einfache Berührung hat.

7. Drei Begleiterpaare eines realen Wendepunktes $A$ einer Curve dritter Ordnung sind immer auf einem Kegelschnitte enthalten; daher ist $A$ Träger eines Strahlenbüschels und irgend zwei Begleiterpaare des $A$ sind Träger eines projectiven Kegelschnittbüschels, das mit dem Büschel $A$ zusammen die $C_3$ erzeugt. Der Wendetangente $T_0$ in $A$ entspricht ein Kegelschnitt, der aus den beiden durch $A$ gehenden, die Träger enthaltenden Strahlen $T_1$ und $T_2$ besteht; dem Strahle $T_1$ des $A$ entspricht ein Kegelschnitt $K_1$, der in den auf $T_1$ enthaltenen Trägern des Kegelschnittbüschels mit $C_3$ eine einfache Berührung hat; die Punktpaare der $C_3$ werden bestimmt durch

$$T_0 - \lambda T_1 = 0, \quad T_1 T_2 - \lambda K_1 = 0.$$

Der Kegelschnitt

$$F_{ik} \equiv T_0 T_2 - (\lambda_i + \lambda_k) T_1 T_2 + \lambda_i \lambda_k K_1 = 0$$

enthält die Punktepaare $\lambda_i$ und $\lambda_k$ und das auf $T_2$ und $K_1$ enthaltene Begleiterpaar. Daher folgt: Sechs Begleiterpaare $\lambda_1$, ... $\lambda_6$ eines Wendepunktes $A$ einer $C_3$ geben mit einem festen Begleiterpaare zusammen Anlass zur Entstehung von sechs Kegelschnitten $F_{12}$, $F_{23}$, ..., $F_{61}$; die drei Punktpaare, die durch den Schnitt der gegenüberliegenden $F_{ik}$ neu bestimmt werden, sind mit dem festen Begleiterpaare zusammen auf einem Kegelschnitte enthalten.

8. Durch ein Kegelschnittbüschel, dessen Träger auf einer $C_3$ enthalten sind, werden Punktpaare auf $C_3$ ausgeschnitten, die von einem Punkte der $C_3$ aus durch ein dem Kegelschnittbüschel projectives Strahlbüschel projicirt werden. Sind

$$T_0 - \lambda T_1 = 0, \quad K_0 - \lambda K_1 = 0$$

Gleichungen entsprechender Strahlen und Kegelschnitte, so enthält die Curve dritter Ordnung

$$F_{ik} \equiv T_0 K_0 - (\lambda_i + \lambda_k) T_1 K_0 + \lambda_i \lambda_k T_1 K_1 = 0$$

die Punktpaare $\lambda_i$ und $\lambda_k$ der $C_3$, sowie die sieben festen Punkte

$$T_0 = T_1 = 0, \quad K_0 = K_1 = 0, \quad K_0 = T_1 = 0,$$

von denen die beiden ersten Gruppen von zusammen fünf Punkten auf $C_3$ liegen; die übrigen vier Schnittpunkte von $C_3$ und $F_{ik}$ sind die Paare $\lambda_i$ und $\lambda_k$. Da die sämmtlichen $F_{ik}$ sieben Punkte gemein haben, so bilden sie ein Netz von doppelt unendlicher Mächtigkeit.

Die drei Paare Schnittpunkte, welche durch die Paare gegenüberliegender Curven

$$F_{12} \text{ und } F_{45}, \quad F_{23} \text{ und } F_{56}, \quad F_{34} \text{ und } F_{61}$$

neu bestimmt werden, liegen auf einer Curve des Netzes.

9. Ein Strahlbüschel und eine projective cubische Involution

$$T_0 - \lambda T_1 = 0, \quad T_1 T_2 T_3 - \lambda V_1 V_2 V_3 = 0$$

bestimmen Punkttripel einer Curve vierter Ordnung; dieselbe hat den Träger $A$ des Büschels zum einfachen Punkte und den Strahl $T_0$ des Büschels zur Tangente; der Träger $\varDelta$ der Involution ist dreifacher Punkt der Curve; $T_2$ und $T_3$ verbinden $\varDelta$ mit den Punkten, welche $T_0$ ausser $A$ noch mit der $C_4$ gemein hat; $V_1$, $V_2$ und $V_3$ sind die Tangenten in $\varDelta$. Die Curve dritter Ordnung

$$F_{ik} \equiv T_0 T_2 T_3 - (\lambda_i + \lambda_k) T_1 T_2 T_3 + \lambda_i \lambda_k V_1 V_2 V_3 = 0$$

enthält die beiden Tripel $\lambda_i$ und $\lambda_k$, sowie die festen Punkte $T_1 T_2 = V_1 V_2 V_3 = 0$, hat also $\varDelta$ zum Doppelpunkte, $T_1$ und $T_2$ zu Tangenten in $\varDelta$. Bei den sechs Curven

$$F_{12}, \; F_{23}, \; F_{34}, \; F_{45}, \; F_{56}, \; F_{61}$$

haben die gegenüberliegenden ausser dem sechs einfache Schnittpunkte ersetzenden Punkte $\varDelta$ noch je drei Schnittpunkte, und diese neun Punkte liegen auf einer Curve dritter Ordnung, welche $\varDelta$ zum Doppelpunkte und $T_1$ und $T_2$ zu Doppelpunktstangenten hat.

10. Zwei projective Kegelschnittbüschel

$$K_0 - \lambda K_1 = 0, \quad L_0 - \lambda L_1 = 0$$

erzeugen eine Curve vierter Ordnung, welche die acht Träger der Büschel enthält, und zwar als einfache Punkte, ausser wenn die Büschel einen oder mehr Träger gemein haben. Die Curve vierter Ordnung

$$F_{ik} \equiv K_0 L_0 - (\lambda_i + \lambda_k) K_1 L_0 + \lambda_i \lambda_k K_1 L_1 = 0$$

enthält die Quadrupel $\lambda_i$ und $\lambda_k$ der $C_4$ und die zwölf festen Punkte

$$K_0 = K_1 = 0, \quad L_0 = L_1 = 0, \quad K_1 = L_0 = 0.$$

Daher bilden die sämmtlichen $F_{ik}$ ein Netz.

Man erhält nun: Die drei Quadrupel, welche von je zwei gegenüberliegenden der sechs Curven

$$F_{12},\ F_{23},\ F_{34},\ F_{45},\ F_{56},\ F_{61}$$

bestimmt werden, sind auf einer Curve des Netzes enthalten.

---

11. In dem Aufsatze: „Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen" (Math. Ann. Bd. VIII, 1875) beweist Lüroth für die geometrisch definirten Begriffe der Summe und des Productes von Würfen auf Kegelschnitten die Giltigkeit der Sätze

$$a+b+c=a+c+b, \quad abc=acb$$

mit Hilfe des Pascal'schen Satzes. Sehr einfach ist das umgekehrte Verfahren, auf analytisch-geometrischem Wege reale (und imaginäre) Zahlen durch Punkte eines Kegelschnittes darzustellen; alsdann erscheint der Pascal'sche Satz als der geometrische Ausdruck der beiden arithmetischen Fundamentalsätze.

Hat man auf einem Kegelschnitte $K$ die Punkte 0, $a$, $b$, $c$ (d. i. die diese realen Zahlen repräsentirenden, vergl. Nr. 1), und ist $T_2$ die Tangente im Punkte $\infty$, so erhält man die Punkte $a+b$, $a+c$, wenn man die Spuren der Geraden $a$, $b$ und $a$, $c$ auf $T_2$ von 0 aus auf $K$ projicirt. Die beiden Geraden, welche $c$ mit $a+b$ und $b$ mit $a+c$ verbinden, treffen $T_2$ in demselben Punkte, weil $a+b+c=a+c+b$. Dies ist aber der Pascal'sche Satz, nämlich für das Sechseck $a$, $b$, $a+c$, 0, $a+b$, $c$.

Ist ferner $T_1$ die Gerade, welche die Punkte 0 und $\infty$ verbindet, und projicirt man die Spuren der Geraden $a$, $b$ und $a$, $c$ auf der Geraden $T_1$ vom Punkte 1 aus auf die Curve, so erhält man die Punkte $a.b$ und $a.c$; verbindet man diese der Reihe nach mit $c$ und $b$, so schneiden sich diese Geraden auf $T_1$, weil $a.b.c=a.c.b$. Auch hier hat man den Pascal'schen Satz vor sich, nämlich für das Sechseck $a$, $b$, $a.c$, 1, $a.b$, $c$.

Derselbe Gedankengang bleibt verwendbar, wenn die Pascal'sche Gerade weder zwei reale zusammenfallende Punkte enthält, wie $T_2$, noch zwei reale getrennte, wie $T_1$.

12. Hat die Gerade $T_1$ mit dem Kegelschnitte zwei conjugirt complexe Schnittpunkte, so sind auch die Curventangenten in denselben conjugirt complex; haben dieselben die Gleichungen $U \pm iV=0$, so ist die Gleichung der Curve

$$T_1^2-U^2-V^2=0;$$

in der That hat jede der Geraden $U \pm iV=0$ mit der Curve zwei zusammenfallende, auf $T_1$ liegende Punkte gemein. Setzt man, wie früher,

$$T_0 \equiv U+iV, \quad T_2 \equiv U-iV,$$

und ist

$$\lambda=\mu+i\nu,$$

so haben die entsprechenden imaginären Strahlen der beiden Strahlbüschel

$$T_0-\lambda T_1=0, \quad T_1-\lambda T_2=0$$

einen realen Schnittpunkt, wenn für die Coordinaten desselben und für $\mu$ und $\nu$ die Gleichungen erfüllt sind, welche durch Sonderung des Realen und Imaginären aus

$$U+iV-(\mu+i\nu)T_1=0 \text{ und } T_1-(\mu+i\nu)(U-iV)=0$$

hervorgehen, nämlich

$$U-\mu T_1=0, \quad V-\nu T_1=0, \quad T_1-\mu U-\nu V=0, \quad \nu U-\mu V=0.$$

Die letzte folgt ohne Weiteres aus den beiden ersten, und die dritte geht aus den beiden ersten hervor, wenn man in der Curvengleichung

$$T_1^2-U^2-V^2=0$$

durch $T_1$ dividirt und die Quotienten $U:T_1$ und $V:T_1$ durch $\mu$ und $\nu$ ersetzt. Es bleiben daher nur die ersten zwei Gleichungen übrig; dieselben liefern für gegebene Werthe von $x$ und $y$ die zugehörigen Werthe von $\mu$ und $\nu$; sie zeigen also, welche complexe Zahl $\lambda\equiv\mu+i\nu$ durch jeden realen Punkt des $K$ repräsentirt wird, wenn man die auf $T_1$ gelegenen imaginären Curvenpunkte als Repräsentanten der realen Zahlen 0 und $\infty$ annimmt.

Die Gleichung

$$T_0-(\lambda_i+\lambda_k)T_1+\lambda_i\lambda_k T_2=0$$

der Geraden $\lambda_i\lambda_k$ tritt zwar, wenn $\lambda_i$ und $\lambda_k$ die complexen Argumente zweier auf dem Kegelschnitt enthaltenen realen Punkte sind, in complexer Form auf; man überzeugt sich aber leicht, dass es die Gleichung einer realen Geraden ist.

Zum Beweise des Pascal'schen Satzes kann man in diesem Falle den Einheitspunkt nicht verwenden; man kommt aber ebenso leicht folgendermassen zum Ziele: Wenn $ABCDEF$ ein Kegelschnittsechseck ist und die Gerade mit $T_1$ bezeichnet wird, auf welcher die Schnittpunkte von $AF$ und $CD$, sowie von $AB$ und $DE$ liegen, so ordne man die Kegelschnittpunkte in der angegebenen Weise realen oder complexen Parametern zu, so dass die realen oder complexen Schnittpunkte der Curve und der $T_1$ die Parameter 0 und $\infty$ erhalten; werden alsdann die Parameter von $ABFD$ der Reihe nach mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ bezeichnet, so haben nach der Voraussetzung $E$ und $C$ die Parameter $\alpha\beta:\delta$ bez. $\alpha\gamma:\delta$; da nun die Parameter von $E$ und $F$, sowie die von $B$ und $C$ dasselbe Product $\alpha\beta\gamma:\delta$ ergeben, so folgt, dass auch $EF$ und $BC$ sich auf $T_1$ schneiden.*

13. Die letzteren Betrachtungen können auf Raumcurven dritter Ordnung übertragen werden. Sind $T_0$, $T_3$ Osculationsebenen einer $R_3$ in den Punkten $P_0$ und $P_3$, sind ferner $T_1$ und $T_2$ die Ebenen, welche $P_3$ bez. $P_0$ mit der Tangente in $P_0$ bez. $P_3$ verbinden, so sind die Punkte $R_3$ durch entsprechende Ebenen

$$1) \qquad T_0-\lambda T_1=0, \quad T_1-\lambda T_2=0, \quad T_2-\lambda T_3=0$$

---

* Vergl. Kotanyi, Constr. algebr. Ausdrücke mit Hilfe von Involutionen auf Kegelschnitten, diese Zeitschr. Bd. XXVII S. 248, 1882.

dreier projectiven Ebenenbüschel bestimmt. Sind $P_1$ und $P_2$ real, so wird durch 1. jedem realen Curvenpunkte ein realer Parameter $\lambda$ zugeordnet; ist dagegen $P_0 P_3$ eine imaginäre Secante der $R_3$, so sind $P_0$ und $P_3$ und damit auch $T_0$ und $T_3$, sowie $T_1$ und $T_2$ conjugirt complex. Setzt man

$$T_0 = U_0 + iV_0, \quad T_1 = U_1 + iV_1, \quad T_2 = U_1 - iV_1, \quad T_3 = U_0 - iV_0,$$

so hat man für die Gleichungen entsprechender Ebenen

$$\begin{aligned} U_0 + iV_0 - \lambda(U_1 + iV_1) &= 0, \\ U_1 + iV_1 - \lambda(U_1 - iV_1) &= 0, \\ U_1 - iV_1 - \lambda(U_0 - iV_0) &= 0. \end{aligned}$$

Diesen drei Gleichungen genügt ein realer Punkt unter Bedingungen, die sich durch Elimination von $\lambda$ aus je zweien dieser Gleichungen und Sonderung des Realen und Imaginären ergeben. Man erhält so die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} U_0^2 - U_1^2 + V_0^2 - V_1^2 &= 0, \\ U_0 V_1 - U_1 V_0 + 2 U_1 V_1 &= 0, \\ U_0 U_1 + V_0 V_1 - U_1^2 + V_1^2 &= 0. \end{aligned}$$

Die beiden letzten lassen folgende Schreibweise zu:

$$V_1(U_0 + U_1) - U_1(V_0 - V_1) = 0, \quad V_1(V_0 + V_1) + U_1(U_0 - U_1) = 0.$$

Die zugehörigen Flächen zweiter Ordnung haben daher die Gerade $V_1 = U_1 = 0$ gemein. Für alle Punkte, welche beiden Flächen gemeinsam und nicht auf $V_1 = U_1 = 0$ enthalten sind, besteht die Gleichung

$$\begin{vmatrix} (U_0 + U_1) & -(V_0 - V_1) \\ (V_0 + V_1) & (U_0 - U_1) \end{vmatrix} = 0;$$

dies ist die erste der obigen drei Gleichungen. Aus den Coordinaten eines realen Curvenpunktes erhält man für den Parameter $\lambda$ die drei gleichbedeutenden Formen

$$\lambda = \frac{U_0 + iV_0}{U_1 + iV_1} = \frac{U_1 + iV_1}{U_1 - iV_1} = \frac{U_1 - iV_1}{U_0 - iV_0}.$$

Die Secante $\lambda_1 \lambda_2$ liegt bekanntlich in den Ebenen

$$T_0 - (\lambda_1 + \lambda_2) T_1 + \lambda_1 \lambda_2 T_2 = 0, \quad T_1 - (\lambda_1 + \lambda_2) T_2 + \lambda_1 \lambda_2 T_3 = 0;$$

die Ebene $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ hat die Gleichung

$$T_0 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) T_1 + (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1) T_2 - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 T_3 = 0.$$

14. Haben die Parameter $\alpha$ und $\beta$ zweier Punkte ein constantes Product $p$, so gelten für die Secante dieser Punkte die Gleichungen

$$T_0 - (\alpha + \beta) T_1 + p T_2 = 0, \quad T_1 - (\alpha + \beta) T_2 + p T_3 = 0.$$

Eliminirt man $\alpha + \beta$, so erhält man

$$T_0 T_2 - T_1^2 - p(T_3 T_1 - T_2^2) = 0.$$

Daher folgt: Die Secanten einer $R_3$, welche Punkte der $R_3$ verbinden, die ein constantes Product haben, erfüllen eine Regelfläche zweiter Ordnung, welche $R_3$ und die Secante $0\infty$ enthält (vergl. Nr. 16).

15. Haben die Parameter $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ dreier Punkte das Product $p$, so hat die Ebene dieser Punkte die Gleichung

$$T_0-(\alpha+\beta+\gamma)\,T_1+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\gamma\beta)\,T_2-p\,T_3=0;$$

dieselbe enthält den Punkt der Ebenen

$$T_0-p\,T_3=T_1=T_2=0.$$

Hieraus folgt: Die Ebenen, welche Punkte verbinden, die ein constantes Product haben, treffen die Secante $0\infty$ in einem festen Punkte.

Ein Tetraeder sei einer $R_3$ eingeschrieben und werde von einer Secante $s$ der Curve durchsetzt.

Man ertheile den realen oder imaginären auf der Secante enthaltenen Curvenpunkten die Parameterwerthe 0 und $\infty$ und richte nun in der angegebenen Weise eine Parametervertheilung auf der Curve ein; dabei mögen die Eckpunkte des Tetraeders die Parameter $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ erhalten. Durch die Spuren der Tetraederebenen $\beta\gamma\delta$, $\gamma\delta\alpha$, $\delta\alpha\beta$, $\alpha\beta\gamma$ auf $s$ und durch die Secante $t$ der beliebig gewählten realen oder conjugirt complexen Curvenpunkte $\varepsilon\zeta$ lege man Ebenen und erhalte dadurch auf der $R_3$ der Reihe nach die Punkte $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, $\delta'$. Alsdann hat man die gleichen Producte

$$\alpha'\varepsilon\zeta=\beta\gamma\delta,\quad \beta'\varepsilon\zeta=\alpha\gamma\delta,\quad \gamma'\varepsilon\zeta=\alpha\beta\delta,\quad \delta'\varepsilon\zeta=\alpha\beta\gamma.$$

Hieraus folgt

$$\alpha\alpha'=\beta\beta'=\gamma\gamma'=\delta\delta'.$$

Dies ergiebt den Satz: Wenn man die Spuren, welche eine Secante $s$ einer $R_3$ auf den Flächen eines eingeschriebenen Tetraeders erzeugt, von einer andern Secante $t$ aus auf die Curve projicirt, so sind die Geraden, welche diese Projectionen mit den gegenüberliegenden Tetraederecken verbinden, mit $s$ auf einer Regelfläche zweiter Ordnung enthalten.

16. Secanten einer $R_3$, welche Punktpaare einer Involution enthalten, erfüllen eine Regelfläche zweiter Ordnung $F_2$.*

Denn aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} a-b\,.(\lambda_1+\lambda_2)+c\,.\lambda_1\lambda_2&=0,\\ T_0-T_1.(\lambda_1+\lambda_2)+T_2.\lambda_1\lambda_2&=0,\\ T_1-T_2.(\lambda_1+\lambda_2)+T_3.\lambda_1\lambda_2&=0 \end{aligned}$$

folgt

$$1)\qquad \begin{vmatrix} a & b & c\\ T_0 & T_1 & T_2\\ T_1 & T_2 & T_3 \end{vmatrix}=0;$$

die drei Flächen

* Schröter, Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung, Leipzig 1880, S. 235.

$$\begin{vmatrix} T_0 & T_1 \\ T_1 & T_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} T_1 & T_2 \\ T_2 & T_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} T_2 & T_0 \\ T_3 & T_1 \end{vmatrix} = 0$$

enthalten die $R_3$.

Umgekehrt: Die Secanten einer $R_3$, welche auf einer die $R_3$ enthaltenden $F_2$ liegen, bestimmen auf $R_3$ die Punktpaare einer Involution.

Denn jede die $R_3$ enthaltende $F_2$ hat eine Gleichung von der Form 1). Sind $\lambda_1$ und $\lambda_2$ die Parameter zweier Punkte auf $R_3$, welche eine auf $F_2$ enthaltene Secante $s$ bestimmen, so gelten für jeden Punkt von $s$ ausser 1) noch die Gleichungen

$$2)\quad T_0 - (\lambda_1 + \lambda_2) T_1 + \lambda_1 \lambda_2 T_2 = 0, \quad T_1 - (\lambda_1 + \lambda_2) T_2 + \lambda_1 \lambda_2 T_3 = 0.$$

Multiplicirt man in 1) die zweite und dritte Columne mit $-(\lambda_1 + \lambda_2)$ und $\lambda_1 \lambda_2$ und addirt dieselben dann zur ersten, so folgt unter Rücksicht auf 2)

$$a - b(\lambda_1 + \lambda_2) + c\,\lambda_1 \lambda_2 = 0.$$

17. Den Identitäten Nr. 2, IV) kann man den Satz entnehmen: Die drei Involutionen, welche durch die Elementenpaare

$$\lambda_1 \lambda_2 \text{ und } \lambda_4 \lambda_5, \quad \lambda_2 \lambda_3 \text{ und } \lambda_5 \lambda_6, \quad \lambda_3 \lambda_4 \text{ und } \lambda_6 \lambda_1$$

bestimmt sind, haben ein gemeinsames (reales oder complexes) Paar. Bezeichnet man die Zahlen dieses Paares mit $\mu$ und $\mu'$, so erfordert der Satz, dass sich die Zahlen $a, b, c$; $a_1, b_1, c_1$; $a_2, b_2, c_2$ so bestimmen lassen, dass folgende drei Systeme erfüllt sind:

$$1)\quad \begin{cases} a - b\,(\mu + \mu') + c\mu\mu' = 0, \\ a - b\,(\lambda_1 + \lambda_2) + c\lambda_1 \lambda_2 = 0, \\ a - b\,(\lambda_4 + \lambda_5) + c\,\lambda_4 \lambda_5 = 0; \end{cases}$$

$$2)\quad \begin{cases} a_1 - b_1\,(\mu + \mu') + c_1\,\mu\mu' = 0, \\ a_1 - b_1\,(\lambda_2 + \lambda_3) + c_1 \lambda_2 \lambda_3 = 0, \\ a_1 - b_1\,(\lambda_5 + \lambda_6) + c_1 \lambda_5 \lambda_6 = 0; \end{cases}$$

$$3)\quad \begin{cases} a_2 - b_2\,(\mu + \mu') + c_2\,\mu\,\mu' = 0. \\ a_2 - b_2\,(\lambda_3 + \lambda_4) + c_2 \lambda_3 \lambda_4 = 0, \\ a_2 - b_2\,(\lambda_6 + \lambda_1) + c_2 \lambda_6 \lambda_1 = 0. \end{cases}$$

Setzt man nun

$$\begin{aligned} A_0 &\equiv m_{12} + m_{45} = m_{23} + m_{56} = m_{34} + m_{61}, \\ A_1 &\equiv (1+2) m_{12} + (4+5) m_{45} = (2+3) m_{23} + (5+6) m_{56} = (3+4) m_{34} + (6+1) m_{61}, \\ A_2 &\equiv 12 m_{12} + 45 m_{45} = 23 m_{23} + 56 m_{56} = 34 m_{34} + 61 m_{61}, \end{aligned}$$

so erkennt man, dass den Systemen 1), 2), 3) durch die Annahme genügt wird:

$$1 : (\mu + \mu') : \mu\mu' = A_0 : A_1 : A_2.$$

18. Der letzte Satz in Verbindung mit dem vorletzten ergiebt sofort: Die drei Flächen zweiter Ordnung, welche durch die Paare Gegenseiten eines unebenen Sechsecks und die demselben um-

geschriebene $R_3$ bestimmt sind, haben eine Secante der $R_3$ gemein (bilden also ein Flächenbüschel).

19. Die Gleichung der Fläche, welche eine Secante einer $R_3$ beschreibt, wenn sie sich entlang einer Geraden $P_1 P_2$ bewegt, kann auf folgendem Wege gewonnen werden.

Bezeichnet $T_{ik}$ den Werth, welchen $T_i$ für die homogenen Coordinaten eines Punktes $P_k$ annimmt, so liegt der Punkt $P$, für den

$$x_k = \frac{\mu_1 x_{k_1} + \mu_2 x_{k_2}}{\mu_1 + \mu_2},$$

auf der Secante $\lambda_1 \lambda_2$, wenn die Gleichungen erfüllt sind

$$\mu_1 [T_{01} - (\lambda_1 + \lambda_2) T_{11} + \lambda_1 \lambda_2 T_{21}] + \mu_2 [T_{02} - (\lambda_1 + \lambda_2) T_{12} + \lambda_1 \lambda_2 T_{22}] = 0,$$
$$\mu_1 [T_{11} - (\lambda_1 + \lambda_2) T_{21} + \lambda_1 \lambda_2 T_{31}] + \mu_2 [T_{12} - (\lambda_1 + \lambda_2) T_{22} + \lambda_1 \lambda_2 T_{32}] = 0.$$

Hieraus folgt die gesuchte Gleichung durch Elimination von $\mu_1$ und $\mu_2$ zu

$$1) \quad \begin{vmatrix} T_{01} - (\lambda_1 + \lambda_2) T_{11} + \lambda_1 \lambda_2 T_{21} & T_{02} - (\lambda_1 + \lambda_2) T_{12} + \lambda_1 \lambda_2 T_{22} \\ T_{11} - (\lambda_1 + \lambda_2) T_{21} + \lambda_1 \lambda_2 T_{31} & T_{12} - (\lambda_1 + \lambda_2) T_{22} + \lambda_1 \lambda_2 T_{32} \end{vmatrix} = 0.$$

Aus den Gleichungen der Secante

$$T_0 - (\lambda_1 + \lambda_2) T_1 + \lambda_1 \lambda_2 T_2 = 0, \quad T_1 - (\lambda_1 + \lambda_2) T_2 + \lambda_1 \lambda_2 T_3 = 0$$

folgen die Verhältnisse

$$2) \qquad 1 : (\lambda_1 + \lambda_2) : \lambda_1 \lambda_2 = \begin{vmatrix} T_1 & T_2 \\ T_2 & T_3 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} T_2 & T_0 \\ T_1 & T_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} T_0 & T_1 \\ T_1 & T_2 \end{vmatrix}.$$

Wird dies in 1) substituirt, so ergiebt sich die gesuchte Flächengleichung. Sie ist vom vierten Grade. Liegt $P_1$ auf $R_3$, so zerfällt die Fläche in den Kegel zweiter Ordnung, der $R_3$ von $P_1$ aus projicirt, und die durch $R_3$ und $P_1 P_2$ bestimmte Fläche zweiter Ordnung; liegen $P_1$ und $P_2$ auf $R_3$, so besteht die Fläche aus den beiden Kegeln, welche die $R_3$ von $P_1$ und $P_2$ aus projiciren.

Die Secanten, welche zwei Gerade $P_1 P_2$ und $P_3 P_4$ treffen, ermittelt man, indem man zu 1) noch die Gleichung fügt, die aus 1) hervorgeht, wenn $P_1$ und $P_2$ gegen $P_3$ und $P_4$ vertauscht werden. Für die Unbekannten $\lambda_1 + \lambda_2$ und $\lambda_1 \lambda_2$ erhält man so zwei quadratische Gleichungen: zu jedem der vier Wurzelsysteme gehört eine Secante der $R_3$. Daher folgt: Zwei Gerade werden von vier Secanten einer $R_3$ getroffen.

20. Das Achteck 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (wobei die Ziffern statt gleichbezifferter $\lambda$ stehen) sei einer $R_3$ eingeschrieben. Die Gegenebenen 123 und 567 bestimmen eine Gerade $a$, die Gegenebenen 234 und 678 bestimmen eine zweite Gerade $b$. Diese Geraden werden von den Secanten 23 und 67 getroffen, begegnen also ausserdem noch zwei Secanten der $R_3$. Eine derselben sei als Träger der Punkte 0 und $\infty$ gewählt. Nach Feststellung des (willkürlichen) Einheitspunktes ist alsdann jedem Punkte ein Parameter zu-

gewiesen, und diese Parameter seien durch die Ziffern $1 \ldots 8$ bezeichnet. Dann gelten, weil $0\,\infty$ die Geraden 123, 567 und 234, 678 trifft (Nr. 15), die Gleichungen der Producte

$$1.2.3 = 5.6.7, \quad 2.3.4 = 6.7.8.$$

Hieraus folgt

$$1.8 = 4.5.$$

In Rücksicht auf Nr. 14 folgt daher:

Construirt man die beiden Schnittlinien von zwei Paaren Gegenebenen eines einer $R_3$ eingeschriebenen Achtecks, sowie die beiden Secanten der $R_3$, welche diese Geraden treffen und nicht zugleich Seiten des Achtecks sind, so liegen diese beiden Secanten mit den auf den construirten Gegenebenen nicht enthaltenen beiden Seiten des Achtecks auf einer die $R_3$ enthaltenden Fläche zweiter Ordnung.

---

# Kleinere Mittheilungen.

## XVI. Ueber einen von Steiner entdeckten Satz und einige verwandte Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung.

Der Satz, welchen ich beweisen will, wurde von Steiner Bd. XXXI S. 90 des Crelle'schen Journals* gegeben; von demselben kenne ich keinen Beweis und ich halte es daher nicht für unnöthig, die folgenden Zeilen zu veröffentlichen.

Der Gedankengang, welcher mich zu dem obengenannten Lehrsatze führte, zeigt die Verbindung desselben mit den Resultaten neuerer Untersuchungen über die Invarianteneigenschaften einiger algebraischen Formen gegen gewisse specielle lineare Transformationen und der entsprechenden geometrischen Figuren. Derselbe Gedanke hat mich auch zu einigen verwandten Sätzen geführt, die mir bemerkenswerth scheinen und welche theils Chasles angehören, theils neu sind; sie können als ein Beitrag zum Studium der metrischen Invarianten** des von einer Fläche zweiter Ordnung und einem Punkte zusammengesetzten Systems angesehen werden.

### § 1.

Ich führe hier sogleich den folgenden Hilfssatz an, von welchem ich in Nachstehendem mehrmals Gebrauch machen werde:

Ist $f(x, y, z)$ eine algebraische ganze Function der rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes im Raume, und führt man eine Coordinatentransformation aus, bei welcher der Anfangspunkt fest bleibt, so behält nicht nur die gegebene Function selbst, sondern auch jede der folgenden Functionen:

$$\varDelta_1 f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}, \quad \varDelta_2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.***$$

ihren Werth für jeden beliebigen Punkt bei.

Der Fall, auf welchen wir diesen Satz anwenden wollen, ist derjenige, wo

$$1) \quad \begin{aligned} f(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} \quad (a_{ik} = a_{ki}) \end{aligned}$$

ist; setzt man der Kürze halber

---

* Vergl. Jacob Steiner's Gesammelte Werke, II. Bd., 1882, S. 358.

** Siehe: Elling Holst, Ein Paar synthetischer Methoden in der metrischen Geometrie mit Anwendungen. Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Sivende Bind, 1882, S. 240 flgg.

*** Lamé, Leçons sur les coordonnées curvilignes, Paris 1859, S. 6. Die Functionen $\varDelta_1 f$ und $\varDelta_2 f$ sind die Differentialparameter der Function $f$.

$$2)\quad \begin{cases} f_1 = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}, \\ f_2 = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}, \\ f_3 = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}, \\ f_4 = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}, \end{cases}$$

so wird man finden, dass für eine orthogonale Substitution die Functionen

$$3)\quad \Delta_1 f = 2\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}, \quad \Delta_2 f = 2(a_{11} + a_{22} + a_{33})$$

ihren Werth beibehalten; insbesondere kann man schliessen, dass die Summe

$$a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2$$

diese Eigenschaft hat.

Der folgende Satz wird in vorliegender Arbeit keine Anwendung finden; doch werde ich ihn auseinandersetzen, da er bemerkenswerth ist und als eine Verallgemeinerung eines Theiles obigen Hilfssatzes angesehen werden kann.

Sind $x$, $y$, $z$ die Cartesischen Coordinaten eines Raumpunktes in Bezug auf ein Coordinatensytem, dessen Axen die Winkel yz, zx, xy zu zweien bilden, und haben $f(x, y, z)$, $f_1$, $f_2$, $f_3$, $f_4$ die vorhergehenden Bedeutungen, so bleibt der Werth der Function

$$f_4^2 \sin^2 \mathrm{xyz} : \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & 1 & \cos \mathrm{xy} & \cos \mathrm{xz} \\ f_2 & \cos \mathrm{yx} & 1 & \cos \mathrm{yz} \\ f_3 & \cos \mathrm{zx} & \cos \mathrm{zy} & 1 \end{vmatrix} \;*$$

bei allen Coordinatentransformationen unverändert.

In der That, geben wir diesem Ausdrucke das entgegengesetzte Zeichen, so erhalten wir das Quadrat der Entfernung des Punktes $(x, y, z)$ von seiner Polarebene in Bezug auf die Fläche zweiter Ordnung $f(x, y, z) = 0$, und da dieses vom Coordinatensystem unabhängig ist, so schliesst man den Lehrsatz.

Setzt man insbesondere voraus, dass der betrachtete Punkt der Anfangspunkt sei, und erinnert man sich, dass eine Coordinatentransformation, bei welcher der Anfangspunkt fest bleibt, das constante Glied von $f(x, y, z)$ unverändert lässt, so kann man folgenden Zusatz erhalten:

Führt man eine Coordinatentransformation aus, bei welcher der Anfangspunkt fest bleibt, so behält die Function

$$\sin^2 xyz : \begin{vmatrix} 0 & a_{14} & a_{24} & a_{34} \\ a_{14} & 1 & \cos \mathrm{xy} & \cos \mathrm{xz} \\ a_{24} & \cos \mathrm{yx} & 1 & \cos \mathrm{yz} \\ a_{34} & \cos \mathrm{zx} & \cos \mathrm{zy} & 1 \end{vmatrix}.$$

ihren Werth bei.

---

* Es ist, wie gewöhnlich:

$$\sin^2 \mathrm{xyz} = \begin{vmatrix} 1 & \cos \mathrm{xy} & \cos \mathrm{xz} \\ \cos \mathrm{yx} & 1 & \cos \mathrm{yz} \\ \cos \mathrm{zx} & \cos \mathrm{zy} & 1 \end{vmatrix}.$$

Sind endlich die Coordinatenaxen rechtwinklig, so wird diese Function $-(a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2)$; daher kommt man zu einem schon erhaltenen Resultate zurück.

## § 2.

Mit Hilfe des angeführten Hilfssatzes ist der fragliche Steiner'sche Satz leicht zu beweisen. Derselbe lautet:

Wird eine gegebene Fläche $F$ zweiter Ordnung auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem $XYZ$ bezogen, dessen Anfangspunkt $A$ beliebig liegt, so entstehen in jeder Axe $X$, $Y$, $Z$ zwei Abschnitte, die beziehentlich durch $x_1$ und $x_2$, $y_1$ und $y_2$, $z_1$ und $z_2$ bezeichnet werden sollen, und ferner drei Abschnitte oder Sehnen zwischen den Schnittpunkten, die $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ heissen mögen. Wird das rechtwinklige Coordinatensystem um den nämlichen festen Anfangspunkt $A$ auf beliebige Art herumbewegt, so bleibt der Ausdruck

$$\frac{\alpha^2}{x_1^2 x_2^2} + \frac{\beta^2}{y_1^2 y_2^2} + \frac{\gamma^2}{z_1^2 z_2^2}$$

constant.*

---

* Herr Catalan legt in seinem Manuel des candidats à l'école polytechnique (T. II, Paris 1858, S. 38) folgende Aufgabe vor:

„*Théorème. Si l'on désigne par* $x'$, $x''$; $y'$, $y''$; $z'$, $z''$ *les distances comprises entre le sommet d'un angle trièdre trirectangle et les poits où les arêtes de ce trièdre rencontrent une surface du second ordre, la fonction*

$$\frac{(x'+x'')^2}{x'^2+x''^2} + \frac{(y'+y'')^2}{y'^2+y''^2} + \frac{(z'+z'')^2}{z'^2+z''^2}$$

*est invariable, quelle que soit la position de l'angle trièdre. (Théorème de M. Steiner.)*"

Dieser Satz hat einige Aehnlichkeit mit demjenigen, welcher uns jetzt beschäftigt; doch wurde er nie von Steiner ausgesprochen, wie man sich aus seinen „Gesammelten Werken" sehr leicht überzeugen kann. Ueberdies ist er unrichtig: das folgende Raisonnement beweist in der That, dass die Flächen zweiter Ordnung die obige Eigenschaft nicht haben.

Betrachten wir das Trieder in einer gewissen Lage, halten seinen Scheitelpunkt $A$ und eine seiner Kanten, z. B. $AZ$, fest und lassen es um diese drehen. Die Punkte, in denen $AZ$ die Fläche schneidet, werden auch fest sein, während die Schnittpunkte von $AX$ und $AY$ sich bewegen werden und als die Durchschnitte eines rechten Winkels, welcher sich um $A$ und in der Ebene $XAY$ dreht, mit dem Kegelschnitte, in welchem $XAY$ die gegebene Fläche schneidet, angesehen werden können. Daraus folgt, dass, wenn der Catalan'sche Satz wahr wäre, jeder Kegelschnitt die folgende Eigenschaft haben würde:

„Sind $x'$, $x''$; $y'$, $y''$ die Entfernungen der Spitze eines rechten Winkels von den Schnittpunkten seiner Seiten mit einem in derselben Ebene gelegenen Kegelschnitte, so hat die Function $\frac{(x'+x'')^2}{x'^2+x''^2} + \frac{(y'+y'')^2}{y'^2+y''^2}$ einen von der Lage des Winkels unabhängigen Werth."

Seien $x$, $y$, $z$ die Coordinaten des Punktes $A$ in einem Coordinatensystem, dessen Axen den Kanten des gegebenen Trieders in seiner ursprünglichen Lage parallel sind; sei

$$f(x, y, z) = 0$$

die Gleichung der gegebenen Fläche $F$, wo der Ausdruck von $f(x, y, z)$ aus 1) zu nehmen ist.

Die Abscissen $\xi_1$ und $\xi_2$ der Punkte, in welchen die Gerade $AX$ die Fläche $F$ schneidet, werden die Wurzeln der Gleichung

$$\text{a)} \quad a_{11}\xi^2 + 2(a_{12}y + a_{13}z + a_{14})\xi + (a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + 2a_{33}z^2 + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44})$$

sein; man hat daher

$$x_1 = x - \xi_1, \quad x_2 = x - \xi_2, \quad \pm\alpha = x_2 - x_1 = \xi_1 - \xi_2$$

und folglich

$$\text{b)} \quad x_1 x_2 = x^2 - (\xi_1 + \xi_2)x + \xi_1\xi_2 = \frac{f(x, y, z)}{a_{11}},$$

$$\alpha^2 = (\xi_1 - \xi_2)^2 = (\xi_1 + \xi_2)^2 - 4\xi_1\xi_2$$

$$= \frac{4}{a_{11}^2}\{(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14})^2 - a_{11}f(x, y, z)\},$$

$$\frac{\alpha^2}{x_1^2 x_2^2} = 4\left\{\left[\frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}}{f(x, y, z)}\right]^2 - \frac{a_{11}}{f(x, y, z)}\right\}.$$

Schreibt man der Kürze wegen $f$ statt $f(x, y, z)$ und bezeichnet die Werthe, welche die Ableitungen von $f(x, y, z)$ im Punkte $A$ annehmen, mit $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$, so erhält man:

$$\text{4)} \quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\alpha^2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{f^2} - 2\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{f} = 4\left\{\frac{f_1^2}{f^2} - \frac{a_{11}}{f}\right\}, \\ &\text{ebenso:} \\ &\frac{\beta^2}{y_1^2 y_2^2} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}{f^2} - 2\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{f} = 4\left\{\frac{f_2^2}{f^2} - \frac{a_{22}}{f}\right\}, \\ &\frac{\gamma^2}{z_1^2 z_2^2} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}{f^2} - 2\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}{f} = 4\left\{\frac{f_3^2}{f^2} - \frac{a_{33}}{f}\right\}. \end{aligned}\right.$$

---

Um am leichtesten zu sehen, dass dieser Satz falsch ist, setzen wir den Scheitelpunkt des beweglichen Winkels in eine ausgezeichnete Lage, z. B. in den Brennpunkt des gegebenen Kegelschnittes. Ist

$$\varrho = \frac{a}{1 + e\cos\varphi}$$

die Polargleichung derselben, und betrachtet man den beweglichen Winkel im Augenblicke, wo eine seiner Seiten mit den Axen den Winkel $\alpha$, die andere den Winkel $\frac{\pi}{2} + \alpha$ bildet, so findet man

$$\frac{(x' + x'')^2}{x'^2 + x''^2} + \frac{(y' + y'')^2}{y'^2 + y''^2} = 2\,\frac{1 + e^2}{1 + e^2 + e^4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$$

und dieser Werth ist von $\alpha$ nicht unabhängig, wie es sein müsste, wenn der **Catalan'sche Satz** richtig wäre.

Aus diesen drei Gleichungen folgt:

$$\frac{\alpha^2}{x_1^2 x_2^2}+\frac{\beta^2}{y_1^2 y_2^2}+\frac{\gamma^2}{z_1^2 z_2^2}=\left\{\left(\frac{\Delta_1 f}{f}\right)^2-2\frac{\Delta_2 f}{f}\right\}.$$

Aus dem schon angeführten Hilfssatze kann man nun schliessen, dass die Grösse zur rechten Hand dieser Gleichung bei einer Drehung des Coordinatensytems um seinen Anfangspunkt ihren Werth beibehält; dasselbe gilt also von der Grösse linker Hand. Und da endlich die Drehung des Coordinatensystems um seinen Anfangspunkt einer Drehung des gegebenen Coordinatensystems um den Punkt $A$ entspricht, und umgekehrt, so ist damit die Wahrheit des Steiner'schen Theorems nachgewiesen.*

Demselben mögen hier folgende Bemerkungen beigefügt werden.

Wenn eine Fläche zweiter Ordnung gegeben ist, so kann man jedem Punkte des Raumes eine bestimmte Zahl beilegen, diejenige nämlich, welche den Werth der Function $\left(\frac{\Delta_1 f}{f}\right)^2-2\frac{\Delta_2 f}{f}$ in diesem Punkte ergiebt. Der Ort der Punkte, in welchen diese Function einen gegebenen Werth $(-4c)$ hat, ist die Fläche vierter Ordnung, deren Gleichung

$$f_1^2+f_2^2+f_3^2-(a_{11}+a_{22}+a_{33})f+cf^2=0$$

oder

$$cf^2=(a_{11}+a_{22}+a_{33})f-(f_1^2+f_2^2+f_3^2)$$

ist. Aus dieser letzteren folgt sogleich**, dass diese Fläche einen Doppelkegelschnitt hat, nämlich denjenigen, in welchem die unendlich ferne Ebene von der Fläche $F$ geschnitten wird. Lässt man $c$ variiren, so erhält man ein ganzes Büschel von Flächen dieser Art, welche die Doppelcurve gemeinsam haben und durch die (imaginäre) Curve vierter Ordnung erster Species gehen, in welcher die gegebene Fläche von dem (imaginären) Quadrikegel

$$f_1^2+f_2^2+f_3^2=0$$

geschnitten wird.

## § 3.

Setzen wir jetzt voraus, dass die gegebene Fläche einen Mittelpunkt habe und dass man in denselben den Anfangspunkt $A$ des Coordinatensystems lege, so wird man folgende Gleichungen haben:

---

* Will man den Steiner'schen Satz beweisen, ohne Lamé's Hilfssatz zu gebrauchen, so nehme man die Kanten des gegebenen Trieders in seiner ursprünglichen Lage als Coordinatenaxen; man wird dann die Gleichung erhalten:

$$\frac{\alpha^2}{x_1^2 x_2^2}+\frac{\beta^2}{y_1^2 y_2^2}+\frac{\gamma^2}{z_1^2 z_2^2}=4\left\{\frac{a_{14}^2+a_{24}^2+a_{34}^2}{a_{44}^2}-\frac{a_{11}+a_{22}+a_{33}}{a_{44}}\right\},$$

deren rechte Seite aus den Functionen:

$$a_{44},\quad a_{11}+a_{22}+a_{33},\quad a_{14}^2+a_{24}^2+a_{34}^2$$

zusammengesetzt ist, deren Invarianz bekannt ist. Analoge Bemerkungen kann man zu den folgenden Sätzen machen.

** Siehe Kummer, Ueber die Flächen vierten Grades, auf welchen Schaaren von Kegelschnitten liegen, Monatsberichte der Berl. Akad. 1863 S. 327.

$$x_1 = -x_2 = \frac{\alpha}{2}, \quad y_1 = -y_2 = \frac{\beta}{2}, \quad z_1 = -z_2 = \frac{\gamma}{2}$$

woraus man schliessen kann, dass

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$$

constant ist. Das drückt die bekannte von Chasles entdeckte Eigenschaft aus:

Die Summe der Quadrate der reciproken Werthe irgend dreier zu einander rechtwinkligen Durchmesser einer Fläche zweiter Ordnung ist constant.*

Es ist bemerkenswerth, dass es ausser dem Steiner'schen noch einen andern Satz giebt, welcher als eine Verallgemeinerung des Chasles'schen Satzes angesehen werden kann. Es ist der folgende:

Wird eine gegebene Fläche zweiter Ordnung auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem $XYZ$ bezogen, dessen Anfangspunkt beliebig liegt, so entstehen in jeder Axe $XYZ$ zwei Abschnitte, die beziehentlich durch $x_1$ und $x_2$, $y_1$ und $y_2$, $z_1$ und $z_2$ bezeichnet werden sollen. Wird das rechtwinklige Coordinatensystem um den Anfangspunkt auf beliebige Art herumbewegt, so bleibt der Ausdruck

$$\frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{y_1 y_2} + \frac{1}{z_1 z_2}$$

constant.**

In der That haben wir im vorigen Paragraphen [Gleich. b)] gesehen, dass

$$5) \quad \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{a_{11}}{f(x, y, z)} \text{ ist, ebenso } \frac{1}{y_1 y_2} = \frac{a_{11}}{f(x, y, z)}, \quad \frac{1}{z_1 z_2} = \frac{a_{11}}{f(x, y, z)}$$

und daher

$$\frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{y_1 y_2} + \frac{1}{z_1 z_2} = \frac{1}{2} \frac{\Delta_2 f}{f},$$

woraus mittels des Hilfssatzes unser Theorem unmittelbar folgt.

Der Ort der Punkte des Raumes, für welche obige Function einen gegebenen Werth hat, ist eine Fläche zweiter Ordnung, ähnlich und ähnlich gelegen mit der gegebenen.

---

* Chasles, Propriétés des Diamètres de l'ellipsoïde, Corresp. sur l'Ec. Polyt. T. III, 1815, S. 305, und Aperçu historique u. s. w., 2. Aufl. 1875, S. 824. — Vergl. auch: Démonstration de deux théorèmes par un Abonné, Annales de Mathématiques de M. Gergonne, T. XVIII S. 369.

** Die Function $\dfrac{1}{\frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{y_1 y_2} + \frac{1}{z_1 z_2}} = \dfrac{2f}{\Delta_2 f}$ kann wohl die Potenz des Punktes $xyz$ in Bezug auf die Fläche $F$ genannt werden; denn wenn $F$ eine Kugel ist, so misst sie das Dreifache der Potenz, im Steiner'schen Sinne, des Punktes in Bezug auf sie.

## § 4.

Zu einem andern Lehrsatze, welcher, wie die vorigen, von der gegenseitigen Lage eines rechtwinkligen Trieders und einer Fläche zweiter Ordnung handelt, gelangt man mittels folgender Betrachtungen.

Wie gewöhnlich, seien $x$, $y$, $z$ die rechtwinkligen Coordinaten eines festen Punktes $P$, welcher die Spitze eines rechtwinkligen Trieders ist, dessen Kanten den Coordinatenaxen parallel sind; seien noch $A_1, A_2$; $B_1, B_2$; $C_1, C_2$ die Punkte, in denen die Kanten des Trieders die Fläche schneiden, deren Gleichung

$$1)\quad \begin{aligned} f(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \end{aligned}$$

ist; seien endlich $\xi_1$, $\xi_2$ die Werthe der $x$-Coordinate der Punkte $A_1$, $A_2$; $\eta_1$, $\eta_2$ die Werthe der $y$-Coordinate der Punkte $B_1$, $B_2$; $\zeta_1$, $\zeta_2$ die Werthe der $z$-Coordinate der Punkte $C_1$, $C_2$. Sehr leicht findet man [vergl. § 2 Gleich. a)]

$$6)\quad \left\{ \begin{aligned} \xi_1 + \xi_2 &= -2\frac{f_1 - a_{11}x}{a_{11}}, \quad & \xi_1\xi_2 &= \frac{f - 2xf_1 + a_{11}x^2}{a_{11}}; \\ \eta_1 + \eta_2 &= -2\frac{f_2 - a_{22}y}{a_{22}}, \quad & \eta_1\eta_2 &= \frac{f - 2yf_2 + a_{22}y^2}{a_{22}}; \\ \zeta_1 + \zeta_2 &= -2\frac{f_3 - a_{33}z}{a_{33}}, \quad & \zeta_1\zeta_2 &= \frac{f - 2zf_3 - a_{33}z^2}{a_{33}}, \end{aligned} \right.$$

wo $f$, $f_1$, $f_2$, $f_3$, $f_4$ die Bedeutung haben, welche in § 1 auseinandergesetzt wurde. Da man nun annehmen kann, dass $f_1$, $f_2$, $f_3$, $f_4$ die Coefficienten der Gleichung der Polarebene $\pi$ des Punktes $P$ seien, so ist es nicht schwer, die Entfernungen zu finden, welche die Punkte $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$, $C_1$, $C_2$ von der Ebene $\pi$ haben. Führt man diese Rechnung aus, so kann man mit leichter Mühe folgende Gleichungen erhalten:

$$7)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\overline{A_1\pi}^2}{\overline{A_1P}^2} + \frac{\overline{A_2\pi}^2}{\overline{A_2P}^2} &= 2\frac{f_1^2 - a_{11}f}{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}, \\ \frac{\overline{B_1\pi}^2}{\overline{B_1P}^2} + \frac{\overline{B_2\pi}^2}{\overline{B_2P}^2} &= 2\frac{f_2^2 - a_{22}f}{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}, \\ \frac{\overline{C_1\pi}^2}{\overline{C_1P}^2} + \frac{\overline{C_2\pi}^2}{\overline{C_2P}^2} &= 2\frac{f_3^2 - a_{33}f}{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}, \end{aligned} \right.$$

wo überhaupt $\overline{M\nu}$ die Entfernung des Punktes $M$ von der Ebene $\nu$ bezeichnet. Hieraus folgt unmittelbar:

$$\frac{\overline{A_1\pi}^2}{\overline{A_1P}^2} + \frac{\overline{A_2\pi}^2}{\overline{A_2P}^2} + \frac{\overline{B_1\pi}^2}{\overline{B_1P}^2} + \frac{\overline{C_1\pi}^2}{\overline{B_2P}^2} + \frac{\overline{C_1\pi}^2}{\overline{C_1P}^2} + \frac{\overline{C_2\pi}^2}{\overline{C_2P}^2} = 2\left\{1 - \frac{2f\Delta_2 f}{(\Delta_1 f)^2}\right\}.$$

Geht man zu einem andern rechtwinkligen Coordinatensystem, welches denselben Anfangspunkt habe, über, so bleibt der zweite Theil dieser Gleich-

ung unverändert (§ 1); dasselbe kann man daher betreffs des ersten sagen. Andererseits entspricht die Bewegung des Coordinatensystems einer Bewegung des gegebenen Trieders, und umgekehrt. Infolge dessen können wir endlich schliessen:

Ist $P$ die Spitze eines beweglichen rechtwinkligen Trieders, $\pi$ die Polarebene von $P$ in Bezug auf eine gegebene Fläche zweiter Ordnung $F$, sind endlich $A_1$, $A_2$; $B_1$, $B_2$; $C_1$, $C_2$ die Durchschnitte der Kanten des Trieders mit $F$, so hat die Function

$$\frac{\overline{A_1\pi}^2}{\overline{A_1P}^2}+\frac{\overline{A_2\pi}^2}{\overline{A_1P}^2}+\frac{\overline{B_1\pi}^2}{\overline{B_1P}^2}+\frac{\overline{B_2\pi}^2}{\overline{B_2P}^2}+\frac{\overline{C_1\pi}^2}{\overline{C_1P}^2}+\frac{\overline{C_2\pi}^2}{\overline{C_2P}^2}$$

denselben Werth bei jeder Lage des Trieders.*

Der Ort der Punkte des Raumes, in welchen diese Function einen gegebenen Werth hat, ist eine Fläche zweiter Ordnung, welche denselben Mittelpunkt und dieselben Axen wie $F$ hat.

## § 5.

Auch die Eigenschaften der conjugirten Durchmesser, die Livet und Binet, wie analog den wohlbekannten Apollonischen Lehrsätzen über die Kegelschnitte, gegeben haben, können verallgemeinert werden, wie ich jetzt beweisen will.

Die Gleichung jeder centrischen Fläche zweiter Ordnung kann auf die folgende Form gebracht werden:

$$8)\quad f(x,y,z)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0;$$

es ist dazu nothwendig und hinreichend, dass man zu Coordinatenaxen drei Gerade wählt, welche zu drei conjugirten Durchmessern parallel sind. Drei solche Geraden bilden ein Trieder, das wir **conjugirtes Trieder** in Bezug auf die gegebene Fläche nennen wollen.

Sind $yz$, $zx$, $xy$ die Winkel, welche die Coordinatenaxen je zu zweien bilden, so bleiben die Werthe der Functionen:

$$\frac{a_{11}a_{22}a_{33}}{\sin^2 xyz},$$

$$\frac{a_{22}a_{33}+a_{33}a_{11}+a_{11}a_{22}}{\sin^2 xyz},$$

$$\frac{a_{11}\sin^2 yz+a_{22}\sin^2 zx+a_{33}\sin^2 xy}{\sin^2 xyz},$$

wenn man von einem Coordinatensystem, dessen Axen ein conjugirtes Trieder bilden, zu einem andern Coordinatensystem derselben Art und mit demselben Anfangspunkt übergeht, unverändert.** Nennen wir $B$, $C$, $D$

* Chasles, Aperçu historique u. s. w., S. 713.

** Siehe das vortreffliche Lehrbuch meines verehrten Lehrers Prof. E. D'Ovidio: Le proprietà fondamentali delle superficie di second'ordine (Turin 1883), S. 16–22.

resp. die Werthe dieser Functionen, so ist $B \gtrless 0$, und daher können wir schreiben:

$$B = \frac{a_{11}a_{22}a_{33}}{\sin^2 xyz}, \quad \frac{C}{B} = \frac{1}{a_{11}} + \frac{1}{a_{22}} + \frac{1}{a_{33}}, \quad \frac{D}{B} = \frac{\sin^2 yz}{a_{22}a_{33}} + \frac{\sin^2 zx}{a_{33}a_{11}} + \frac{\sin^2 xy}{a_{11}a_{22}}.$$

Nun haben wir aus der Betrachtung eines Trieders, dessen Spitze der Punkt $(x, y, z)$ ist und dessen Kanten den Coordinatenaxen parallel sind, erhalten [§ 3 Gl. 5)]:

$$a_{11} = \frac{f}{x_1 x_2}, \quad a_{22} = \frac{f}{y_1 y_2}, \quad a_{33} = \frac{f}{z_1 z_2}\,^*;$$

daher gehen die vorigen Gleichungen in die folgenden über:

$$9)\quad \begin{cases} x_1 y_1 z_1 x_2 y_2 z_2 \sin^2 xyz = \dfrac{f^3}{B}, \\ x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = \dfrac{Cf}{B}, \\ y_1 z_1 y_2 z_2 \sin^2 yz + z_1 x_1 z_2 x_2 \sin^2 zx + x_1 y_1 x_2 y_2 \sin^2 xy = \dfrac{Df^2}{B}. \end{cases}$$

Nach dem früher Auseinandergesetzten folgt nun unmittelbar, dass die Grössen rechter Hand unverändert bleiben, wenn wir das conjugirte Trieder, welches unserem Coordinatensystem zu Grunde liegt, verändern; somit bleiben auch die Grössen linker Hand constant. Hiermit ist der folgende Satz bewiesen:

Wird eine gegebene Fläche zweiter Ordnung, die kein Paraboloid ist, auf ein conjugirtes Trieder $XYZ$ bezogen, dessen Anfangspunkt $P$ beliebig ist, so entstehen auf jeder Axe zwei Punkte, die wir beziehungsweise $A_1$ und $A_2$, $B_1$ und $B_2$, $C_1$ und $C_2$ nennen wollen. Wird das conjugirte Trieder um den Punkt $P$ gedreht, so bleiben die folgenden Grössen constant:

I. das Product der Volumina der Tetraeder $PA_1B_1C_1$ und $PA_2B_2C_2$;

II. die Summe der Producte der Flächen der Dreiecke $PB_1C_1$ und $PB_2C_2$, $PC_1A_1$ und $PC_2A_2$, $PA_1B_1$ und $PA_2B_2$;

III. die Summe der Producte $PA_1 . PA_2$, $PB_1 . PB_2$, $PC_1 . PC_2$**.

Ist $P$ insbesondere der Mittelpunkt der Fläche, so schliesst man:

In einer Fläche zweiter Ordnung, die einen Mittelpunkt hat:

I. das Tetraeder, welches drei conjugirte Halbmesser zu seinen Kanten hat, hat einen constanten Inhalt. (Livet's Satz);

---

* $f = f(x, y, z)$ ist aus 8) zu entnehmen.

** Die Wahl der Benennung der Punkte $A_i$, $B_i$, $C_i$ hat keinen Einfluss auf diese Resultate.

II. die Summe der Quadrate der Flächen der Dreiecke, die drei conjugirte Halbmesser zu je zweien bestimmen, ist constant. (Binet's Satz);

III. die Summe der Quadrate dreier conjugirten Halbmesser ist constant. (Livet's Satz.)

Um zu einem ähnlichen Satze über die Flächen zweiter Ordnung ohne Mittelpunkt zu gelangen, bemerken wir, dass die Gleichung eines Paraboloids immer auf die folgende Form gebracht werden kann:

$$10)\quad f(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0;$$

es ist zwar die $z$-Axe parallel der Axe des Paraboloids und die zwei anderen Axen sind parallel zweien conjugirten Durchmessern eines ebenen Querschnittes der Fläche. Drei solche Geraden bilden ein Trieder, das wir wieder ein conjugirtes Trieder nennen wollen, wovon die $z$-Axe die Hauptkante, die anderen die Nebenkanten genannt werden mögen. Geht man von dem gewählten Coordinatensystem zu einem andern derselben Art und mit demselben Anfangspunkte über, so bleiben die Werthe der folgenden Functionen:

$$C = \frac{a_{11}a_{22}}{\sin^2 \mathrm{xyz}}, \quad D = \frac{a_{11}\sin^2 \mathrm{yz} + a_{22}\sin^2 \mathrm{xz}}{\sin^2 \mathrm{xyz}}$$

constant. Andererseits hat uns die Betrachtung eines Trieders, dessen Kanten den Coordinatenaxen parallel sind und dessen Spitze ein fester Punkt ist, zu folgenden Gleichungen geführt:

$$a_{11} = \frac{f}{x_1x_2}, \quad a_{22} = \frac{f}{y_1y_2}.^*$$

Daher kann man schliessen, dass

$$x_1x_2\sin^2 \mathrm{xz} + y_1y_2\sin^2 \mathrm{yz} = \frac{Df}{C}$$

ist; und es ist leicht zu sehen, dass diese Gleichung als der analytische Ausdruck des folgenden Satzes angesehen werden kann:

Wird ein gegebenes Paraboloid auf ein conjugirtes Trieder bezogen, dessen Spitze $P$ beliebig liegt, so entstehen auf jeder seiner Nebenkanten zwei Punkte; sind $h_1$, $h_2$ und $k_1$, $k_2$ die Entfernungen derselben von seinen Hauptaxen, so ist die Summe $h_1h_2 + k_1k_2$ von dem gewählten conjugirten Trieder unabhängig.

Endlich will ich noch bemerken, dass alle die Sätze, mit welchen wir uns beschäftigt haben, ihre entsprechenden nicht nur in der Theorie der Kegelschnitte haben (wie schon Steiner für sein Theorem bemerkte), sondern auch in derjenigen der Flächen zweiter Ordnung in einem linearen Raume von beliebig vielen Dimensionen mit einer Euclidischen Maassbestimmung.

* $f = f(x, y, z)$ ist aus 10) zu entnehmen.

Mantua, Juli 1885. Dr. Gino Loria.

## XVII. Ueber gewisse Schaaren von Dreieckskreisen.

Es bezeichne $\varrho$ den Radius des in ein Dreieck $ABC$ beschriebenen Kreises, $r$ den Halbmesser desjenigen Aussenkreises, welcher $AB$ nebst den Verlängerungen von $CA$ und $CB$ berührt, endlich $R$ den Radius des um $ABC$ construirten Kreises; nach bekannten Formeln ist dann

$$\frac{\varrho+r}{2R}=(a+b)\frac{c^2-(a-b)^2}{2abc}$$

oder, wenn man das arithmetische Mittel zwischen $\varrho$ und $r$ mit $\mu$ bezeichnet und die Seiten durch die Winkel ausdrückt,

$$1)\qquad \frac{\mu}{R}=\cos\alpha+\cos\beta.$$

Ebenso leicht findet man

$$2)\qquad \frac{\varrho}{r}=\frac{a+b-c}{a+b+c}=\tan\tfrac{1}{2}\alpha.\tan\tfrac{1}{2}\beta.$$

Von diesen Relationen lassen sich folgende Anwendungen machen.

Auf der Seite $AB$ wähle man beliebig die Punkte $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{n-1}$, ebenso willkürlich auf $AC$ den Punkt $Q_1$, auf $P_1Q_1$ den Punkt $Q_2$, auf $P_2Q_2$ den Punkt $Q_3$ u. s. w., endlich heisse $D$ der Durchschnitt von $P_{n-1}Q_{n-1}$ und $BC$; wendet man nun *mutatis mutandis* die Gleichung 1) auf die $n$ Dreiecke $AP_1Q_1$, $P_1P_2Q_2$, $P_2P_3Q_3$, …, $P_{n-1}BD$ an, so erhält man

$$\frac{\mu_1}{R_1}=\cos\alpha+\cos AP_1Q_1,\quad \frac{\mu_2}{R_2}=\cos Q_2P_1P_2+\cos P_1P_2Q_2,\quad \ldots,$$
$$\ldots,\quad \frac{\mu_n}{R_n}=\cos DP_{n-1}B+\cos\beta.$$

Durch Addition dieser Gleichungen unter Berücksichtigung des Umstandes, dass die Summe der Cosinus zweier Nebenwinkel verschwindet, ergiebt sich rechter Hand $\cos\alpha+\cos\beta$, d. i. nach Nr. 1

$$3)\qquad \frac{\mu_1}{R_1}+\frac{\mu_2}{R_2}+\ldots+\frac{\mu_n}{R_n}=\frac{\mu}{R}.$$

In analoger Weise kann die Relation 2) auf die vorhin genannten $n$ Dreiecke angewendet werden; zunächst erhält man

$$\frac{\varrho_1}{r_1}=\tan\tfrac{1}{2}\alpha.\tan\tfrac{1}{2}AP_1Q_1,\quad \frac{\varrho_2}{r_2}=\tan\tfrac{1}{2}Q_2P_1P_2.\tan\tfrac{1}{2}P_1P_2Q_2,\quad \ldots,$$
$$\ldots,\quad \frac{\varrho_n}{r_n}=\tan\tfrac{1}{2}DP_{n-1}B.\tan\tfrac{1}{2}\beta.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen und beachtet, dass das Product der Tangenten zweier halben Nebenwinkel $=1$ ist, so findet man rechter Hand den Ausdruck $\tan\frac{1}{2}\alpha.\tan\frac{1}{2}\beta$, mithin nach Nr. 2)

$$4)\qquad \frac{\varrho_1}{r_1}.\frac{\varrho_2}{r_2}\ldots\frac{\varrho_n}{r_n}=\frac{\varrho}{r}.$$

In dem sehr speciellen Falle, wo die beliebigen Punkte $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-1}$ durch den einen Punkt $C$ vertreten werden, geht die Gleichung 4) in den auf S. 252 des laufenden Jahrgangs dieser Zeitschrift erwähnten Satz über.

SCHLÖMILCH.

---

## XVIII. Zwei Sätze über die Integrale simultaner Differentialgleichungen.

Sind

$$y_k = c_1 y_{k1} + c_2 y_{k2} + \ldots + c_k y_{kn}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

die Integrale des Systems linearer Differentialgleichungen

$$\text{a)} \quad \left\{ \begin{array}{l} p\dfrac{dy_1}{dx} + p_{11} y_1 + p_{12} y_2 + \ldots + p_{1n} y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p\dfrac{dy_n}{dx} + p_{n1} y_1 + p_{n2} y_2 + \ldots + p_{nn} y_n \end{array} \right.$$

und man setzt

$$\begin{vmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} = D, \quad \begin{vmatrix} y'_{11} & \cdots & y'_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y'_{n1} & \cdots & y'_{nn} \end{vmatrix} = D_1; \quad y'_{ik} = \frac{dy_{ik}}{dx},$$

so lässt sich zeigen, dass diese Integraldeterminanten in einfacher Weise durch die Coefficienten des Gleichungssystems a) ausgedrückt werden können, und zwar ergiebt sich*

$$\text{1)} \qquad D = ce^{-\int \frac{dx}{p} \sum_1^n p_{kk}}, \quad c = const.;$$

$$\text{2)} \qquad D_1 = \frac{(-1)^n}{p^n} \cdot P.D, \quad P = \begin{vmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & \cdot\ \cdot & p_{nn} \end{vmatrix}.$$

Die Richtigkeit des ersten Satzes wird folgendermassen erkannt:

Man setzt die entsprechenden partikulären Lösungen in die $k^{\text{te}}$ Differentialgleichung des Systems a) ein und gelangt dadurch zu $n$ identischen Gleichungen der Form

$$\text{b)} \qquad p y'_{ki} + p_{k1} y_{1i} + \ldots + p_{kn} y_{ni}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Eliminirt man aus diesen die Coefficienten $p_{ki}$ mit Ausnahme von $p_{kk}$, so erscheint eine verschwindende Determinante

$$\begin{vmatrix} p y'_{k1} + p_{kk} y_{k1}, & y_{11} \cdots y_{n1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p y'_{kn} + p_{kk} y_{kn}, & y_{1n} \cdots y_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

in welcher die Colonne $y_{k1} \ldots y_{kn}$ fehlt.

---

* Vergl. Darboux, Comptes Rendus XC, p. 526. Es findet sich daselbst, wie ich nachträglich gesehen habe, die Formel 1) – ohne Beweis – angegeben.

Die letzte Gleichung gestattet auch folgende Schreibweise:

$$p\begin{vmatrix} y_{11} \cdots y'_{k1} \cdots y_{n1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_{1n} \cdots y'_{kn} \cdots y'_{nn} \end{vmatrix} + p_{kk} D = 0,$$

und solcher Gleichungen giebt es $n$; dieselben unterscheiden sich — abgesehen von $p_{kk}$ — insbesondere dadurch, dass der Reihe nach die Elemente der verschiedenen Colonnen differenzirt sind. Addirt man alle diese Gleichungen, so hat man ohne Weiteres

$$p\frac{dD}{dx} + D.\sum_1^n p_{kk} = 0, \quad \text{d. h.} \quad D = ce^{-\int^x \frac{dx}{p}\sum_1^n p_{kk}}.$$

Der durch die letzte Formel ausgedrückte Satz kann als eine Verallgemeinerung des bekannten Abel-Liouville'schen Satzes gelten.

Sehr leicht lässt sich nun auch der zweite Satz verificiren. — Substituirt man nämlich in

$$D_1 = \begin{vmatrix} y'_{11} \cdots y'_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y'_{n1} \cdots y'_{nn} \end{vmatrix}$$

nacheinander die Ausdrücke

b) $$y'_{ki} = -\frac{1}{p}\left[p_{k1}y_{1i} + \cdots + p_{kn}y_{ni}\right], \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

so zerfällt die Determinante $D_1$ in das Product zweier Determinanten, so dass man unmittelbar zu der Formel

$$D_1 = \frac{(-1)^n}{p^n}\begin{vmatrix} p_{11} \cdots p_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_{n1} \cdots p_{nn} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} y_{11} \cdots y_{1n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_{n1} \cdots y_{nn} \end{vmatrix},$$

d. h.

$$D_1 = \frac{(-1)^n}{p^n} P.D$$

gelangt.

Es verdient noch Folgendes bemerkt zu werden.

Ist ein System linearer simultaner Differentialgleichungen höherer Ordnung gegeben, so kann man dasselbe immer durch ein System von entsprechend mehr Gleichungen der ersten Ordnung ersetzen und hierauf die erwähnten Sätze anwenden. In die Determinanten treten alsdann auch die höheren Ableitungen der partikulären Integrale.

So findet man beispielsweise für die Gleichungen

$$\begin{cases} p\dfrac{d^2y}{dx^2} + q_1\dfrac{dy}{dx} + q_2\dfrac{dz}{dx} + q_3 y + q_4 z = 0, \\ p\dfrac{d^2z}{dx^2} + r_1\dfrac{dy}{dx} + r_2\dfrac{dz}{dx} + r_3 y + r_4 z = 0, \end{cases}$$

deren partikuläre Integrale $y_1, z_1, \ldots, y_4, z_4$ sein mögen, Folgendes:

$$D = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 & y'_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ z'_1 & z'_2 & z'_3 & z'_4 \end{vmatrix} = c e^{-\int \frac{q_1 + r_2}{p} dx},$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} y'_1 & y'_2 & y'_3 & y'_4 \\ y''_1 & y''_2 & y''_3 & y''_4 \\ z'_1 & z'_2 & z'_3 & z'_4 \\ z''_1 & z''_2 & z''_3 & z''_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{p^2} \begin{vmatrix} q_3 & q_4 \\ r_3 & r_4 \end{vmatrix} . D.$$

Plauen i. V. WOLDEMAR HEYMANN.

---

## XIX. Berichtigung.

Soeben finde ich bei Durchsicht von Dostor's Éléments de la théorie des Déterminants, Paris 1877, S. 116, dass die von mir in dieser Zeitschrift, Jahrg. 1885 Heft 2 S. 106 als neu gegebene Herleitung der Bézout'schen Resultante bereits von Cauchy herstammt. Dostor nennt die Cauchysche Methode mit Recht „Méthode de Bézout perfectionnée". Es ist nur zu verwundern, warum nicht schon längst in den in Deutschland gebräuchlichen Lehrbüchern der Determinanten diese wesentlich einfachere und genetische Herleitung von Cauchy an Stelle der Bézout'schen Entwickelung getreten ist. Eine Hauptaufgabe für die fortwährende Neuproduction von Lehrbüchern ist es doch, überall das Einfachere und Durchsichtigere an Stelle des Mindereinfachen und Schwulstigen zu setzen.

Stuttgart, 1. August 1885. Prof. Dr. REUSCHLE.

## XVI.

# Ueber die Vertheilung der inducirten Elektricität auf einem unbegrenzten elliptischen Cylinder.

Von

Dr. Rudolf Besser

in Dresden.

(Schluss.)

---

## § 6.

### Entwickelung der reciproken Entfernung zweier Punkte.

Zwei Punkte 0 und 1 seien durch ihre Coordinaten $xtu$, $x_1 t_1 u_1$ gegeben, und zwar sei

$$u > u_1,$$

d. h. der Punkt 1 liege innerhalb des Cylinders $u = Const.$ Denkt man sich den Punkt 1 als fest, so ist die reciproke Entfernung $T$ beider Punkte eine auf der Oberfläche des Cylinders $u = Const.$ allenthalben endliche Function von $x$ und $t$, und kann daher zufolge der Formel 31) folgendermassen in Bezug auf diese Variabeln entwickelt werden:

$$\text{a)} \qquad T = \int_0^\infty dh \sum_0^\infty {}^\nu \{a_\nu(h) \cos hx + b_\nu(h) \sin hx\} \mathfrak{E}_\nu(t, k_\nu, h).$$

Die hierin vorkommenden Constanten hängen ausser von $h$ und $k$ auch von $u$, sowie den Coordinaten $x_1$, $t_1$, $u_1$ des Punktes 1 ab. Da $T$ der Gleichung $\Delta T = 0$ genügt, so haben mit Rücksicht auf S. 262 $a_\nu$ und $b_\nu$, als Functionen von $u$ betrachtet, die Formen:

$$\text{b)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_\nu = \alpha_\nu(h)\, \mathfrak{E}_\nu(iu) + \beta_\nu(h)\, \mathfrak{F}_\nu(iu), \\ b_\nu = \alpha'_\nu(h)\, \mathfrak{E}_\nu(iu) + \beta'_\nu(h)\, \mathfrak{F}_\nu(iu), \end{array} \right.$$

wo jetzt und auch im Folgenden die Parameter $h$ und $k_\nu$ in $\mathfrak{E}_\nu$ und $\mathfrak{F}_\nu$ nicht besonders bezeichnet werden sollen.

$T$ ist in Bezug auf $x$, $x_1$; $u$, $u_1$; $t$, $t_1$ symmetrisch, von seiner Entwickelung gilt demnach das Gleiche; nur in Bezug auf $u$ und $u_1$ hört die Symmetrie auf, da $u > u_1$ sein soll. Die Vertauschung von $u$ und $u_1$ ist

daher nur in der Differentialgleichung $\Delta T = 0$, nicht aber in der fertigen Entwickelung zulässig. Dagegen dürfen auch in der Entwickelung $x$ und $x_1$, $t$ und $t_1$ vertauscht werden.

Gehen wir nun zur Bestimmung der $\alpha$ und $\beta$ über.

Fällt der Punkt 0 unendlich weit oder ist $u = \infty$, so wird $T = 0$. Da aber nach Gleichung 34) für unendliche $u$ $\mathfrak{C}(iu)$ gleichfalls unendlich gross wird, so müssen in den Gleichungen b) die Coefficienten $\alpha_\nu(h)$ und $\alpha'_\nu(h)$ identisch verschwinden. Also:

$$\text{c)} \qquad \alpha_\nu(h) = 0, \quad \alpha'_\nu(h) = 0.$$

Da ferner $T$ nur von $x - x_1$ abhängt [denn es ist

$$E^2 = (x - x_1)^2 + R^2, \quad R^2 = (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2],$$

so dürfen in der Entwickelung $x$ und $x_1$ auch nur in der Verbindung $x - x_1$ enthalten sein; ein Vorkommen des Sinus ist ausgeschlossen, da $E^2$, also auch $T$ eine gerade Function von $x - x_1$ ist. Hieraus folgt:

$$\text{d)} \qquad \beta_\nu(h) = A_\nu(h) \cos h x_1, \quad \beta'_\nu(h) = A_\nu(h) \sin h x_1.$$

Die Constante $A_\nu$ hängt nur noch von $t_1$ und $u_1$ ab. Aus Gründen der Symmetrie schliesst man, dass $t_1$ nur in der Verbindung $\mathfrak{C}_\nu(t_1)$ in $A_\nu$ vorkommen darf, so dass die Annahme:

$$\text{e)} \qquad A_\nu(h, t_1, u_1) = B_\nu(h, u_1) \,.\, \mathfrak{C}_\nu(t_1)$$

berechtigt ist. Wegen der Gleichungen b), c), d), e) erhält die Entwickelung a) die Form:

$$\text{f)} \qquad T = \int_0^\infty dh \cos h(x - x_1) \sum_0^\infty {}^\nu B_\nu(u_1)\, \mathfrak{C}_\nu(t)\, \mathfrak{C}_\nu(t_1)\, \mathfrak{F}_\nu(iu).$$

Zur Ermittelung der hierin noch vorkommenden Function $B_\nu(u_1)$ setze man f) in die Gleichung $\Delta T = 0$ ein, nachdem in derselben $u$ mit $u_1$ vertauscht worden ist, d. h. in die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \frac{h^2 c^2}{2} (\cos 2 i u_1 - \cos 2t) T = 0.$$

Dies giebt:

$$\int_0^\infty dh \cos h(x - x_1) \sum_0^\infty {}^\nu \mathfrak{C}_\nu(t_1)\, \mathfrak{F}_\nu(iu) \left\{ \left[ \frac{d^2 B_\nu}{du_1^2} - \frac{h^2 c^2}{2} \cos 2 i u_1 \,.\, B_\nu \right] \mathfrak{C}_\nu(t) + \left[ \frac{d^2 \mathfrak{C}_\nu}{dt^2} + \frac{h^2 c^2}{2} \cos 2t \,.\, \mathfrak{C}_\nu \right] B_\nu(u_1) \right\} = 0.$$

Wegen der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 \mathfrak{C}_\nu}{dt^2} + \left( \frac{h^2 c^2}{2} \cos 2t + k_\nu^2 \right) \mathfrak{C}_\nu = 0$$

ist aber:

$$\frac{d^2 \mathfrak{C}_\nu}{dt^2} + \frac{h^2 c^2}{2} \cos 2t \,.\, \mathfrak{C}_\nu = -k_\nu^2\, \mathfrak{C}_\nu(t),$$

demnach lautet obige Gleichung:

$$\int_0^\infty dh\cos h(x-x_1)\sum_0^\infty{}^\nu\, \mathfrak{E}_\nu(t)\,\mathfrak{E}_\nu(t_1)\,\mathfrak{F}_\nu(iu)\left\{\frac{d^2B_\nu}{du_1^2}-\left(\frac{h^2c^2}{2}\cos 2iu_1+k_\nu^2\right)B_\nu\right\}=0.$$

Das Integral kann nur verschwinden, wenn die zu integrirende Function verschwindet; da diese eine nach den Functionen $\mathfrak{E}_\nu(t)$ fortschreitende Reihe ist, muss jedes Glied der Reihe einzeln gleich Null sein (s. S. 269). Es ist also:

$$\frac{d^2B_\nu}{du_1^2}-\left(\frac{h^2c^2}{2}\cos 2iu_1+k_\nu^2\right)B_\nu=0,$$

d. h.:

$$B_\nu(u_1)=\gamma_\nu(h)\,\mathfrak{E}_\nu(iu_1)+\delta_\nu(h)\,\mathfrak{F}_\nu(iu_1).$$

Nun lässt sich nachweisen, dass die Function zweiter Art $\mathfrak{F}_\nu(iu_1)$ nicht in $B_\nu(u_1)$ vorkommen darf; wir wollen, um den Gang der Untersuchung nicht unterbrechen zu müssen, diesen Nachweis am Ende des Paragraphen führen. Es ist also $\delta_\nu=0$ zu setzen und es bleibt nur:

$$B_\nu(u_1)=\gamma_\nu(h)\,\mathfrak{E}_\nu(iu_1);$$

substituirt man diesen Werth in die Entwickelung von $t$, so folgt:

$$\text{g)}\quad T=\int_0^\infty dh\cos h(x-x_1)\sum_0^\infty{}^\nu\,\gamma_\nu(h)\,\mathfrak{E}_\nu(t)\,\mathfrak{E}_\nu(t_1)\,\mathfrak{F}_\nu(iu)\,\mathfrak{E}_\nu(iu_1),\qquad u>u_1.$$

Darin bedeutet $\gamma$ eine nur noch von $h$ abhängende Constante. Zu deren Bestimmung beachte man, dass die Formel g) für $c=0$ in die Entwickelungsformel der reciproken Entfernung zweier Punkte in gewöhnlichen Cylindercoordinaten übergehen muss, während die Constante $\gamma_\nu$ bei dieser Specialisirung ihren Werth nicht ändert. Nach S. 272 verwandelt sich nun für $c=0$ das Product:

$$\mathfrak{E}_\nu(t)\,\mathfrak{E}_\nu(t_1)\,\mathfrak{F}_\nu(iu)\,\mathfrak{E}_\nu(iu_1)$$

in:

$$\frac{\varepsilon_k}{2}J_k(hir_1)\,Y_k(hir)\cos k(\varphi-\varphi_1),$$

so dass:

$$T=\tfrac{1}{2}\int_0^\infty dh\cos h(x-x_1)\sum_0^\infty{}^k\,\gamma_k(h)\,\varepsilon_k\,.\,J_k(hir_1)\,Y_k(hir)\cos k(\varphi-\varphi_1),\qquad r>r_1$$

wird. Die Formel aber, welche die Entwickelung der reciproken Entfernung zweier Punkte in Cylindercoordinaten giebt, lautet:*

$$\text{h)}\quad T=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty dh\cos h(x-x_1)\sum_0^\infty{}^k\,\varepsilon_k\,J_k(hir_1)\,Y_k(hir)\cos k(\varphi-\varphi_1),\qquad r>r_1$$

und durch Vergleich der Formeln g) und h) erkennt man, dass:

$$\gamma_\nu(h)=\frac{4}{\pi}$$

sein muss. Setzt man endlich diesen Werth von $\gamma_\nu(h)$ in die Gleichung g) so erhält man als Ergebniss dieser Erörterungen:

* S. Heine, Kugelfunctionen, II. Bd. S. 174, Gl. 17).

Die reciproke Entfernung zweier durch ihre cylindrischen Coordinaten $xtu$, $x_1 t_1 u_1$ gegebener Punkte hat den Werth:

$$36\text{a)}\quad T = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty dh\, cosh(x-x_1)\sum_0^\infty{}^\nu\, \mathfrak{E}_\nu(t)\,\mathfrak{E}_\nu(t_1)\,\mathfrak{F}_\nu(iu)\,\mathfrak{E}_\nu(iu_1),\quad u > u_1.$$

Ist $u < u_1$, so lautet die Entwickelung:

$$36\text{b)}\quad T = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty dh\, cosh(x-x_1)\sum_0^\infty{}^\nu\, \mathfrak{E}_\nu(t)\,\mathfrak{E}_\nu(t_1)\,\mathfrak{E}_\nu(iu)\,\mathfrak{F}_\nu(iu_1),\quad u < u_1.$$

Wir haben nun noch den Nachweis zu führen, dass die Function zweiter Art $\mathfrak{F}_\nu(iu_1)$ in der Entwickelung von $T$ nicht vorkommen darf. Beim Kreiscylinder ergiebt sich dies sofort daraus, dass die Cylinderfunction zweiter Art $Y_k(hir_1)$ für $r_1 = 0$ unendlich wird. Hier scheint ein ähnlich einfacher Umstand nicht vorzuliegen. Wir wenden deshalb zum Beweise der Richtigkeit unseres Ansatzes ein Verfahren an, das wir Herrn F. Neumann verdanken.*

Es muss nämlich nicht blos $T$, sondern auch jeder Differentialquotient von $T$, nach irgend einer Richtung genommen, endlich sein. Denken wir uns also den Punkt 1 beweglich und differenziren $T$ nach der Normale $ds_{u_1}$ auf dem Cylinder $u_1$, so muss $\frac{dT}{ds_{u_1}}$ endlich sein, wo auch der Punkt 1 liege. Käme nun $\mathfrak{F}_\nu(iu_1)$ in der Entwickelung von $T$ vor, so enthielte $\frac{dT}{ds_{u_1}}$ den Differentialquotienten:

$$\frac{d\mathfrak{F}_\nu(iu_1)}{ds_{u_1}}$$

oder, für $ds_{u_1}$ seinen Werth $\sqrt{\psi_1}\, du_1$ gesetzt, wo:

$$\psi_1 = \frac{c^2}{2}(cos\, 2iu_1 - cos\, 2t_1)\quad [\text{S. 261 Nr. 13)}],$$

den Differentialquotienten:

$$\frac{d\mathfrak{F}_\nu(iu_1)}{du_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{\psi_1}}.$$

Nun ist:

$$\mathfrak{F}_\nu(iu_1) = \mathfrak{E}_\nu(iu_1)\int_{u_1}^\infty \frac{du_1}{[\mathfrak{E}_\nu(iu_1)]^2}\quad [\text{S. 271 Nr. 33)}],$$

also:

$$\frac{d\mathfrak{F}_\nu(iu_1)}{du_1} = \frac{d\mathfrak{E}_\nu(iu_1)}{du_1}\int_{u_1}^\infty \frac{du_1}{[\mathfrak{E}_\nu(iu_1)]^2} - \frac{1}{\mathfrak{E}_\nu(iu_1)},$$

daher weiter:

---

* Crelle's Journal Bd. 37: „Entwickelung der in elliptischen Coordinaten ausgedrückten reciproken Entfernung zweier Punkte", S. 21—50.

$$\frac{d\mathfrak{F}_\nu(iu_1)}{ds_{u_1}} = \frac{1}{\sqrt{\psi_1}} \cdot \frac{d\mathfrak{E}_\nu(iu_1)}{du_1} \int_{u_1}^{\infty} \frac{du_1}{[\mathfrak{E}_\nu(iu_1)]^2} - \frac{1}{\sqrt{\psi_1}} \cdot \frac{1}{\mathfrak{E}_\nu(iu_1)}.$$

Setzt man nun zuerst $t_1 = 0$, verlegt also den Punkt 1 auf das rechts von dem einen Brennpunkte gelegene Stück der grossen Axe der Directrix, so wird:

$$\psi_1 = \frac{c^2}{2}(\cos 2iu_1 - 1) = -c^2 \sin^2 iu_1,$$

also ist:

$$\sqrt{\psi_1} = ic \sin iu_1$$

und dann ist im Minuenden obiger Differenz $\frac{d\mathfrak{E}_\nu(iu_1)}{du_1}$ stets durch $\sqrt{\psi_1}$ theilbar. Denn für $t_1 = 0$ verschwinden laut den Gleichungen 24), S. 266, die $\mathfrak{E}_\nu(t_1)$ der dritten und vierten Classe, mithin enthält die Entwickelung von $T$ nur noch Functionen erster und zweiter Classe. Die Gleichungen 22), S. 265, zeigen nun, dass der Differentialquotient $\frac{d\mathfrak{E}_\nu(iu_1)}{du_1}$ für Functionen erster und zweiter Classe eine nach den Sinus der Vielfachen von $iu_1$ fortschreitende Reihe ist, und daraus folgt die Richtigkeit unserer Behauptung. Setzt man nun noch:

$$u_1 = 0,$$

d. h. verlegt den Punkt 1 in den Brennpunkt der Directrix selbst, so wird $\sqrt{\psi_1} = 0$, also wird der Subtrahend obiger Differenz, mithin auch $\frac{d\mathfrak{F}_\nu(iu_1)}{ds_{u_1}}$ unendlich gross. Der Minuend bleibt endlich, da $\sqrt{\psi_1}$ nach dem Vorigen durch Division entfernt worden ist.

Somit würde $\frac{dT}{ds_{u_1}}$ unendlich werden, wenn der Ausdruck für $T$ die Functionen zweiter Art $\mathfrak{F}_\nu(iu_1)$ enthielte, und zwar, wenn der Punkt 1 in den Brennpunkt der Basisellipse fällt. Demnach darf $\mathfrak{F}_\nu(iu_1)$ in dem Ausdrucke für $T$ nicht vorkommen.

## § 7.

### Bestimmung des Potentials einer auf der Fläche des elliptischen Cylinders ausgebreiteten Massenbelegung.

Der elliptische Cylinder $u$ sei mit Masse von der Dichte $q_\sigma$ belegt. Diese Belegung erzeugt in einem beliebigen Punkte 1 $(x_1 t_1 u_1)$ das Potential:

$$V_1 = \int q_\sigma T_{1\sigma} d\sigma$$

oder, für das Flächenelement $d\sigma$ seinen Werth $\sqrt{\psi}\, dx\, dt$ gesetzt:

$$V_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_0^{2\pi} dt \sqrt{\psi}\, q_\sigma T_{1\sigma}. \tag{37}$$

Zur Vereinfachung dieses Ausdruckes machen wir für die Function $\sqrt{\psi}.q_\sigma$ nach der Gleichung 31), S. 269, folgenden Ansatz:

$$38)\qquad \sqrt{\psi}.q_\sigma = \int_0^\infty dh \sum_0^\infty{}^\nu (\alpha_\nu(h)\cos hx + \beta_\nu(h)\sin hx)\,\mathfrak{C}_\nu(t),$$

wo die Coefficienten $\alpha_\nu$ und $\beta_\nu$ auf bekannte Weise aus $q$ gefunden werden können. Es sei hier daran erinnert, dass dieser Ansatz nur dann brauchbar ist, wenn $q_\sigma$ ausser gewissen Eigenschaften bezüglich der Endlichkeit und Stetigkeit auch noch die besitzt, dass:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} q(x)\,dx$$

endlich ist, so dass z. B. die folgenden Betrachtungen sich nicht mehr anwenden lassen, wenn $q$ von $x$ unabhängig ist.

Setzen wir dann für $T_{1\sigma}$ seinen Werth aus 36a) in 37) ein, wobei wir den Punkt 1 als innerhalb des Cylinders gelegen ansehen, und ihn deshalb durch $j(x_j t_j u_j)$ bezeichnen wollen, so folgt:

$$V_j = \frac{4}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_0^{2\pi} dt.\left\{\int_0^\infty dh \sum_0^\infty{}^\nu (\alpha_\nu(h)\cos hx + \beta_\nu(h)\sin hx)\,\mathfrak{C}_\nu(t)\right\}$$
$$\times\left\{\int_0^\infty dh \cosh(x-x_j)\sum_0^\infty{}^\nu \mathfrak{C}_\nu(t)\,\mathfrak{C}_\nu(t_j)\,\mathfrak{F}_\nu(iu)\,\mathfrak{C}_\nu(iu_j)\right\}.$$

Das nach $x$ zu nehmende Integral lässt sich mit Hilfe einer von Herrn Professor C. Neumann angegebenen Integralformel ausführen, der Formel nämlich:

$$a)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_0^h A(h)\cos hx\,dh \int_0^h B(h)\cos hx\,dx = \pi\int_0^\infty A(h)\,B(h)\,dh,$$

welche auch noch gilt, wenn links statt $\cos hx$ $\sin hx$ steht, wogegen die rechte Seite Null ist, wenn links verschiedene Functionen in den nach $h$ zu nehmenden Integralen stehen. — Denkt man sich nämlich den $\cos h(x-x_j)$ aufgelöst, so zerfällt $V_j$ in vier Theile, von denen zwei verschwinden, während der Werth der beiden anderen nach a) angegeben werden kann.

In dem verbleibenden Doppelintegral lässt sich die Integration nach $t$ mit Benutzung der Integralformeln 28) und 28a), S. 267 und 268, erledigen, so dass man als Endresultat findet:

$$39)\quad V_j = 4\pi\int_0^\infty dh \sum_0^\infty{}^\nu (\alpha_\nu(h)\cos hx_j + \beta_\nu(h)\sin hx_j)\,\mathfrak{C}_\nu(t_j)\,\mathfrak{C}_\nu(iu_j)\,\mathfrak{F}_\nu(iu).$$

Diese Formel giebt das Potential der Belegung $q$ auf einen beliebigen innern Punkt des Cylinders an.

Liegt nun zweitens der Punkt 1 ausserhalb des Cylinders, in $a\,(x_a t_a u_a)$, bedeutet $V_a$ das auf ihn ausgeübte Potential, so liefert dieselbe Rechnung sogleich:

$$40)\quad V_a = 4\pi \int_0^\infty dh \sum_0^\infty{}^{\nu} (\alpha_\nu(h) \cos h x_a + \beta_\nu(h) \sin h x_a)\; \mathfrak{C}_\nu(t_a)\, \mathfrak{F}_\nu(iu_a)\, \mathfrak{C}_\nu(iu).$$

Die Formeln 39) und 40) unterscheiden sich nur durch die Vertauschung von $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{F}$. Fällt der Punkt 1 auf die Fläche des Cylinders, so werden die Gleichungen 39) und 40) identisch. Wir haben also:

Denkt man sich einen elliptischen Cylinder mit Masse von der beliebigen Dichte $q$ belegt, so besitzt das Potential der Belegung auf innere und äussere Punkte die durch 39) und 40) ausgedrückten Werthe. Darin bedeuten $\alpha_\nu(h)$, $\beta_\nu(h)$ gewisse, bei der Entwickelung von $\sqrt{\psi}.q_\sigma$ auftretende Constanten, welche sich durch Integrale ausdrücken.

An den Formeln 39) und 40) lässt sich auch die bekannte Laplace-sche Relation:

$$-4\pi q_\sigma = \frac{\partial V_a}{\partial n_a} + \frac{\partial V_j}{\partial n_j}$$

verificiren. In der That erhält man durch Ausführung der Differentiation, wobei die Werthe:

$$dn_a = \sqrt{\psi_a}.du_a, \quad dn_j = -\sqrt{\psi_j}.du_j,$$

sowie die Gleichung 32):

$$\mathfrak{F}_\nu(iu)\frac{d\,\mathfrak{C}_\nu(iu)}{du} - \mathfrak{C}_\nu(iu)\frac{d\,\mathfrak{F}_\nu(iu)}{du} = 1$$

zu benutzen sind, sofort den Werth $-4\pi q_\sigma$ für $\frac{\partial V_a}{\partial n_a} + \frac{\partial V_j}{\partial n_j}$.

Jene Laplace'sche Gleichung giebt aber auch den Grund an für die auf S. 268 getroffene Wahl des Werthes $\pi$ für das Integral $\int_0^{2\pi} [\mathfrak{C}_\nu(t)]^2\,dt$. Bezeichnet man wieder mit $\Gamma$ und $\gamma_\nu$ die bei der Entwickelung der Function zweiter Art $\mathfrak{F}_\nu$ und der der reciproken Entfernung $T$ auftretenden Constanten (s. S. 270 u. 307), und setzt jenes Integral $= c_\nu$, berechnet dann die Potentiale $V_a$ und $V_j$, so erhält man durch die Laplace'sche Gleichung folgende Beziehung zwischen den drei Constanten $\Gamma$, $c_\nu$ und $\gamma_\nu$:

$$\Gamma . c_\nu . \gamma_\nu = 4.$$

Da nun:

$$\Gamma = 1, \quad \gamma_\nu = \frac{4}{\pi}$$

gefunden wurde, so muss:

$$c_\nu = \pi$$

sein. Denselben Werth giebt auch Heine, ohne weitere Ableitung (Kugelfunct., II. Bd. S. 204).

## § 8.

### Bestimmung der Potentiale $V_a$ und $V_j$ aus den gegebenen Potentialwerthen $V_\sigma$ an der Mantelfläche des Cylinders.

Wir lösen jetzt die zweite der auf S. 257 angegebenen Hauptaufgaben: Beliebig gegebene Massen erzeugen auf dem Mantel eines elliptischen Cylinders vorgeschriebene Potentialwerthe $V_\sigma$; man soll die Potentiale $V_a$ und $V_j$ für äussere und innere Punkte ermitteln.

Den gegebenen Oberflächenwerth $V_\sigma = f_\sigma$ können wir in die Form:

$$41) \qquad V_\sigma = f_\sigma = \int_0^\infty dh \sum_0^\infty{}^\nu \left[A_\nu(h).\cos hx + B_\nu(h).\sin hx\right] \mathfrak{E}_\nu(t)$$

uns gebracht denken, welche indess erfordert, dass $\int_{-\infty}^{+\infty} V(x)\,dx$ endlich, also z. B. $V$ von $x$ nicht unabhängig sei. Die folgenden Erörterungen sind also auf den Fall $V_\sigma = Const.$ nicht anwendbar.

Das gesuchte Potential $V$ wird, als Function von $x$ und $t$ betrachtet, durch einen ähnlichen Ausdruck, etwa:

$$42) \qquad V = \int_0^\infty dh \sum_0^\infty{}^\nu \left[\mathfrak{A}_\nu(h).\cos hx + \mathfrak{B}_\nu(h).\sin hx\right] \mathfrak{E}_\nu(t)$$

dargestellt. Hierin sind nun die Constanten $\mathfrak{A}_\nu$ und $\mathfrak{B}_\nu$ so zu bestimmen, dass 1. $V$ der Gleichung $\Delta V = 0$ genügt, 2. $V_\sigma$ den gegebenen Werth 41) annimmt.

Die Coefficienten $\mathfrak{A}_\nu$ und $\mathfrak{B}_\nu$ hängen von $u$ ab. Damit $\Delta V = 0$ sei, muss, wie aus früheren Betrachtungen folgt:

$$\mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{a}_\nu\, \mathfrak{E}_\nu(iu) + \mathfrak{a}'_\nu\, \mathfrak{F}_\nu(iu),$$
$$\mathfrak{B}_\nu = \mathfrak{b}_\nu\, \mathfrak{E}_\nu(iu) + \mathfrak{b}'_\nu\, \mathfrak{F}_\nu(iu)$$

sein. — Ist nun 1. der Punkt, für den $V$ zu bestimmen ist, ein äusserer, $a\,(x_a u_a t_a)$, so darf in obigen Ausdrücken $\mathfrak{E}_\nu(iu_a)$ nicht vorkommen, da für unendliche $u_a$ diese Function unendlich gross wird, während $V$ endlich bleiben muss. Also ist $\mathfrak{a}_\nu$ und $\mathfrak{b}_\nu = 0$ zu setzen, und man findet als allgemeinen Ausdruck eines äusseren Potentials:

$$43\text{a}) \qquad V_a = \int_0^\infty dh \sum_0^\infty{}^\nu \left(\mathfrak{a}'_\nu \cos hx_a + \mathfrak{b}'_\nu \sin hx_a\right) \mathfrak{F}_\nu(iu_a)\, \mathfrak{E}_\nu(t_a).$$

Befindet sich 2. der angezogene Punkt im Innern des Cylinders, in $j(x_j u_j t_j)$, so darf in den Ausdrücken für $\mathfrak{A}_\nu$ und $\mathfrak{B}_\nu$ $\mathfrak{F}_\nu(iu_j)$ nicht vorkommen, weil sonst $\frac{dV_j}{du_j}$ nicht für alle inneren Punkte endlich bliebe.* Der allgemeine Ausdruck eines Potentials für innere Punkte ist daher:

$$43\text{b)}\quad V_j = \int_0^\infty dh \sum_0^\infty {}^\nu (\mathfrak{a}_\nu \cosh x_j + \mathfrak{b}_\nu \sinh x_j)\, \mathfrak{C}_\nu(iu_j)\, \mathfrak{C}_\nu(t_j).$$

Nun soll für:

$$u_a = u,\quad x_a = x,\quad t_a = t,\quad \text{resp.}\quad u_j = u,\quad x_j = x,\quad t_j = t$$

(wenn wir Punkte auf dem Cylindermantel ohne Index bezeichnen) $V_a$ bez. $V_j$ in $V_\sigma = f_\sigma$ übergehen. Dies geschieht, wenn:

$$\mathfrak{a}'_\nu = \frac{A_\nu}{\mathfrak{F}_\nu(iu)},\quad \mathfrak{b}'_\nu = \frac{B_\nu}{\mathfrak{F}_\nu(iu)},$$
$$\mathfrak{a}_\nu = \frac{A_\nu}{\mathfrak{C}_\nu(iu)},\quad \mathfrak{b}_\nu = \frac{B_\nu}{\mathfrak{C}_\nu(iu)}$$

gesetzt wird.

Es ergiebt sich dann:

$$44\text{a)}\quad V_a = \int_0^\infty dh \sum_0^\infty {}^\nu (A_\nu \cosh x_a + B_\nu \sinh x_a) \frac{\mathfrak{F}_\nu(iu_a)}{\mathfrak{F}_\nu(iu)}\, \mathfrak{C}_\nu(t_a),$$

$$44\text{b)}\quad V_j = \int_0^\infty dh \sum_0^\infty {}^\nu (A_\nu \cosh x_j + B_\nu \sinh x_j) \frac{\mathfrak{C}_\nu(iu_j)}{\mathfrak{C}_\nu(iu)}\, \mathfrak{C}_\nu(t_j).$$

Diese Formeln lösen die Aufgabe.

Man kann dieselben auch in der Form:

$$45\text{a)}\quad V_a = \frac{1}{\pi^2} \int \frac{d\sigma}{\sqrt{\psi}} f_\sigma \int_0^\infty dh \cosh(x - x_a) \sum_0^\infty {}^\nu \left\{ \mathfrak{C}_\nu(t)\, \mathfrak{C}_\nu(t_a) \frac{\mathfrak{F}_\nu(iu_a)}{\mathfrak{F}_\nu(iu)} \right\},$$

$$45\text{b)}\quad V_j = \frac{1}{\pi^2} \int \frac{d\sigma}{\sqrt{\psi}} f_\sigma \int_0^\infty dh \cosh(x - x_j) \sum_0^\infty {}^\nu \left\{ \mathfrak{C}_\nu(t)\, \mathfrak{C}_\nu(t_j) \frac{\mathfrak{C}_\nu(iu_j)}{\mathfrak{C}_\nu(iu)} \right\}$$

darstellen und drückt damit $V_a$ bez. $V_j$ direct durch $f_\sigma$, nicht durch die Entwickelungscoefficienten von $f_\sigma$ aus. Die Integration $d\sigma$ bezieht sich auf den ganzen Cylindermantel.

Liegen nun die Massen auf der Oberfläche des Cylinders selbst, so lässt sich ihre Dichte $q_\sigma$ an der Stelle $x, t$ durch die Gleichung:

* Vergl. den Beweis am Ende des § 6.

$$-4\pi q_\sigma = \frac{\partial V_a}{\partial n_a} + \frac{\partial V_j}{\partial n_j}$$

bestimmen. Die Ausführung der Rechnung giebt:

$$46)\quad q_\sigma = \frac{1}{4\pi\sqrt{\psi}}\int_0^\infty dh \sum_0^\infty{}^\nu (A_\nu \cos hx + B_\nu \sin hx)\frac{\mathfrak{C}_\nu(t)}{\mathfrak{C}_\nu(iu)\,\mathfrak{F}_\nu(iu)},$$

d. h.: Massen, welche auf der Oberfläche eines elliptischen Cylinders ein vorgeschriebenes Potential $f_\sigma$ erzeugen, können durch eine Flächenbelegung, deren Dichtigkeit $q_\sigma$ durch 46) angegeben wird, ersetzt werden.

Löst man mit dem jetzt gefundenen Werthe von $q_\sigma$ [46)] die im vorigen Paragraphen behandelte Aufgabe, so müssen die dort gefundenen Resultate wieder erscheinen.

Der Vergleich von 38) und 46) zeigt, dass man in 38)

$$\alpha_\nu = \frac{A_\nu}{4\pi\,\mathfrak{C}_\nu(iu)\,\mathfrak{F}_\nu(iu)},\quad \beta_\nu = \frac{B_\nu}{4\pi\,\mathfrak{C}_\nu(iu)\,\mathfrak{F}_\nu(iu)}$$

zu setzen habe, um 46) zu erhalten. Giebt man aber in 39) und 40) den $\alpha$ und $\beta$ diese Werthe, so erhält man genau die Gleichungen 44a) und 44b).

Natürlich lässt sich auch die im vorigen Paragraphen behandelte Aufgabe auf die jetzt gelöste zurückführen; und es verdient das in diesem Paragraphen eingeschlagene Verfahren einen Vorzug schon deshalb, weil dabei von der Entwickelung von $T$, sowie von der Integralformel a), S. 310, kein Gebrauch gemacht wird. Man würde auf diese Weise direct zu jener Integralformel hingeführt werden, welche Herr C. Neumann auf einem wesentlich andern Wege abgeleitet hat.

## § 9.

### Bestimmung der Green'schen Function und Green'schen Belegung eines elliptischen Cylinders.

Wir wenden die in den beiden vorigen Paragraphen gewonnenen Resultate zur Ermittelung der Green'schen Function und Belegung eines elliptischen Cylinders an und verstehen dabei, nach Herrn C. Neumann, unter der Green'schen Belegung einer Fläche diejenige Belegung, deren Potential für $\left.\begin{matrix}\text{äussere}\\ \text{innere}\end{matrix}\right\}$ Punkte gleich ist dem Potential eines $\left.\begin{matrix}\text{innerhalb}\\ \text{ausserhalb}\end{matrix}\right\}$ der Fläche gelegenen Punktes, des sogenannten Centralpunktes, der je nach seiner Lage durch $\iota$, $\alpha$ bezeichnet werden möge. Die Green'sche Belegung für einen äusseren Centralpunkt $\alpha$ wird demnach durch die Gleichung

a) $$V_j = T_{aj},$$
und für einen inneren $\iota$ durch
b) $$V_a = T_{\iota a}$$
definirt; $j$ und $a$ sind dabei beliebige innere bez. äussere Punkte. Die Gleichungen a) und b) gelten noch, wenn $j$ bez. $a$ auf die Fläche selbst fällt.

Die Green'sche Function ist das Potential der gefundenen Belegung für Punkte, die mit dem Centralpunkte gleichartig liegen. Sie werde durch $G_{\iota j}$ bez. $G_{\alpha a}$ bezeichnet. Sie ist symmetrisch in Bezug auf $\iota$ und $j$, $\alpha$ und $a$.

Die Ermittelung der Green'schen Belegung, wobei für's Erste der Centralpunkt ein äusserer Punkt $\alpha\,(x_\alpha t_\alpha u_\alpha)$ sei, lässt sich auf doppelte Weise vornehmen. Man kann erstens die in § 7 gelöste Aufgabe anwenden, indem man die Constanten $\alpha_\nu$ und $\beta_\nu$ in der Gleichung 38) so specialisirt, dass der für diese Belegung sich ergebende Potentialwerth 39) identisch mit $T_{\alpha j}$ wird, wie a) es vorschreibt.

Da
$$T_{\alpha j} = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty dh\,\cos h(x_j - x_\alpha)\sum_0^\infty{}^{\nu}\,\mathfrak{E}_\nu(t_\alpha)\,\mathfrak{E}_\nu(t_j)\,\mathfrak{F}_\nu(iu_\alpha)\,\mathfrak{E}_\nu(iu_j),$$
so liefert die Bedingung
$$V_j = T_{\alpha j}$$
sogleich:
$$\alpha_\nu = \frac{1}{\pi^2}\cos h x_\alpha \frac{\mathfrak{E}_\nu(t_\alpha)\,\mathfrak{F}_\nu(iu_\alpha)}{\mathfrak{F}_\nu(iu)},\qquad \beta_\nu = \frac{1}{\pi^2}\sin h x_\alpha \frac{\mathfrak{E}_\nu(t_\alpha)\,\mathfrak{F}_\nu(iu_\alpha)}{\mathfrak{F}_\nu(iu)},$$
und die Substitution dieser Werthe in die Gleichung 38) giebt dann für die gesuchte Belegung $\eta_\alpha$ den Ausdruck:

47) $$\eta_\alpha = \frac{1}{\pi^2\sqrt{\psi}}\int_0^\infty dh\,\cos h\,(x - x_\alpha)\sum_0^\infty{}^{\nu}\,\frac{\mathfrak{E}_\nu(t_\alpha)\,\mathfrak{F}_\nu(iu_\alpha)}{\mathfrak{F}_\nu(iu)}\,\mathfrak{E}_\nu(t).$$

Und setzt man dieselben Ausdrücke für $\alpha_\nu$ und $\beta_\nu$ in die Gleichung 40), welche das Potential der durch 38) dargestellten Belegung auf einen äusseren Punkt darstellt, so ergiebt sich:

48) $$G_{a\alpha} = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty dh\,\cos h(x_a - x_\alpha)\sum_0^\infty{}^{\nu}\,\mathfrak{E}_\nu(t_\alpha)\,\mathfrak{E}_\nu(t_a)\,\mathfrak{F}_\nu(iu_a)\,\mathfrak{F}_\nu(iu_\alpha)\frac{\mathfrak{E}_\nu(iu)}{\mathfrak{F}_\nu(iu)}.$$

Man erkennt die Symmetrie in Bezug auf $a$ und $\alpha$.

Eine zweite Methode zur Bestimmung von $\eta_\alpha$ und $G_{a\alpha}$ besteht in der Anwendung der Resultate des § 8, indem man die dort gegebene Function $f_\sigma = T_{\sigma\alpha}$ annimmt, daraus die Constanten $A_\nu$ und $B_\nu$ bestimmt und endlich durch Substitution der erhaltenen Werthe in 46), sowie 44a) die Ausdrücke für $\eta_\alpha$ und $G_{a\alpha}$ aufstellt. — Für $A_\nu$ und $B_\nu$ ergeben sich unmittelbar die Werthe:

$$A_\nu = \frac{4}{\pi} \cos h x_a\, \mathfrak{E}_\nu(t_a)\, \mathfrak{E}_\nu(iu)\, \mathfrak{F}_\nu(iu_a),$$

$$B_\nu = \frac{4}{\pi} \sin h x_a\, \mathfrak{E}_\nu(t_a)\, \mathfrak{E}_\nu(iu)\, \mathfrak{F}_\nu(iu_a);$$

verfährt man mit diesen, wie angegeben, so erhält man 47) und 48) wieder.

Ganz ebenso ergiebt sich für einen inneren Centralpunkt $\iota$ als Green-sche Belegung $\eta_\iota$:

$$49)\qquad \eta_\iota = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{\psi}} \int_0^\infty dh \cos h(x - x_\iota) \sum_0^\infty{}^\nu \frac{\mathfrak{E}_\nu(t_\iota)\, \mathfrak{E}_\nu(iu_\iota)}{\mathfrak{E}_\nu(iu)}\, \mathfrak{E}_\nu(t),$$

und als Green'sche Function:

$$50)\ G_{\iota j} = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty dh \cos h(x_j - x_\iota) \sum_0^\infty{}^\nu \mathfrak{E}_\nu(t_\iota)\, \mathfrak{E}_\nu(t_j)\, \mathfrak{E}_\nu(iu_\iota)\, \mathfrak{E}_\nu(iu_j) \frac{\mathfrak{F}_\nu(iu)}{\mathfrak{E}_\nu(iu)}.$$

## § 10.

### Bestimmung der Massen der in den §§ 7 und 9 betrachteten Belegungen.

In § 7 lösten wir die Aufgabe: das Potential einer durch ihre Dichtigkeit $q$ gegebenen Massenbelegung des elliptischen Cylinders für äussere und innere Punkte desselben aufzusuchen. Jetzt soll die Gesammtmasse $M$ dieser Belegung bestimmt werden. Die erhaltene allgemeine Formel wenden wir dann auf die im vorigen Paragraphen betrachtete Green'sche Belegung an.

Es ist

$$M = \int^{s} q\, d\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_0^{2\pi} dt \sqrt{\psi} . q.$$

Für $q$ wurde in 38), S. 310, der Ansatz:

$$q \sqrt{\psi} = \int_0^\infty dh [A(h) \cos h x + B(h) \sin h x],$$

worin:

$$A(h) = \sum_0^\infty{}^\nu \alpha_\nu(h)\, \mathfrak{E}_\nu(t), \quad B(h) = \sum_0^\infty{}^\nu \beta_\nu(h)\, \mathfrak{E}_\nu(t)$$

waren, gemacht. Damit ergiebt sich:

$$51)\qquad M = \int_0^{2\pi} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_0^\infty dh [A(h) \cos h x + B(h) \sin h x].$$

Die Functionen $A(h, t)$ und $B(h, t)$ drücken sich in bekannter Weise durch die gegebene Function $q$ aus; sie sind als endlich und stetig im ganzen Werthbereich von $h$ und $t$ anzusehen.

In 51) wird nun die Integration nach $x$ und $h$ durch eine von Herrn C. Neumann in seinem schon mehrfach citirten Werke: „Ueber die nach Kreis-, Kugel- und Cylinderfunctionen fortschreitenden Entwickelungen etc.“ angegebene Integralformel ermöglicht. Dieselbe lautet:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\gamma dh \cos hx\, F(h) = \frac{\pi}{2} F(+0).\text{*}$$

Darin bedeutet $\gamma$ eine ganze positive Constante, $F(h)$ eine im Intervalle $h = 0 \ldots \gamma$ abtheilungsweise stetige und abtheilungsweise monotone Function von $h$. Nehmen wir in obiger Gleichung das Integral nach $x$ zwischen $-\infty$ und $+\infty$, so ergiebt sich:

$$\text{a)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_0^\gamma dh \cos hx\, F(h) = \pi F(+0).$$

Dagegen ist evident, dass:

$$\text{b)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_0^\gamma dh \sin hx\, F(h) = 0$$

ist. Diese beiden Formeln dürfen auf 51) angewandt werden, und zwar darf man $\gamma = \infty$ setzen, da, wie schon bemerkt wurde, $A(h)$ und $B(h)$ Functionen von $h$ sind, welche die geforderten Eigenschaften besitzen. Man erhält:

$$M = \pi \int_0^{2\pi} dt \,.\, A(0).$$

Nun ist:

$$A(h, t) = \sum_0^\infty {}^{\nu}\, a_\nu(h)\, \mathfrak{E}_\nu(t, h, k_\nu),$$

also:

$$A(0, t) = \sum_0^\infty {}^{\nu}\, a_\nu(0)\, \mathfrak{E}_\nu(t, 0, k_\nu).$$

Wie aber S. 271 gezeigt wurde, nehmen für $h = 0$ die Functionen $\mathfrak{E}_\nu(t)$ die Werthe $\sin kt$, $\cos kt$ an, die Constanten $k_\nu$ gehen in die natürlichen Zahlen 0, 1, 2, ... über und für $k = 0$ erhält die Function $\mathfrak{E}(t)$ den Werth

---

* s. l. c. Gleich. C), S. 80; es ist $q$ durch $h$ ersetzt worden.

$\frac{\sqrt{2}}{2}$. Dann lässt sich die Integration nach $t$ ausführen und giebt das Resultat:

52) $$M = \sqrt{2} . \pi^2 . \alpha_0(0).$$

Machen wir eine Anwendung von dieser Formel zur Bestimmung der Masse der Green'schen Belegung.

Nach Gleichung 49) ist für einen inneren Centralpunkt $\iota$:

$$\eta_\iota \sqrt{\psi} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty dh \cos h(x - x_\iota) \sum_0^\infty{}_\nu \frac{\mathfrak{E}_\nu(t_\iota)\, \mathfrak{E}_\nu(iu_\iota)}{\mathfrak{E}_\nu(iu)}\, \mathfrak{E}_\nu(t),$$

also, mit Beibehaltung unserer Bezeichnungen:

$$A(h, t) = \frac{1}{\pi^2} \cos h x_\iota \sum_0^\infty{}_\nu \frac{\mathfrak{E}_\nu(t_\iota)\, \mathfrak{E}_\nu(iu_\iota)}{\mathfrak{E}_\nu(iu)}\, \mathfrak{E}_\nu(t)$$

und weiter:

$$\alpha_\nu(h) = \frac{1}{\pi^2} \cos h x_\iota \frac{\mathfrak{E}_\nu(t_\iota)\, \mathfrak{E}_\nu(iu_\iota)}{\mathfrak{E}_\nu(iu)}.$$

Hieraus folgt:

$$\alpha_0(0) = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

und nach 52):

$$M_\iota = 1,$$

so dass ein für beliebige geschlossene Flächen geltender Satz auch auf die hier vorliegende ungeschlossene Fläche Anwendung findet.

Die Masse der auf einen äusseren Centralpunkt $\alpha$ sich beziehenden Green'schen Belegung lässt sich ebenso leicht bestimmen.

Nach Gleichung 47) war:

$$\eta_\alpha \sqrt{\psi} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty dh \cos h(x - x_\alpha) \sum_0^\infty{}_\nu \frac{\mathfrak{E}_\nu(t_\alpha)\, \mathfrak{F}_\nu(iu_\alpha)}{\mathfrak{F}_\nu(iu)}\, \mathfrak{E}_\nu(t).$$

Es ist also hier:

$$\alpha_\nu(h) = \frac{1}{\pi^2} \cos h x_\alpha \frac{\mathfrak{E}_\nu(t_\alpha)\, \mathfrak{F}_\nu(iu_\alpha)}{\mathfrak{F}_\nu(iu)}.$$

Für $h = 0$, $\nu = 0$ verwandelt sich:

$$\frac{\mathfrak{F}_\nu(iu_\alpha)}{\mathfrak{F}_\nu(iu)} \text{ in } \frac{u_\alpha}{u}, \quad \mathfrak{E}_\nu(t_\alpha) \text{ in } \frac{\sqrt{2}}{2},$$

also wird:

$$\alpha_0(0) = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{u_\alpha}{u} \quad \text{und} \quad M_\alpha = \frac{u_\alpha}{u}.$$

Hierin liegt das bemerkenswerthe Resultat, dass die Masse der auf einen äussern Centralpunkt $\alpha$ sich beziehenden Green'schen Belegung eines ellip-

tischen Cylinders lediglich von der Coordinate $u_\alpha$ desselben abhängt, also ungeändert bleibt, wenn sich $\alpha$ auf einer zur Basis des Cylinders confocalen Ellipse bewegt.

## § 11.

### Bestimmung der durch Einwirkung eines elektrischen Massenpunktes auf dem Cylinder inducirten Belegung.

Wir stellen jetzt folgende Aufgabe:

Ein unendlich langer elliptischer Cylinder soll in solcher Weise mit Masse belegt werden, dass deren Potential nebst dem eines mit der Masse +1 behafteten inneren Punktes für alle äusseren Punkte den Werth Null annimmt.

Oder physikalisch ausgedrückt:

Es soll die Vertheilung der Elektricität auf einem unendlich langen Cylinder ermittelt werden, der von einem inneren Punkte +1 influenzirt wird und zur Erde abgeleitet ist.

Dabei kann von einer dem Cylinder vorher mitgetheilten Ladung abgesehen werden, denn da derselbe unendlich lang ist, so wird die durch jene Ladung erzeugte Dichte unendlich klein.

Ist nun $j$ der gegebene innere Punkt, $a$ ein beliebiger äusserer Punkt. so muss die an der Stelle $\sigma$ des Cylinders sich bildende Dichte $q_\sigma$ der Bedingung:

$$T_{ja} + \int d\sigma \; q_\sigma \, T_{\sigma a} = 0$$

genügen. Dies bedeutet, dass:

$$q_\sigma = -\,\eta_j^{\sigma}$$

zu setzen ist, wodurch die gestellte Aufgabe gelöst ist.

Nach Gleichung 49) hat man also:

$$53)\quad \begin{aligned} q_\sigma &= -\frac{1}{\pi^2 \sqrt{\psi}} \int_0^\infty \cos h(x - x_j)\, F(h)\, dh, \\ F(h) &= \sum_0^\infty {}_\nu \frac{\mathfrak{E}_\nu(t_j)\, \mathfrak{E}_\nu(iu_j)}{\mathfrak{E}_\nu(iu)} \mathfrak{E}_\nu(t). \end{aligned}$$

Und auf innere Punkte übt diese Belegung ein Potential aus, welches $= -G_{ij}$ ist [s. Gl. 50)].

Liegt dagegen der inducirende Punkt ausserhalb des Cylinders, in $\alpha$, so ist ganz entsprechend:

$$q_\sigma = -\,\eta_\alpha^{\sigma},$$

d. h.:

54)
$$q_\sigma = -\frac{1}{\pi^2\sqrt{\psi}}\int_0^\infty dh \cos h(x-x_a).F(h),$$
$$F(h) = \sum_0^\infty{}' \nu \frac{\mathfrak{E}_\nu(t_a)\,\mathfrak{F}_\nu(iu_a)}{\mathfrak{F}_\nu(iu)}\,\mathfrak{E}_\nu(t)$$

und das Potential dieser Belegung auf äussere Punkte $= -G_{sa}$.

Die Gesammtmassen der sich bildenden Belegungen werden durch die am Schlusse des vorigen Paragraphen aufgestellten Formeln gegeben.

Die Dichtigkeit $q$ der durch einen elektrischen Massenpunkt $+1$ auf der Oberfläche eines unendlich langen elliptischen Cylinders inducirten Elektricität stimmt also mit der negativen Dichte $\eta$ der auf jenen Punkt als Centralpunkt sich beziehenden Green'schen Belegung überein. Dasselbe Resultat ergiebt sich auch bei anderen, geschlossenen Flächen. Es verdient indessen Beachtung, dass nach einer Bemerkung von Heine* in unserem Falle $q$ genau durch $-\eta$ ausgedrückt wird, während bei geschlossenen Flächen diese Annahme eine nur angenäherte Giltigkeit besitzt.

Die Gleichungen 53) und 54) gestatten vorläufig keine weitere Vereinfachung.

Für besondere Lagen des inducirenden Punktes dagegen lassen sich einige Eigenschaften der inducirten Belegung angeben, die ich in Kürze ableiten will.

Der Formel 53), in der man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x_j = 0$ setzen darf, entnimmt man, dass die Dichte $q$ für Punkte, die sich nur im Vorzeichen von $x$ unterscheiden, dieselbe ist. Nimmt $x$ seinem absoluten Werthe nach zu, so nimmt $q$ ab. Denn für einen zweiten Punkt $\sigma_1$, dessen $x_1 > x$, hat man:

$$q_{\sigma_1} = -\frac{1}{\pi^2\sqrt{\psi}}\int_0^\infty dh \cos hx_1\, F(h),$$

und da für jeden Werth von $h$:

$$\cos hx_1 < \cos hx,$$

so folgt dass:

$$q_{\sigma_1} < q_\sigma.$$

Diese Abnahme von $q_\sigma$ erfolgt bis in die Unendlichkeit, so dass an den unendlich entfernten Enden des Cylinders die Dichtigkeit der Elektricität $= 0$ ist. Genauer überzeugt man sich hiervon durch Anwendung des Du Bois-Reymond'schen Mittelwerthsatzes, welcher zeigt, dass:

$$\lim_{x=\infty}\int_0^\infty \cos hx\, dh.F(h) = 0$$

* Kugelfunctionen, II. Bd. S. 89 Anm. und S. 278.

ist, sobald $F(h)$ den Bedingungen, im Intervalle 0 bis $\infty$ abtheilungsweise stetig und abtheilungsweise monoton zu sein, genügt. Diese Bedingungen werden aber von $F(h)$ jedenfalls erfüllt. Die Maximaldichte findet also für die Punkte, deren $x=0$, statt, d. h. die in der Ebene des inducirenden Punktes gelegen sind.

Bei diesen Erörterungen, welche noch für jede Lage des inducirenden Punktes gelten, berücksichtigten wir nur die Abhängigkeit der Dichte $q$ von $x$. Es möge jetzt $q$ als Function von $t$ betrachtet, es möge also die Vertheilung der Elektricität auf dem Umfange einer zur Basis des Cylinders parallelen Ellipse untersucht werden. Hierzu ist eine Discussion des Ausdruckes:

$$F(h)=\sum_0^\infty{}_\nu \frac{\mathfrak{E}_\nu(t_j)\,\mathfrak{E}_\nu(iu_j)}{\mathfrak{E}_\nu(iu)}\,\mathfrak{E}_\nu(t)$$

nöthig, von welchem jene Vertheilung abhängt.

Wir zerlegen $F(h)$ in vier Theile, entsprechend den vier Classen der Functionen $\mathfrak{E}$, etwa in folgender Weise:

$$F(h)=M_1+M_2+M_3+M_4,$$

wo nun $M_1$ die Functionen $\mathfrak{E}$ erster Classe enthält, also gleich

$$\sum_0^\infty{}_\nu \frac{\mathfrak{E}_\nu^{\mathrm{I}}(t_j)\,\mathfrak{E}_\nu^{\mathrm{I}}(iu_j)}{\mathfrak{E}_\nu^{\mathrm{I}}(iu)}\,\mathfrak{E}_\nu^{\mathrm{I}}(t)$$

ist u. s. w.

Betrachten wir jetzt vier symmetrisch gelegene Punkte auf der Peripherie der Ellipse, so finden wir, Gebrauch machend von der Tabelle 26), S. 266, folgende Werthe für $F(h)$ in den vier Quadranten:

$$\begin{array}{lll} \text{I. Quadrant:} & F(h)=M_1+M_2+M_3+M_4, \\ \text{II.} \quad " & F(h)=M_1-M_2+M_3-M_4, \\ \text{III.} \quad " & F(h)=M_1-M_2-M_3+M_4, \\ \text{IV.} \quad " & F(h)=M_1+M_2-M_3-M_4. \end{array}$$

Man braucht also nur die Dichte $q$ für Punkte eines Quadranten, etwa des ersten, zu kennen, um sie für Punkte der übrigen Quadranten zu bestimmen.

Für die Enden der Axen, d. i. für $t=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}$, ergiebt sich mit Anwendung von 25), S. 266:

$$\begin{array}{ll} t=0: & F(h)=M_1^{(0)}+M_2^{(0)}, \\ t=\frac{\pi}{2}: & F(h)=M_1^{\left(\frac{\pi}{2}\right)}+M_3^{\left(\frac{\pi}{2}\right)}, \\ t=\pi: & F(h)=M_1^{(0)}-M_2^{(0)}, \\ t=\frac{3\pi}{2}: & F(h)=M_1^{\left(\frac{\pi}{2}\right)}-M_3^{\left(\frac{\pi}{2}\right)}. \end{array}$$

Die oben angefügten Marken (0) bez. $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ sollen die Substitution dieser Werthe von $t$ in die $M$ bezeichnen.

Von Interesse ist es, Punkte der Ellipse aufzusuchen, in denen dieselbe Dichte herrscht, was darauf hinauskommt, zwei Werthe von $t$ zu bestimmen, für welche $F(h)$ gleiche Werthe annimmt. Eine solche Untersuchung, die beim Kreiscylinder zu sehr einfachen Resultaten führt, lässt sich jedoch hier wohl nicht ausführen, so lange die Lage des inducirenden Punktes $j$ allgemein bleibt.

Wir specialisiren deshalb die Lage von $j$ und nehmen an, dass erstens $j$ auf der kleinen Axe der Ellipse liege, d. h. dass $t_j = \frac{\pi}{2}$ oder $= \frac{3\pi}{2}$ sei. Dann ist aber:

$$\mathfrak{E}_\nu^{II}(t_j) = 0, \quad \mathfrak{E}_\nu^{IV}(t_j) = 0,$$

folglich auch:

$$M_2 = 0, \quad M_4 = 0,$$

und man bemerkt, dass $F(h)$ für symmetrisch gelegene Punkte des 1. und 2., sowie des 3. und 4. Quadranten gleiche Werthe annimmt; für diese nämlich $M_1 - M_3$, für jene $M_1 + M_3$. Die Vertheilung ist also symmetrisch in Bezug auf die kleine Axe der Directrix.

Liegt zweitens $j$ auf der grossen Axe der Ellipse, so ist entweder $u_j = 0$, oder $t_j = 0$ oder $= \pi$, je nachdem $j$ innerhalb oder ausserhalb der Brennlinie liegt. In beiden Fällen verschwinden die Functionen $\mathfrak{E}_\nu(iu_j)$ resp. $\mathfrak{E}_\nu(t_j)$ der dritten und vierten Classe; es ist also:

$$M_3 = 0, \quad M_4 = 0,$$

d. h.: die Vertheilung ist symmetrisch in Bezug auf die grosse Axe der Ellipse.

Liegt endlich drittens $j$ im Coordinatenanfange selbst, so verschwinden die Ausdrücke $M_2$, $M_3$, $M_4$, d. h.: die Elektricität ist symmetrisch in Bezug auf beide Axen der Ellipse vertheilt, denn in allen vier Quadranten besitzt $F(h)$ denselben Werth $M_1$.

**Anhang.** Ist die Excentricität $c$ der Basis des Cylinders so klein, dass höhere als zweite Potenzen derselben vernachlässigt werden können, unterscheidet sich also der elliptische Cylinder nur wenig von einem Kreiscylinder, so gelten folgende Näherungsformeln für die Functionen $\mathfrak{E}_\nu(t)$, $\mathfrak{E}_\nu(iu)$, $\mathfrak{F}_\nu(iu)$.

I. und II. Classe:

$$\mathfrak{E}_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{h^2c^2}{8}\cos 2t\right),$$

$$\mathfrak{E}_1(t) = \cos t + \frac{h^2c^2}{32}\cos 3t,$$

$$\mathfrak{E}_k(t) = \cos kt + h^2c^2\left[\frac{\cos(k+2)t}{16(k+1)} - \frac{\cos(k-2)t}{16(k-1)}\right], \quad k = 2, 3, \ldots;$$

III. und IV. Classe: Dieselben Ausdrücke, nur tritt der Sinus für den Cosinus ein.

Diese Näherungsformeln, deren Ableitung hier übergangen werden möge, befriedigen die Differentialgleichung für $\mathfrak{C}(t)$ bis auf Grössen der Ordnung $c^2$ und genügen mit demselben Genauigkeitsgrade auch den Integralformeln des § 3.

Als Annäherungen für die Constanten $k_\nu$, welche sich als Wurzeln einer Gleichung unendlich hohen Grades darstellen, ergeben sich bis auf Grössen vierter Ordnung genau die ganzen Zahlen 0, 1, 2, ... Weiter folgt:

$$\mathfrak{C}_\nu(iu) = (1+c^2)\, J_k(hir),$$
$$\mathfrak{F}_\nu(iu) = (1+c^2)\, Y_k(hir),$$

worin:

$$r = \frac{c}{2} e^u.$$

Mit Benutzung dieser Werthe wird $\eta_j$ für einen auf der Axe des Cylinders liegenden Centralpunkt $j$ durch folgenden Ausdruck dargestellt:

$$\eta_j = -\frac{1}{2r\pi^2}\int_0^\infty \frac{\cos hx\, dh}{J_0(hir)} - \frac{c^2}{32\pi^2}\int_0^\infty \cos hx\, G(h)\, dh,$$

$$G(h) = -\frac{h^2}{rJ_0(hir)} + \cos 2t\left[\frac{h^2}{r}\left(\frac{2}{J_0(hir)} + \frac{1}{J_2(hir)}\right) + \frac{4}{r^3 J_0(hir)}\right].$$

Das erste, von $c^2$ freie Glied repräsentirt die Dichte der Green'schen Belegung oder der inducirten Elektricität eines Kreiscylinders, dessen Basis den Radius $r$ besitzt, falls der mit der Masse $+1$ geladene Punkt auf der Axe liegt. Das zweite Glied drückt daher die Abweichung der Dichte des elliptischen von der des Kreiscylinders aus. Dieselbe ist verschieden für die Punkte einer Ellipse; doch besitzt sie, da sie nur von $\cos 2t$ abhängt, für symmetrisch gelegene Punkte denselben Werth.

---

Zum Schlusse sei noch bemerkt, dass die auf den vorstehenden Blättern behandelte Aufgabe auch dadurch gelöst werden kann, dass man den elliptischen Cylinder als Specialfall eines Ellipsoids oder eines elliptischen Kegels betrachtet. Die erste Methode hat sich mir nicht als erfolgreich gezeigt. Die zweite fordert zur Untersuchung der bis jetzt noch nicht behandelten Functionen des elliptischen Kegels auf, deren Grenzfälle die Functionen des elliptischen Cylinders sein werden, genau so, wie die von Herrn Mehler eingeführten Kegelfunctionen die Bessel'schen Functionen als Grenzfälle besitzen.

Mit Anwendung der Methode der reciproken Radien erhält man noch die Lösung der Aufgabe: die Vertheilung einer ohne Einwirkung äusserer Kräfte auf dem Bilde des Cylinders sich befindenden Elektricitätsmenge zu bestimmen. Legt man den Mittelpunkt der Kugel, in Bezug auf welche der Cylinder abgebildet wird, in die Cylinderaxe, so ist das Bild des Cylinders eine geschlossene Fläche, welche von Ebenen, die durch die Axe gehen, in Kreisen geschnitten wird. Diese Kreise, von verschiedener Grösse, berühren die Axe. Bei einem Kreiscylinder sind alle Kreise gleich gross und man kann dessen Bildfläche dann als einen besondern Fall des Kreisringes ansehen, nämlich den, dass der rotirende Kreis nicht ausserhalb der Rotationsaxe liegt, sondern dieselbe tangirt.

## XVII.

# Näherungsformeln für Inhalt und Oberfläche niedriger Flächenabschnitte.

Von

Dr. L. Geisenheimer,

Bergschul-Director in Tarnowitz, O.-S.

Hierzu Taf. VII Fig. 1.

Die Planimetrie besitzt in den Ausdrücken für den Inhalt $J$ und die angenäherte Bogenlänge $l$ eines beliebigen Parabelsegments, $J=\frac{2}{3}gh$ und $l=g\left[1+\frac{8}{3}\left(\frac{h}{g}\right)^2\right]$, wo $g$ die Sehne, $h$ die Scheitelhöhe des Segments bedeutet, zwei für die Praxis des Feldmessers werthvolle, viel angewendete Formeln. In nachstehender Entwickelung sollen die entsprechenden stereometrischen Formeln, also Ausdrücke für die näherungsweise Berechnung des körperlichen Volumens, welchen irgend ein kleiner Theil einer Fläche über der schiefen oder orthogonalen Projection seines Umfanges bildet, und der Oberfläche dieses Flächentheils hergeleitet werden. Durch mehrere Beziehungen, welche sich hierbei bezüglich der Trägheitsmomente einer ebenen Figur ergeben, gewinnt die Entwickelung vielleicht ein weiteres Interesse.

### Berechnung des Inhalts eines mit flachem Gewölbe überspannten Raumes.

Im Scheitel der überwölbenden Fläche wählen wir zwei beliebige conjugirte Tangenten als $X$- und $Y$-Axe; die nach Richtung des Projectionsstrahles fallende $Z$-Axe bilde mit der Scheitel- (Tangential-) Ebene der Fläche den Winkel $(z, xy)=\gamma$. Die Flächengleichung kann dann in der Form gegeben werden:

$$z=\frac{r}{2}x^2+\frac{s}{2}y^2+\frac{t}{6}x^3+\frac{u}{2}x^2y+\frac{v}{2}xy^2+\frac{w}{6}y^3+\dots$$

und für den Inhalt des durch die Scheitelebene, die Projectionsstrahlen und die Fläche umschlossenen Raumes ergiebt sich, indem wir uns auf die zweiten Potenzen beschränken,

$$J=\int\left(\frac{r}{2}x^2+\frac{s}{2}y^2\right)\sin(xy).\sin\gamma.dx\,dy.$$

Werden die Trägheitsmomente der Projection bezüglich der $X$- und $Y$-Axe mit $T_{xx}$ und $T_{yy}$ bezeichnet; so wird:

$$J = \frac{1}{2\sin^2(xy)} \cdot (r \sin\gamma\, T_{yy} + s \sin\gamma\, T_{xx}).$$

Bedeuten $\varrho_x$ und $\varrho_y$ die Krümmungsradien der längs der $X$- und $Y$-Axe fallenden Normalschnitte, so ist

$$r.\sin\gamma = \sin\gamma \lim \frac{2z}{x^2} = \frac{1}{\varrho_x}, \text{ ebenso } s.\sin\gamma = \frac{1}{\varrho_y},$$

daher

$$1) \qquad J = \frac{1}{2\sin^2(xy)}\left(\frac{T_{xx}}{\varrho_y} + \frac{T_{yy}}{\varrho_x}\right).$$

Dieser Ausdruck ist von der Neigung der $Z$-Axe unabhängig; subtrahirt man ihn vom Inhalte des prismatischen Raumes, welchen die Scheitelebene, die Projectionsstrahlen und irgend eine Grundebene begrenzen, so folgt der Inhalt des über der letzteren liegenden, durch die Fläche überspannten Raumes.

Da der Werth für $J$ von der Wahl der $X$- und $Y$-Axe unabhängig sein muss und $\varrho_x . \varrho_y . \sin^2(xy)$ einen festen Werth, nämlich das Reciproke des Krümmungsmaasses der Fläche im Scheitelpunkte bildet, folgt:

$$T_{xx} . \varrho_x + T_{yy} . \varrho_y = Const.,$$

welche Gleichung sich auch, unabhängig von der vorstehenden Entwickelung, folgendermassen herleiten lässt:

$a$ und $b$ seien die nach Richtung der $X$- und $Y$-Axe fallenden Halbmesser der Indicatrix der Fläche, $p$, bezüglich $q$ und $R$ die Abstände eines beliebigen Punktes der $XY$-Ebene von den Axen $X$, $Y$ und dem Coordinatenanfangspunkte; so gilt bekanntlich für conjugirte Halbmesser der Indicatrix die Formel:

$$a^2 \sin^2(a, R) + b^2 \sin^2(b, R) = Const. \text{ oder } p^2 . \varrho_x + q^2 . \varrho_y = Const. R^2,$$

womit, da $R$ von der Wahl des Coordinatensystems unabhängig, die eben gefundene Gleichung bewiesen ist.*

Falls der Scheitelpunkt der Fläche hyperbolischer Natur ist, die Scheitelebene also die Fläche schneidet, haben $\varrho_x$ und $\varrho_y$ entgegengesetztes Vorzeichen. Formel 1), welche in diesem Falle unbestimmt werden kann, lässt sich alsdann in eine andere Form überführen, indem man die $X$- und $Y$-Axe in die Asymptoten der Indicatrix verlegt. Sind $\varrho_1$, $\varrho_2$ die absoluten Werthe der Hauptkrümmungsradien, $\varrho_1 > \varrho_2$, so liefert diese Transformation auf die Inflexionstangenten die Gleichung:

---

* Der entsprechende planimetrische Satz lautet: Sind $a$, $b$ zwei conjugirte Halbmesser eines, $a_1$, $b_1$ die nach gleicher Richtung fallenden Halbmesser eines beliebigen andern concentrischen Kegelschnittes, so ist $\frac{a^2}{a_1^2} + \frac{b^2}{b_1^2} = Const.$

$$z = a.xy + \ldots,\quad \text{wo}\quad a = \frac{2}{(\varrho_1 - \varrho_2)\sin\gamma};$$

ferner kommt für den Winkel $\alpha$ der neuen Axen:

$$\sin\alpha = 2\frac{\sqrt{\varrho_1\varrho_2}}{\varrho_1 - \varrho_2}.$$

Aus dieser Form ergiebt sich:

$$2)\qquad J = a.\sin\alpha.\sin\gamma\int xy.dx\,dy.$$

Das Integral lässt sich mit Hilfe des zur Projection auf die Scheitelebene gehörigen Centralellipsoids, bezüglich seines Durchschnittes mit genannter Ebene, leicht durch Trägheitsmomente ausdrücken. Bezieht man die Gleichung des Centralellipsoids auf beliebige conjugirte Halbmesser, so folgt, da die Gleichung stets nur rein quadratische Glieder der Coordinaten enthält, dass für einen beliebigen Körper $\int xy\,dm$ (wo $dm$ ein Massentheilchen bedeutet) verschwindet, wenn dies Integral für zwei conjugirte Durchmesserebenen gebildet wird. Man schliesst hieraus:

Bei Flächen mit hyperbolischer Indicatrix werden die kleinen, nach verschiedener Seite der Scheitelebene fallenden körperlichen Räume einander gleich, wenn die Inflexionstangenten conjugirte Halbmesser des zur Projection gehörigen Centralellipsoids sind.

In diesem Falle überspannt also die krumme Fläche denselben Raum wie ihre Scheitelebene. Eine Lage des Scheitels, für welche $J$ bei gegebener Grundfläche ein Minimum oder Maximum wird, lässt sich nach Formel 2), also bei hyperbolischen Flächen nicht bestimmen. Dagegen zeigt Formel 1) für elliptische Flächen, dass der Inhalt des über der Scheitelebene liegenden Körpers ein Minimum, also der überspannte Raum ein Maximum wird, wenn die Projection des Scheitels in den Schwerpunkt der Grundfläche fällt.

Soll der Inhalt eines niedrigen Abschnittes der elliptischen Fläche berechnet werden, so lautet die Gleichung der Grundfläche als eines der Scheitelebene parallelen Schnittes in erster Annäherung, wenn wir die $X$- und $Y$-Axe in die Ebenen der Hauptkrümmungsradien verlegen und die $Z$-Axe hierzu senkrecht wählen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\quad \text{wo}\quad a^2 = 2\varrho_x h,\quad b^2 = 2\varrho_y h,$$

$$T_{xx} = \frac{\pi}{4}ab^3,\quad T_{yy} = \frac{\pi}{4}a^3 b,$$

daher:

$$3)\qquad J = \frac{\pi}{8}ab\left(\frac{a^2}{\varrho_x} + \frac{b^2}{\varrho_y}\right) = \frac{\pi}{2}a.b.h = \frac{1}{2}F.h,$$

wo F den Inhalt der Grundfläche, $h$ die Scheitelhöhe des Abschnittes bedeutet. Diese bekannte Näherungsformel wird gewöhnlich mit Hilfe der Simpson'schen Regel hergeleitet, wobei sich auch die Bedingungen ihrer genauen Geltung ergeben.

## Näherungsformel für den kubischen Inhalt eines körperlichen Zweiecks.

Durch die Sehne $g$ einer Fläche werden unter beliebigem endlichen Winkel zwei die Fläche schneidende Ebenen gelegt; der Inhalt des durch diese Ebenen und die Fläche begrenzten körperlichen Zweiecks soll gefunden werden (Taf. VII Fig. 1).

Wir legen durch die Scheitel der begrenzenden Schnittcurven die zu $g$ parallelen Tangenten derselben. Die Strecken, welche diese Scheitel mit der Mitte der Sehne $g$ verbinden (und welche im Allgemeinen zu $g$ nicht senkrecht stehen), seien $m_1$ und $m_2$. Setzen wir voraus, dass $m_1$ und $m_2$ im Verhältniss zu $g$ klein genug seien, um die begrenzenden Bogen als Parabeln betrachten zu dürfen, deren bezügliche Parameter $p_1$ und $p_2$ seien, so folgt unter Vernachlässigung der Flächenkrümmung in den zu $[m_1 m_2]$ parallelen Ebenen als erste Annäherung des gesuchten Inhalts $J$:

$$J = \int \frac{g}{2}\left(m_1 - \frac{y^2}{2p_1}\right)\left(m_2 - \frac{y^2}{2p^2}\right) dy . \sin(m_1 m_2) . \sin(g, m_1 m_2),$$

wo $y$ die von der Mitte der Sehne $g$ gemessene Länge bedeutet. Es ist

$$p_1 = \frac{g^2}{8 m_1}, \quad p_2 = \frac{g^2}{8 m_2}.$$

Die Ausrechnung liefert:

$$4) \qquad J = \tfrac{4}{15} m . n . g . \sin(m_1 m_2) . \sin(g, m_1 m_2).$$

Der vom Zahlenfactor $\frac{4}{15}$ befreite Ausdruck rechts stellt den doppelten Inhalt des dem Zweieck umschriebenen dreiseitigen Prismas dar, und da letzterer nur vom Normalschnitte und der Kantenlänge $g$ des Prismas abhängt, ergiebt sich:

Der kubische Inhalt eines körperlichen Zweiecks ist in erster Annäherung gleich $\frac{8}{15}$ eines dem Zweieck in den Grenzebenen umschriebenen dreiseitigen Prismas.

Indem man das Zweieck durch Schnitte längs seiner Axe $g$ in solche mit unendlich kleinem Ebenenwinkel theilt, folgt nach diesem Satze in weiterer, die Krümmung der Fläche in der Ebene $[m_1 m_2]$ berücksichtigender Annäherung, dass der Inhalt des Zweiecks gleich $\frac{8}{15}$ desjenigen Prismas mit der Kantenlänge $g$ ist, welches aus den beiden Begrenzungsebenen durch $g$ und den zu $g$ parallelen, die krumme Fläche berührenden Tangenten gebildet, also dem Zweieck stetig umschrieben ist. Für Zweiecke, deren Axenschnitte Parabeln, ist diese Kubatur eine genau richtige.

**Oberfläche einer beliebig begrenzten flachen Kuppe.**

Wird das Coordinatensystem wie bei Formel 1) gewählt, so dass $X$ und $Y$ conjugirte Richtungen des Scheitelpunktes, $Z$ beliebig; bedeutet ferner $n$ die Normale der Fläche, $(nx)$, $(ny)$, $(nz)$ deren spitze Winkel mit den Axen, so erhält man für die Oberfläche $O$:

$$O = \sin(xy)\,\sin\gamma \int \frac{dx.dy}{\cos(nz)}.$$

Aus der Flächengleichung:

$$z = \left(\frac{r}{2}x^2 + \frac{s}{2}y^2\right) + \left(\frac{t}{6}x^3 + \frac{u}{2}x^2y + \frac{v}{2}xy^2 + \frac{w}{6}y^3\right)$$

folgt:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = rx + \frac{1}{2}(tx^2 + 2uxy + vy^2), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = sy + \frac{1}{2}(ux^2 + 2vxy + wy^2),$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -1.$$

Sind $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Höhen des aus den Coordinatenaxen gebildeten körperlichen Dreiecks, also $\alpha = \angle(x, yz)$ u. s. f., so findet man die Winkel der Normalen mit den Axen durch die Gleichungen:

$$\cos(nx) : \cos(ny) : \cos(nz) = \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z},$$

$$\frac{\cos^2(nx)}{\sin^2\alpha} + \frac{\cos^2(ny)}{\sin^2\beta} + \frac{\cos^2(nz)}{\sin^2\gamma} - 2\frac{\cos z}{\sin\alpha . \sin\beta}\cdot\cos(nx)\cos(ny)$$
$$-2\frac{\cos y}{\sin\alpha . \sin\gamma}\cdot\cos(nx)\cos(nz) - 2\frac{\cos x}{\sin\beta . \sin\gamma}\cdot\cos(ny)\cos(nz) = 1,$$

wo $x$, $y$, $z$ die Winkel des erwähnten körperlichen Dreiecks.

Hiernach wird:

$$\cos(nz) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2}{\sin^2\alpha} + \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma} - 2\frac{\cos z}{\sin\alpha\sin\beta}\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial y} + 2\frac{\cos y}{\sin\alpha\sin\gamma}\frac{\partial F}{\partial x} + 2\frac{\cos x}{\sin\beta\sin\gamma}\frac{\partial F}{\partial y}}}$$

oder

$$\frac{\sin\gamma}{\cos(nz)} = \sqrt{1 + \frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\alpha}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\beta}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - 2\cos z\frac{\sin^2\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial y} + 2\cos y\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\frac{\partial F}{\partial x} + 2\cos x\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Da $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ in der Nähe des Scheitels gegen Null convergiren, kann der binomische Satz angewendet werden. Nach Einsetzung der für die partiellen Ableitungen bestimmten Werthe kommt:

$$O = \int dx.dy.\sin(xy) + \int \left(\cos y \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} r.x + \cos x \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} s.y\right) dx.dy.\sin xy$$

$$+ \frac{1}{2}\int \left(\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\alpha}\sin^2 y\, r^2.x^2 - 2\frac{\sin^2\gamma}{\sin\alpha\,\sin\beta}\sin x \sin y \cos(xy) rs.xy \right.$$
$$\left. + \frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\beta}\sin^2 x\, s^2.y^2\right) dx.dy\,\sin xy$$

$$+ \frac{1}{2}\sin\gamma \int \left\{\left(\frac{\cos y}{\sin\alpha} t + \frac{\cos x}{\sin\beta} u\right) x^2 + 2\left(\frac{\cos y}{\sin\alpha} u + \frac{\cos x}{\sin\beta} v\right) xy \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\cos y}{\sin\alpha} v + \frac{\cos x}{\sin\beta} w\right) y^2\right\} dx.dy.\sin(xy).$$

Bezeichnen wir den Inhalt der durch die $Z$-Axe erhaltenen Projection des die auszurechnende Fläche begrenzenden Umfanges auf die Scheitelebene mit F, die Schwerpunktscoordinaten dieser Projection mit $\xi$ und $\eta$, ihre Trägheitsmomente bezüglich der $X$- und $Y$-Axe wieder mit $T_{xx}$ und $T_{yy}$, ferner $\sin^2(xy)\int xy.dx.dy.\sin(xy)$, also die Summe aus den Flächentheilen multiplicirt mit ihren senkrechten Abständen von der $X$- und $Y$-Axe, mit $T_{xy}$, so ergiebt sich nach einigen einfachen trigonometrischen Umformungen:

$$O = \mathrm{F}\left\{1 + \cos y \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} r.\xi + \cos x \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} s.\eta\right\}$$
$$+ \frac{\sin^2\gamma}{2\sin^4(xy)}\{r^2 T_{yy} - 2\cos(xy) rs\, T_{xy} + s^2 T_{xx}\}$$
$$+ \frac{\sin\gamma}{2\sin^3(xy)}\{(\mathrm{cotg}\, y.t + \mathrm{cotg}\, x.u) T_{yy} + 2(\mathrm{cotg}\, y.u + \mathrm{cotg}\, x.v) T_{xy}$$
$$+ (\mathrm{cotg}\, y.v + \mathrm{cotg}\, x.w) T_{xx}\}.$$

Bedeutet $\nu$ die Normale des über dem Schwerpunkte der Grundfläche (der Projection) liegenden Flächenpunktes, so wird:

$$\frac{\sin\gamma}{\cos(\nu z)} = 1 + \cos y \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} r.\xi + \cos x \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} s.\eta$$
$$+ \frac{\sin^2\gamma}{2.\sin^2(xy)}\{r^2\xi^2 - 2\cos(xy) rs.\xi\eta + s^2\eta^2\}$$
$$+ \frac{\sin\gamma}{2.\sin(xy)}\{(\mathrm{cotg}\, y.t + \mathrm{cotg}\, x.u)\xi^2 + 2(\mathrm{cotg}\, y.u + \mathrm{cotg}\, x.v)\xi\eta$$
$$+ (\mathrm{cotg}\, y\ v + \mathrm{cotg}\, x.w)\eta^2\},$$

welche Gleichung in Verbindung mit der vorletzten liefert:

$$5)\quad O = \mathrm{F}\frac{\sin\gamma}{\cos(z\nu)} + \frac{\sin^2\gamma}{2\sin^4(xy)}\{r^2 T_{\eta\eta} - 2\cos(xy) rs T_{\xi\eta} + s^2 T_{\xi\xi}\}$$
$$+ \frac{\sin\gamma}{2\sin^3(xy)}\{(\mathrm{cotg}\, y.t + \mathrm{cotg}\, x.u) T_{\eta\eta} + 2(\mathrm{cotg}\, y.u + \mathrm{cotg}\, x.v) T_{\xi\eta}$$
$$+ (\mathrm{cotg}\, y.v + \mathrm{cotg}\, x.w) T_{\xi\xi}\},$$

wo $T_{\xi\xi}$, $T_{\xi\eta}$, $T_{\eta\eta}$ die entsprechenden, auf den Schwerpunkt bezogenen Summen darstellen.

Die in genau entsprechender Weise für die vom Scheitelpunkte gemessene Bogenlänge $l$ einer ebenen Curve, deren Coordinatenaxen den Winkel $\gamma$ bilden und deren Gleichung $y=\frac{r}{2}x^2+\frac{t}{6}x^3$ lautet, herzuleitende Gleichung heisst:

$$l=x+\frac{r}{2}\cos\gamma . x^2+\frac{1}{6}(r^2\sin^2\gamma+t\cos\gamma)x^3.$$

Die vorstehenden Formeln enthalten bei **beliebiger** Wahl der $Z$-Axe die Coefficienten $t, u, v, w$ der Glieder dritter Ordnung; in diesem Falle unterscheiden sich also im Allgemeinen die zu derselben Projection (in der Scheitelebene bez. Tangente) gehörenden Flächenräume einander osculirender Flächen um Grössen vierter, die Bogenlängen osculirender Curven um Grössen dritter Ordnung. Der von diesen meist unbekannten Coefficienten abhängige Theil der Correction verschwindet, wenn die $Z$-Axe mit der Flächennormalen zusammenfällt, die Projection also **orthogonal** wird. Für diese in der Praxis fast ausschliesslich angewendete Art der Projection nimmt die Formel 5) die einfachere Gestalt an:

$$O=\quad F+\frac{1}{2\sin^4(xy)}\{r^2T_{yy}-2\cos(xy)\,rs\,T_{xy}+s^2T_{xx}\}$$

oder

$$O=\frac{F}{\cos(z\nu)}+\frac{1}{2\sin^4(xy)}\{r^2T_{\eta\eta}-2\cos(xy)rs\,T_{\xi\eta}+s^2T_{\xi\xi}\}$$

oder, wieder die Krümmungsradien $\varrho_x$ und $\varrho_y$ der conjugirten Normalschnitte durch die $X$- und $Y$-Axe einführend:

$$6)\quad\begin{cases} O=\quad F\quad+\frac{1}{2\sin^4(xy)}\left\{\frac{T_{xx}}{\varrho_y^2}-2\cos(xy)\frac{T_{xy}}{\varrho_x\varrho_y}+\frac{T_{yy}}{\varrho_x^2}\right\},\\ O=\frac{F}{\cos(z\nu)}+\frac{1}{2\sin^4(xy)}\left\{\frac{T_{\xi\xi}}{\varrho_y^2}-2\cos(xy)\frac{T_{\xi\eta}}{\varrho_x\varrho_y}+\frac{T_{\eta\eta}}{\varrho_x^2}\right\}.\end{cases}$$

Beide Formeln lassen sich in zwei wesentlich verschiedenen Weisen vereinfachen. Zunächst können die $X$- und $Y$-Axe so gewählt werden, dass $T_{xy}$ bez. $T_{\xi\eta}$ verschwindet, indem man zwei Richtungen sucht, welche sowohl für die Indicatrix, wie für das zum Scheitel- oder Schwerpunkte der Projection gehörige Centralellipsoid conjugirte Durchmesser bilden. Da die Involution der zum Centralellipsoid, bezüglich der zu dessen Schnitt mit der Scheitelebene gehörigen Durchmesser stets elliptisch ist, existirt immer ein und nur ein Paar solcher Axen, falls nicht dieser Schnitt und die Indicatrix ähnliche Curven sind, in welchem Falle $T_{xy}$ bez. $T_{\xi\eta}$ für jedes Paar conjugirter Tangenten Null wird. In der Praxis wird sich dieses Axenpaar oft als Mittellinie und die hierdurch halbirte Richtung der Projection ergeben.

Ferner können die Hauptkrümmungsrichtungen als Coordinatenaxen genommen werden, wodurch $\angle(xy)=\frac{\pi}{2}$ wird und die Formeln die Gestalt annehmen:

$$7)\qquad O = \mathrm{F} + \frac{1}{2}\left(\frac{T_{xx}}{\varrho_y^2} + \frac{T_{yy}}{\varrho_x^2}\right) = \frac{\mathrm{F}}{\cos(z\nu)} + \frac{1}{2}\left(\frac{T_{\xi\xi}}{\varrho_y^2} + \frac{T_{\eta\eta}}{\varrho_x^2}\right).$$

Aus den verschiedenen Gestalten der Formel ergiebt sich der auf die bereits oben hergeleitete Eigenschaft der Trägheitsmomente leicht zurückzuführende Satz:

$$T_{xx}\cdot\varrho_x^2 - 2\cos(xy)\,T_{xy}\,\varrho_x\varrho_y + T_{yy}\,\varrho_y^2 = Const.$$

Auf weitere Beziehungen, welche sich nach Gleichung 5) zwischen den Trägheitsmomenten und den Coefficienten der Glieder dritter Ordnung ergeben, gehen wir hier nicht weiter ein.

Aus den zuletzt gewonnenen Formeln folgt:

Die Oberfläche ist bei gegebener orthogonaler Projection innerhalb der hier beachteten Grenzen der Genauigkeit, bis auf Grössen einschliesslich vierter Ordnung*, von der Richtung der Krümmungsradien unabhängig, also für Flächen mit gleich und entgegengesetzt gerichteten Krümmungen dieselbe.

Die zu einer bestimmten Projection gehörige Oberfläche einer stetig gekrümmten Fläche wird ein Minimum, wenn der Scheitel mit dem Schwerpunkte der orthogonalen Projection des Umfangs auf die Scheitelebene zusammenfällt.

Damit bei gegebenem Inhalt des überwölbten Raumes die Oberfläche ein Minimum werde, müssen die Gleichungen stattfinden $\left(\angle(xy) = \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\frac{T_{xx}}{\varrho_y^2}\,d\varrho_y = -\frac{T_{yy}}{\varrho_x^2}\,d\varrho_x$$
$$\frac{T_{xx}}{\varrho_y^3}\,d\varrho_y = -\frac{T_{yy}}{\varrho_x^3}\,d\varrho_x$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$\varrho_x = \varrho_y.$$

Die überwölbende Fläche ist also als Kugel zu betrachten. Wird das polare Trägheitsmoment des Grundrisses, $T_{xx} + T_{yy}$, mit $T_p$ bezeichnet, so folgt für das körperliche Volumen $J$ über der Scheitelebene und die Oberfläche $O$, wenn $\varrho$ der Krümmungsradius des Gewölbes (der „Böhmischen Kappe"):

$$8)\qquad J = \frac{1}{2}\,\frac{T_p}{\varrho},\quad O = \mathrm{F} + \frac{1}{2}\,\frac{T_p}{\varrho^2}.^{**}$$

---

* Bei der Rectification ebener Curven gelten die entsprechenden Entwickelungen bis auf Glieder von höchstens dritter Ordnung.

** Die allgemeine Behandlung der Aufgabe: diejenige Fläche zu bestimmen, welche, indem sie ein bestimmtes körperliches Volumen überspannt, die kleinste Oberfläche besitzt, führt bekanntlich auf die Bedingung, dass die Summe der Hauptkrümmungen in der gesuchten Fläche constant sei. Eine specielle Lösung bietet, in Uebereinstimmung mit der obigen Entwickelung, die Kugelfläche.

**Oberfläche eines elliptischen Flächenabschnittes.**

Bedeuten wieder, wie früher, $h$ die Höhe des Abschnittes, $a$ und $b$ die Halbaxen der zur Indicatrix ähnlichen Grundfläche F, so wird:

$$O = \mathrm{F} + \frac{1}{8}\mathrm{F}\left(\frac{a^2}{\varrho_x^2} + \frac{b^2}{\varrho_y^2}\right) \quad \text{oder} \quad O = \mathrm{F}\left[1 + \frac{h}{4}\left(\frac{1}{\varrho_x} + \frac{1}{\varrho_y}\right)\right].$$

Bei Anwendung dieser Formel ist nicht nothwendig, dass der Scheitel des Abschnittes genau über dem Schwerpunkte der Grundfläche liege, da in diesem Falle die Verschiebungen $\xi$ und $\eta$ des Scheitels gegen den Schwerpunkt proportional mit $h$ sind und somit die hierdurch bedingte Correction, gleich $\frac{1}{2}\mathrm{F}\left(\frac{\xi^2}{\varrho_x^2} + \frac{\eta^2}{\varrho_y^2}\right)$, ausserhalb der Grenzen der hier beachteten Genauigkeit fällt.

Für die Calotte einer Kugel mit dem Radius $\varrho$ ergiebt sich hiernach:

$$O = \mathrm{F}\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{h}{\varrho}\right).$$

Ist der Radius des Grundkreises $a$, so wird (genau):

$$a^2 = h(2\varrho - h), \quad \text{daher} \quad O = \frac{\pi}{2}\,\frac{a^2(2\varrho + h)}{\varrho} = 2\pi\varrho h - \frac{\pi}{2}\,\frac{h^3}{\varrho},$$

welcher Ausdruck in seinem ersten Gliede den genauen Werth für die Oberfläche des Kugelabschnittes giebt; das den Fehler der Entwickelung darstellende Glied $\frac{\pi}{2}\,\frac{h^3}{\varrho}$ ist von sechster Ordnung. Der Ausdruck von $O$ für den Abschnitt einer beliebigen Fläche wird aus dem für die Calotte erhalten, indem man statt der Krümmung der Kugel $\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ die mittlere Krümmung der Fläche $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_x} + \frac{1}{\varrho_y}\right)$ einsetzt. Bei gleicher Grundfläche besitzt die Kugelcalotte die kleinste Oberfläche.

Die entsprechende Formel für die Länge $l$ eines Bogens mit dem Krümmungsradius $\varrho$ über der Sehne $g$ lautet:

$$l = g\left[1 + \frac{1}{3}\,\frac{h}{\varrho}\right].$$

Die vorstehend entwickelten Formeln für die Fläche (den Bogen) eines Flächen- oder Bogenabschnittes lassen sich noch in der bemerkenswerthen Form aufstellen:

$$9) \qquad O = \mathrm{F} + \frac{J}{\varrho}, \quad l = g + \frac{J}{2\varrho},$$

wo $J$ den Inhalt des Abschnittes (Segments), $\frac{1}{\varrho}$ die (mittlere) Krümmung bedeutet.

### Inhalt und Oberfläche eines über einem Kreise oder Rechteck liegenden Flächenstückes.

Nach Formel 1) folgt für das Volumen über der Scheitelebene, den Radius des Grundkreises $a$ nennend (der Scheitel liege im Mittelpunkte des Kreises):

$$J = \frac{\pi}{8} a^4 \left( \frac{1}{\varrho_x} + \frac{1}{\varrho_y} \right),$$

ferner nach 7):

$$O = \mathrm{F} \left[ 1 + \frac{a^2}{8} \left( \frac{1}{\varrho_x^2} + \frac{1}{\varrho_y^2} \right) \right].$$

Für Inhalt und Oberfläche über einem Rechteck, dessen Seiten $2a$ und $2b$ symmetrisch zum Scheitelpunkt parallel den Hauptkrümmungsrichtungen liegen, kommt:

$$J = \frac{1}{6} \mathrm{F} \left( \frac{a^2}{\varrho_a} + \frac{b^2}{\varrho_b} \right), \quad O = \mathrm{F} \left[ 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{a^2}{\varrho_a^2} + \frac{b^2}{\varrho_b^2} \right) \right],$$

wo $\varrho_a$ und $\varrho_b$ die Krümmungsradien der zu $a$ bez. $b$ parallelen Normalschnitte bezeichnen. Diese Formeln können Verwendung finden, wenn enge Röhren eine Fläche durchsetzen.

### Berechnung der krummen Oberfläche eines Zweiecks.

Wir legen wieder die zur Axe des Zweiecks parallelen Tangenten der begrenzenden Curven und verbinden deren Scheitelpunkte; der Scheitel der zu ermittelnden Oberfläche liegt bis auf Grössen höherer Ordnung über der Mitte letztgenannter Geraden senkrecht zu der durch diese und die Tangenten bestimmten Ebene. In diesem Scheitel wählen wir eine zur Axe des Zweiecks parallele Gerade zur $Y$-Axe, eine Parallele zur Verbindungslinie ist die conjugirte $X$-Axe. Die Projectionen der Grenzcurven auf die Scheitelebene dürfen bei Berechnung der Correction als parabolische Segmente betrachtet werden. Da $T_{yy}$ eine Grösse sechster Ordnung, kann dieser Werth vernachlässigt werden; für $T_{xx}$ ergiebt sich nach bekannten Formeln $\mathrm{F} \cdot \frac{1}{20} g^2 \sin^2(xy)$, wo F den Flächeninhalt der Projection des Zweiecks auf die Scheitelebene, $g$ dessen Axe bedeutet. Hiernach wird

$$10) \qquad O = \mathrm{F} \left( 1 + \frac{1}{40 \sin^2(xy)} \cdot \frac{g^2}{\varrho_y^2} \right)$$

und $\varrho_y = \frac{g^2}{8h}$, wo $h$ die Senkrechte aus $g$ zur Scheitelebene oder (angenähert) zur Ebene der Scheiteltangenten der Grenzcurven bedeutet. F darf hier im Allgemeinen nicht durch die für ein Parabelsegment geltenden Näherungswerthe ausgedrückt werden, da der hierdurch begangene Fehler mit $g^2$ proportional, also mit der Correction von gleicher Ordnung wäre. —

Die entwickelten Gleichungen mögen noch auf einige zusammengesetzte Flächen Anwendung finden.

### Berechnung eines flachen Kreuzgewölbes.*

Die Projectionen der einzelnen Kappen sind Dreiecke, deren Mittellinien die Axen der Wölbung ergeben. Eine Seite des überwölbten Vielecks heisse $a$, die zugehörige Mittellinie der Kappe $m$, die Scheitelhöhe des Gewölbes sei $h$, die $X$-Axe parallel $a$, die $Y$-Axe parallel $m$. Da $\varrho_y = \infty$, folgt für das Volumen einer Kappe unter der Scheitelebene:

$$J = \frac{1}{2\sin^2(xy)}\frac{T_{yy}}{\varrho_x}, \quad T_{yy} = \frac{1}{24}\Delta . a^2 \sin^2(xy), \quad \varrho_x = \frac{a^2}{8h},$$

daher

$$J = \tfrac{1}{6}\Delta h, \text{ wo } \Delta \text{ die Projection der Kappe bedeutet.}$$

Für den von den Kämpferpunkten aus überwölbten Raum folgt demnach $\frac{1}{6}F . h$, F der Inhalt des überwölbten Vielecks. Dieses Volumen ist also von der Lage des Scheitels unabhängig. Weiter ergiebt sich für die Oberfläche des Gewölbes:

$$O = F + \frac{h^2}{3}\sum \frac{m^2}{\Delta}.$$

Dieser Ausdruck wird für reguläre Figuren und Parallelogramme ein Minimum, wenn der Scheitel über dem Schwerpunkte der Grundfläche liegt.

### Berechnung des flachen Klostergewölbes.

Die Projectionen der einzelnen Kappen sind wieder Dreiecke; die Ueberwölbung steht zu den Seiten der Grundfläche senkrecht, während ihre Axe letzteren parallel läuft.

Bezeichnet $p$ die auf die Seite $a$ des überwölbten Vielecks gefällte Senkrechte, ist ferner $X$ parallel $a$, $Y$ senkrecht $X$, so wird $\varrho_x = \infty$, somit das Volumen unter der Scheitelebene:

$$J = \frac{1}{2}\sum \frac{T_{xx}}{\varrho_y}, \quad T_{xx} = \frac{1}{2}\Delta . p^2, \quad \varrho_y = \frac{p^2}{2h},$$

daher

$$J = \tfrac{1}{2}\Delta h, \text{ wo } \Delta \text{ und } h \text{ die vorige Bedeutung besitzen.}$$

Für das von den Kämpferlinien aus überwölbte Volumen kommt $\frac{1}{2}F . h$. Weiter wird:

$$O = F + \frac{h^2}{4}\sum \frac{a^2}{\Delta}.$$

Existirt ein der Grundfläche F eingeschriebener Kreis, so ist für dessen Mittelpunkt $\frac{a}{\Delta}$ constant, daher $\sum \frac{a^2}{\Delta^2} d\Delta = 0$; in diesem Falle wird also $O$ ein Minimum, wenn der Scheitel über dem Mittelpunkte des der Grundfläche eingeschriebenen Kreises liegt. Dasselbe findet bei dem Parallelogramm statt, wenn die Projection des Scheitels in den Schwerpunkt der Grundfläche fällt.

---

* Ueber die praktische Anwendung dieses und anderer flacher Gewölbe siehe: Breymann, Allgemeine Bau-Constructionslehre, 3. Aufl., Thl. I S. 44 § 10.

# XVIII.

## Ueber die relative Bewegung eines Punktes in einem in continuirlicher Deformation begriffenen Medium.

Von

Dr. Bobylew,

Professor an der Universität in St. Petersburg.

Hierzu Taf. VII Fig. 2.

Der vorliegende Aufsatz enthält einige Verallgemeinerungen der Kinematik der relativen Bewegungen, namentlich einige Sätze über die relative Bewegung eines Punktes in Bezug auf ein veränderliches Medium.

§ 1. Denken wir uns ein veränderliches Medium $\Pi$, welches sich bei der Bewegung so deformirt, dass eine jede durch die Punkte desselben gezogene ununterbrochene, endlich gekrümmte und endlich gewundene Curve alle diese Charaktere im Laufe der Bewegung behält.

Es sei ferner ein Punkt $M$ gegeben, welcher in dem vom Medium $\Pi$ erfüllten Raume irgend eine absolute Bewegung hat, und das Medium $\Pi$ sei für diesen Punkt vollständig durchdringlich. In jedem Zeitpunkte der Bewegung wird der Punkt $M$ sich in einem Punkte des Raumes befinden und zugleich mit einem Punkte $\mu$ des Mediums zusammenfallen.

Unter absoluter Bewegung des Punktes $M$ verstehen wir ein mit der Zeit erfolgendes stetiges und continuirliches Fortschreiten des Punktes $M$ durch die Punkte des Raumes.

Dem entsprechend werden wir unter relativer Bewegung des Punktes in Bezug auf das Medium $\Pi$ das stetige und continuirliche Fortschreiten desselben durch die Punkte des Mediums verstehen.

Die durch alle Punkte des Mediums gezogene Curve, mit welchen der Punkt $M$ im Laufe seiner Bewegung zusammentrifft, heisst die Bahn der relativen Bewegung. Diese Bahn ändert im Laufe der Bewegung nicht nur ihre Lage im Raume, sondern auch ihre Gestalt.

§ 2. Jede continuirliche Bewegung und Deformation eines continuirlichen Mediums kann folgendermassen ausgedrückt werden:

$$1)\qquad \xi = \varphi_1(\alpha, \beta, \gamma, t), \quad \eta = \varphi_2(\alpha, \beta, \gamma, t), \quad \zeta = \varphi_3(\alpha, \beta, \gamma, t);$$

hier bedeuten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Anfangscoordinaten (für den Zeitpunkt $t=0$) eines beliebigen Punktes des Mediums, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die Coordinaten desselben Punktes für den Zeitpunkt $t$; $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ sind continuirliche Functionen von $\alpha, \beta, \gamma, t$; diese Functionen sollen derart sein, dass die Ausdrücke 1) für alle Punkte des Mediums gelten und ihre Bewegungen ausdrücken.

Die Gleichungen der Bahn der absoluten Bewegung eines beliebigen Punktes des Mediums werden wir erhalten, indem wir in den Ausdrücken 1) die $\alpha, \beta, \gamma$ den Anfangscoordinaten dieses Punktes gleich machen und aus diesen Ausdrücken die Zeit $t$ eliminiren.

§ 3. Die relative Bewegung des Punktes $M$ ist bekannt, sobald wir angeben können, mit welchen Punkten des Mediums derselbe in jedem beliebigen Zeitpunkte der Bewegung zusammentrifft.

Ist die absolute Bewegung des Punktes $M$ gegeben und durch die Formeln

$$2)\qquad x=f_1(t),\quad y=f_2(t),\quad z=f_3(t)$$

ausgedrückt, so bestimmen sich:

die Anfangscoordinaten $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ des Punktes $\mu_0$ des Mediums, mit welchem der Punkt $M$ im Zeitpunkte $t=0$ zusammentrifft;

die Anfangscoordinaten $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ des Punktes $\mu_1$ des Mediums, mit welchem der Punkt $M$ im Zeitpunkte $t_1$ zusammentrifft u. s. w.,

überhaupt die Anfangscoordinaten $\alpha_\tau, \beta_\tau, \gamma_\tau$ desjenigen Punktes $\mu_\tau$ des Mediums, mit welchem $M$ im Zeitpunkte $t=\tau$ zusammentrifft. Die Grössen $\alpha_\tau, \beta_\tau, \gamma_\tau$ müssen bestimmt werden aus den Gleichungen

$$3)\qquad \begin{cases} f_1(\tau)=\varphi_1(\alpha_\tau, \beta_\tau, \gamma_\tau, \tau), \\ f_2(\tau)=\varphi_2(\alpha_\tau, \beta_\tau, \gamma_\tau, \tau), \\ f_3(\tau)=\varphi_3(\alpha_\tau, \beta_\tau, \gamma_\tau, \tau), \end{cases}$$

welche bedeuten, dass in dem Zeitpunkte $\tau$ die Punkte $M$ und $\mu_\tau$ in einem Punkte des Raumes zusammenfallen.

Indem wir aus den Gleichungen 3) $\alpha_\tau, \beta_\tau, \gamma_\tau$ ermitteln, erhalten wir die Ausdrücke für $\alpha_\tau, \beta_\tau, \gamma_\tau$ als Functionen von $\tau$:

$$4)\qquad \alpha_\tau=F_1(\tau),\quad \beta_\tau=F_2(\tau),\quad \gamma_\tau=F_3(t),$$

welche für jeden Zeitpunkt gelten und die Anfangscoordinaten des zugehörigen Punktes $\mu_\tau$ bestimmen; sie müssen als explicite Ausdrücke der relativen Bewegung des Punktes $M$ im Medium $\Pi$ betrachtet werden.

Wird aus den Gleichungen 4) die Zeit $\tau$ eliminirt, so erhalten wir die Gleichungen der Curve, welche durch die ursprünglichen Orte aller jener Punkte $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu$ des Mediums gebildet ist, durch welche der Punkt während der Bewegung hindurchgeht; diese Curve stellt also die Lage der relativen Bahn im Raume für den Zeitpunkt $t=0$ vor.

§ 4. Während der Bewegung wird die relative Bahn durch dieselbe Reihe von Punkten $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_\tau$ des Mediums gebildet, durch welche sie im Zeitpunkte $t=0$ ging.

Die Bewegungen dieser Punkte werden durch die Ausdrücke 1) bestimmt, wenn wir in letzteren für $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Anfangscoordinaten dieser Punkte einführen; die Ausdrücke für die Bewegung des Punktes $\mu_\tau$ werden somit:

$$\text{A)}\quad \begin{cases} \xi = \varphi_1(F_1(\tau), F_2(\tau), F_3(\tau), t), \\ \eta = \varphi_2(F_1(\tau), F_2(\tau), F_3(\tau), t), \\ \zeta = \varphi_3(F_1(\tau), F_2(\tau), F_3(\tau), t), \end{cases}$$

wenn man $\tau$ als constant und $t$ als variabel betrachtet; nach Elimination von $t$ aus diesen Gleichungen A) werden die Gleichungen:

$$5)\qquad \Theta_1(\xi, \eta, \zeta, \tau) = 0, \quad \Theta_2(\xi, \eta, \zeta, \tau) = 0$$

der absoluten Bahn des Punktes $\mu_\tau$ erhalten.

Wird aber in denselben Ausdrücken A) $t$ als eine Constante betrachtet und werden dem $\tau$ alle möglichen Werthe gegeben, so werden die Ausdrücke A) die Coordinaten zur Zeit $t$ aller die Bahn der relativen Bewegung bildenden Punkte $\mu_0$, $\mu_1$, ... $\mu_\tau$ darstellen. Indem wir also $\tau$ aus den Gleichungen A) eliminiren, erhalten wir die Gleichungen:

$$6)\qquad \Phi_1(\xi, \eta, \zeta, t) = 0, \quad \Phi_2(\xi, \eta, \zeta, t) = 0$$

der Lage der relativen Bahn im Zeitpunkte $t$ im Raume.

Die Gleichungen A), bei constantem $t$ und variablem $\tau$, drücken diejenige absolute Bewegung aus, welche der Punkt $M$ gehabt hätte, wenn: 1. das Medium von Anfang an unbeweglich und unveränderlich wäre und diejenige Lage im Raume aufbewahrt hätte, in welche es während seiner wirklichen Bewegung zur Zeit $t$ gelangt war; und 2. wenn der Punkt $M$ dabei seine relative Bewegung in Bezug auf das Medium vollkommen beibehalten hätte, d. h. wenn in dieser fingirten Bewegung der Punkt $M$ mit einem jeden Punkte der Reihe $\mu_0$, $\mu_1$, ... $\mu_\tau$, ..., und zwar in denselben Momenten wie bei der wirklichen Bewegung zusammengefallen wäre.

§ 5. Die absolute Bewegung des Punktes $M$ kann als zusammengesetzt aus seiner relativen Bewegung in Bezug auf das Medium $\Pi$ und aus seiner Führungsbewegung* mit diesem Medium im Raume betrachtet werden.

Unter relativer Geschwindigkeit und relativer Beschleunigung des Punktes $M$ in einem beliebigen Zeitpunkte $t$ ist die Geschwindigkeit und die Beschleunigung derjenigen Bewegung zu verstehen, die der Punkt $M$ gehabt hätte, wenn die Führungsbewegung von diesem Zeitpunkte an aufgehört hätte.

Die Führungsbewegung wird im Zeitpunkte $t$ durch den in diesem Moment plötzlich eintretenden Stillstand des Mediums $\Pi$ aufgehoben.

Indem dann der Punkt $M$ seine relative Bewegung in Bezug auf das ruhende Medium fortsetzt, wird dieser Punkt $M$ diejenige fingirte Bewegung ausführen, von der wir am Ende des vorigen Paragraphen gesprochen haben.

* Mouvement d'entrainement.

Um also die relative Geschwindigkeit und die relative Beschleunigung des Punktes $M$ für den Zeitpunkt $t$ zu erhalten, muss man die Gleichungen A) im Sinne der fingirten Bewegung für den Zeitpunkt $t$ nehmen und aus ihnen die Geschwindigkeit und Beschleunigung dieser fingirten Bewegung für $\tau = t$ bestimmen.

Wir werden daher den Ausdruck für die Projection der relativen Geschwindigkeit $u$ auf die $X$-Axe finden, wenn wir von der ersten Gleichung A) die Derivirte nach $\tau$ nehmen und dann $\tau = t$ setzen; es wird:

$$u\cos(u, X) = \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} F'_1(t) + \frac{\partial \xi}{\partial \beta} F'_2(t) + \frac{\partial \xi}{\partial \gamma} F'_3(t)$$

oder

$$\text{7a)} \qquad u\cos(u, X) = \frac{\partial \xi}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial \xi}{\partial \beta}\frac{d\beta}{dt} + \frac{\partial \xi}{\partial \gamma}\frac{d\gamma}{dt}$$

und in derselben Weise:

$$\text{7b)} \qquad u\cos(u, Y) = \frac{\partial \eta}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial \eta}{\partial \beta}\frac{d\beta}{dt} + \frac{\partial \eta}{\partial \gamma}\frac{d\gamma}{dt},$$

$$\text{7c)} \qquad u\cos(u, Z) = \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial \zeta}{\partial \beta}\frac{d\beta}{dt} + \frac{\partial \zeta}{\partial \gamma}\frac{d\gamma}{dt};$$

hier sind:

$$\text{8)} \qquad \frac{d\alpha}{dt} = F'_1(t), \quad \frac{d\beta}{dt} = F'_2(t), \quad \frac{d\gamma}{dt} = F'_3(t).$$

Die Richtung der relativen Geschwindigkeit ist zur relativen Bahn tangentiell.

Um die Ausdrücke für die Projectionen der relativen Beschleunigung $\dot{u}$ auf die Coordinatenaxen zu erhalten, muss man die zweiten Derivirten von den Gleichungen A) nach $\tau$ nehmen und dann $\tau$ gleich $t$ setzen; wir erhalten:

$$\text{9a)} \qquad \begin{aligned} \dot{u}\cos(\dot{u}, X) = {} & \frac{\partial \xi}{\partial \alpha}\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{\partial \xi}{\partial \beta}\frac{d^2\beta}{dt^2} + \frac{\partial \xi}{\partial \gamma}\frac{d^2\gamma}{dt^2} \\ & + \frac{\partial^2 \xi}{\partial \alpha^2}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \frac{\partial^2 \xi}{\partial \beta^2}\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 + \frac{\partial^2 \xi}{\partial \gamma^2}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 \\ & + 2\left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial \beta\,\partial \gamma}\frac{d\beta}{dt}\frac{d\gamma}{dt} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial \gamma\,\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\gamma}{dt} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial \alpha\,\partial \beta}\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\beta}{dt}\right]. \end{aligned}$$

Die Ausdrücke für $\dot{u}\cos(\dot{u}, Y)$ und $\dot{u}\cos(\dot{u}, Z)$ enthalten partielle Differentialquotienten von $\eta$ und $\zeta$ anstatt solcher von $\xi$.

§ 6. Unter der Geschwindigkeit und der Beschleunigung der Führungsbewegung des Punktes $M$ im Zeitpunkte $t$ ist die Geschwindigkeit und die Beschleunigung derjenigen Bewegung zu verstehen, die der Punkt $M$ haben würde, wenn die relative Bewegung von diesem Zeitpunkte an aufgehoben wäre.

Die relative Bewegung hört im Zeitpunkte $t$ auf, wenn der Punkt $M$ von diesem Moment an in demjenigen Punkte des Mediums bleibt, nach welchem er während der wirklichen Bewegung zur Zeit $t$ gelangt ist.

Um also die Projectionen der Führungsgeschwindigkeit $w$ und der Führungsbeschleunigung $\dot{w}$ auf die Coordinatenaxen für den Zeitpunkt $t$ zu erhalten, muss man die erste und zweite Derivirte der Gleichungen A) nach $t$ nehmen und dann $\tau$ gleich $t$ setzen; man erhält:

$$10)\quad w\cos(w, X) = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad w\cos(w, Y) = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad w\cos(w, Z) = \frac{\partial \zeta}{\partial t};$$

$$11)\quad \dot{w}\cos(\dot{w}, X) = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad \dot{w}\cos(\dot{w}, Y) = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \quad \dot{w}\cos(\dot{w}, Z) = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}.$$

§ 7. Die Projectionen der absoluten Geschwindigkeit $v$ des Punktes $M$ auf die Coordinatenaxen sind gleich den Derivirten nach der Zeit von den Functionen 2), welche das Gesetz der Veränderung der Coordinaten $x$, $y$, $z$ des Punktes $M$ mit der Zeit ausdrücken.

Andererseits werden die Coordinaten $x$, $y$, $z$ durch die Functionen $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ [1)] ausgedrückt, wenn man in die letzteren $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$ anstatt $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ einführt. Es ergiebt sich:

$$\text{B)}\quad \left\{ \begin{aligned} v\cos(v, X) &= \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial \xi}{\partial \beta}\frac{d\beta}{dt} + \frac{\partial \xi}{\partial \gamma}\frac{d\gamma}{dt}, \\ v\cos(v, Y) &= \frac{dy}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial \eta}{\partial \gamma}\frac{d\gamma}{dt} + \frac{\partial \eta}{\partial \gamma}\frac{d\gamma}{dt}, \\ v\cos(v, Z) &= \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial \zeta}{\partial \beta}\frac{d\beta}{dt} + \frac{\partial \zeta}{\partial \gamma}\frac{d\gamma}{dt}. \end{aligned} \right.$$

Zieht man die oben angeführten Gleichungen 7) und 10) in Betracht, so drücken die Formeln B) folgende bekannte Abhängigkeit zwischen den Geschwindigkeiten $v$, $u$, $w$ aus:

Die Geschwindigkeit der absoluten Bewegung des Punktes $M$ in einem beliebigen Moment $t$ ist die geometrische Summe der gleichzeitigen relativen und Führungsgeschwindigkeit.

§ 8. Die Projectionen der absoluten Beschleunigung $\dot{v}$ des Punktes $M$ auf die Coordinatenaxen sind gleich den zweiten Derivirten der Coordinaten $x$, $y$, $z$ und können ausgedrückt werden entweder durch die zweiten Derivirten der Functionen $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ oder durch die zweiten totalen Differentialquotienten der Functionen $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ nach der Zeit, wobei $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ als Functionen $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$ zu betrachten sind. Daher erhalten wir mit Rücksicht auf die Ausdrücke 9) und 11) folgende Gleichungen:

$$\text{C, a)}\quad \begin{aligned} \dot{v}\cos(\dot{v}, X) &= \dot{w}\cos(\dot{w}, X) + \dot{u}\cos(\dot{u}, X) \\ &\quad + 2\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial \alpha\,\partial t}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial \beta\,\partial t}\frac{d\beta}{dt} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial \gamma\,\partial t}\frac{d\gamma}{dt}\right), \end{aligned}$$

$$\text{C, b)}\quad \begin{aligned} \dot{v}\cos(\dot{v}, Y) &= \dot{w}\cos(\dot{w}, Y) + \dot{u}\cos(\dot{u}, Y) \\ &\quad + 2\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial \alpha\,\partial t}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \beta\,\partial t}\frac{d\beta}{dt} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \gamma\,\partial t}\frac{d\gamma}{dt}\right), \end{aligned}$$

$$\text{C, c)}\quad \begin{aligned}\dot{v}\cos(\dot{v},Z) &= \dot{w}\cos(\dot{w},Z)+\dot{u}\cos(\dot{u},Z)\\ &\quad+2\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\alpha\,\partial t}\frac{d\alpha}{dt}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial\beta\,\partial t}\frac{d\beta}{dt}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial\gamma\,\partial t}\frac{d\gamma}{dt}\right).\end{aligned}$$

Man ersieht hieraus, dass die absolute Beschleunigung $\dot{v}$ als geometrische Summe folgender drei Beschleunigungen betrachtet werden kann:

1. $\dot{u}$ — der relativen Beschleunigung,
2. $\dot{w}$ — der Führungsbeschleunigung,
3. der entgegengesetzt genommenen Rückkehrbeschleunigung* $R$, deren Projectionen auf die Coordinatenaxen sich durch die Formeln

$$12)\quad \begin{cases} R\cos(R,X) = -\dfrac{2}{\varepsilon}\left(\dfrac{\partial\xi_1}{\partial\alpha}\dfrac{d\alpha}{dt}+\dfrac{\partial\xi_1}{\partial\beta}\dfrac{d\beta}{dt}+\dfrac{\partial\xi_1}{\partial\gamma}\dfrac{d\gamma}{dt}\right),\\ R\cos(R,Y) = -\dfrac{2}{\varepsilon}\left(\dfrac{\partial\eta_1}{\partial\alpha}\dfrac{d\alpha}{dt}+\dfrac{\partial\eta_1}{\partial\beta}\dfrac{d\beta}{dt}+\dfrac{\partial\eta_1}{\partial\gamma}\dfrac{d\gamma}{dt}\right),\\ R\cos(R,Z) = -\dfrac{2}{\varepsilon}\left(\dfrac{\partial\zeta_1}{\partial\alpha}\dfrac{d\alpha}{dt}+\dfrac{\partial\zeta_1}{\partial\beta}\dfrac{d\beta}{dt}+\dfrac{\partial\zeta_1}{\partial\gamma}\dfrac{d\gamma}{dt}\right)\end{cases}$$

ausdrücken lassen.

Hier bedeutet $\varepsilon$ die Zeiteinheit und $\xi_1$, $\eta_1$, $\zeta_1$ sind:

$$13)\quad \xi_1=\frac{\partial\varphi_1(\alpha,\beta,\gamma,t)}{\partial t}\varepsilon,\quad \eta_1=\frac{\partial\varphi_2(\alpha,\beta,\gamma,t)}{\partial t}\varepsilon,\quad \zeta_1=\frac{\partial\varphi_3(\alpha,\beta,\gamma,t)}{\partial t}\varepsilon.$$

Denkt man sich ausser dem Medium $\Pi$ noch ein anderes, ebenfalls veränderliches Medium $\Pi_1$, dessen Bewegung durch die Formeln 13) ausgedrückt wird, — denkt man sich ferner einen Punkt $M_1$, welcher in Bezug auf $\Pi_1$ dieselbe relative Bewegung

$$\alpha=F_1(t),\quad \beta=F_2(t),\quad \gamma=F_3(t)$$

wie $M$ in Bezug auf $\Pi$ ausführt, so ergiebt sich aus den Formeln 12), dass die Rückkehrbeschleunigung als verdoppelte, mit der Zeiteinheit dividirte und entgegengesetzt genommene Geschwindigkeit der relativen Bewegung des Punktes $M_1$ in Bezug auf $\Pi_1$ betrachtet werden kann.

Dies gilt jedoch nur, wenn die Formeln 13) die Bewegung eines solchen Mediums darstellen, welches continuirlich bleibt und dieselben Anfangsdimensionen wie das Medium $\Pi$ hat. Letzteres ist unentbehrlich, damit der Punkt $M_1$ stets innerhalb des Mediums $\Pi_1$ bleibe. Im Falle die Formeln 13) diesen Bedingungen nicht entsprechen, muss die Bedeutung von $R$ für jeden speciellen Fall besonders bestimmt werden.

Beispiel 1. Das bewegliche Medium $\Pi$ sei zwischen zwei parallelen Ebenen $x=+A$ und $x=-A$ so enthalten, dass es in der Richtung der

* Diese Beschleunigung entspricht der „Accélération centrifuge composée", welche in der Kinematik von Somoff (übersetzt von A. Ziwet) Rückkehrbeschleunigung genannt ist.

$X$-Axe eine Dicke $2A$ hat; die anderen Dimensionen des Mediums sind unbegrenzt. Seine Bewegung sei durch die Formeln:

$$\xi = \alpha, \quad \eta = \beta + B(A^2 - \alpha^2)\frac{t}{A^2}, \quad \zeta = \gamma$$

und die absolute Bewegung des Punktes $M$ durch die Formeln:

$$x = kt - A, \quad y = B(3A - kt)\frac{kt^2}{3A^2}, \quad z = 0$$

gegeben.

In diesem Falle findet man die Gleichungen:

$$\alpha = kt - A, \quad \beta = -B(3A - 2kt)\frac{kt^2}{3A^2}, \quad \gamma = 0$$

als explicite Ausdrücke der relativen Bewegung; die Gleichungen A) werden hier:

$$\xi = k\tau - A, \quad \zeta = 0,$$
$$\eta = B\left((2A - k\tau)\frac{k\tau t}{A^2} - (3A - 2k\tau)\frac{k\tau^2}{3A^2}\right);$$

die Bahnen 5) der Punkte $\mu_0, \mu_1, \ldots$ sind hier die der $Y$-Axe parallelen Geraden:

$$\xi = k\tau - A, \quad \zeta = 0$$

und die Gleichungen 6) der Lage der relativen Bahn im Raume zum Zeitpunkte $t$ werden sein:

$$\eta = \frac{B}{A^2}(A + \xi)\left[(A - \xi)t - (A + \xi)\frac{(A - 2\xi)}{3k}\right], \quad \zeta = 0.$$

In Taf. VII Fig. 2 sind die Lagen der relativen Bahn für die Zeitmomente $t = 0,\ t_1,\ 2t_1,\ 3t_1,\ 4t_1,\ 5t_1,\ 6t_1\ \left(t_1 = \frac{A}{3k}\right)$ abgebildet; die Curve $AED$ stellt die Bahn der absoluten Bewegung des Punktes $M$ vor.

Die relative Geschwindigkeit ist in diesem Falle stets der $X$-Axe parallel und der Constanten $k$ gleich, die relative Beschleunigung ist der $Y$-Axe parallel und ändert ihre Grösse im Laufe der Zeit nach dem Gesetze:

$$\dot{u} = \frac{2Bk}{A^2}(kt - A).$$

Die Rückkehrbeschleunigung ist ebenfalls der $Y$-Axe parallel und hat die Grösse der verdoppelten relativen Beschleunigung.

Die Ausdrücke 13) werden in diesem Beispiele:

$$\xi_1 = 0, \quad \eta_1 = B\left(1 - \frac{\alpha^2}{A^2}\right)\varepsilon, \quad \zeta_1 = 0.$$

Diese Formeln können in keiner Weise eine stetige Bewegung eines solchen Mediums ausdrücken, welches im Anfange der Bewegung denselben Theil des Raumes einnimmt, wie das Medium $\Pi$. Somit ist die im letzten Paragraphen angeführte allgemeine Deutung von $R$ in unserem jetzigen Falle unanwendbar.

Beispiel 2. Der Punkt $M$ habe eine beliebige absolute Bewegung 1) und das Medium deformire sich nach dem Gesetze:

$$14)\quad \begin{cases} \xi = \alpha\psi_1\lambda_1 + \beta\psi_2\mu_1 + \gamma\psi_3\nu_1, \\ \eta = \alpha\psi_1\lambda_2 + \beta\psi_2\mu_2 + \gamma\psi_3\nu_2, \\ \zeta = \alpha\psi_1\lambda_3 + \beta\psi_2\mu_3 + \gamma\psi_3\nu_3; \end{cases}$$

hier bedeuten:

$$\psi_1 = e^{\int_0^t \varkappa_1 dt}, \quad \psi_2 = e^{\int_0^t \varkappa_2 dt}, \quad \psi_3 = e^{\int_0^t \varkappa_3 dt}$$

und $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ irgendwelche continuirlichen Functionen der Zeit; $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$, $\nu_1$, $\nu_2$, $\nu_3$ die Cosinusse der Winkel, welche drei unter einander rechtwinklige, sich um den Ursprung $O$ drehende Axen $OX'$, $OY'$, $OZ'$ mit den festen Axen $OX$, $OY$, $OZ$ bilden. Diese Cosinusse, welche unter sich durch die sechs bekannten Relationen verbunden sind, können durch trigonometrische Functionen dreier Winkel $\varphi$, $\vartheta$, $\psi$ ausgedrückt werden; die Winkel $\varphi$, $\vartheta$, $\psi$ seien in unserem Falle als irgendwelche continuirliche Functionen der Zeit gegeben.

Indem man die Relationen, durch welche die Cosinusse $\lambda_1$, $\lambda_2$, ... $\nu_3$ unter sich verbunden sind, berücksichtigt, wird man leicht aus den gegebenen Ausdrücken 14) folgende Formeln finden:

$$15)\quad \begin{cases} \alpha\psi_1 = \xi\lambda_1 + \eta\lambda_2 + \zeta\lambda_3 = \varrho\cos(\varrho, X'), \\ \beta\psi_2 = \xi\mu_1 + \eta\mu_2 + \zeta\mu_3 = \varrho\cos(\varrho, Y'), \\ \gamma\psi_3 = \xi\nu_1 + \eta\nu_2 + \zeta\nu_3 = \varrho\cos(\varrho, Z'); \end{cases}$$

$\varrho$ bedeutet hier die Grösse und Richtung des Radiusvectors desjenigen Punktes, welchem die Coordinaten $\xi$, $\eta$, $\zeta$ zugehören.

Setzt man die Functionen $f_1$, $f_2$, $f_3$ statt $\xi$, $\eta$, $\zeta$ in die Formeln 15) ein, so erhält man die expliciten Ausdrücke der relativen Bewegung:

$$16)\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{\psi_1}(\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) + \lambda_3 f_3(t)), \\ \beta = \dfrac{1}{\psi_2}(\mu_1 f_1(t) + \mu_2 f_2(t) + \mu_3 f_3(t)), \\ \gamma = \dfrac{1}{\psi_3}(\nu_1 f_1(t) + \nu_2 f_2(t) + \nu_3 f_3(t)). \end{cases}$$

Die Ausdrücke für die Projectionen von $u$ auf die Axen $X$, $Y$, $Z$ werden in unserem Falle:

$$u\cos(u, X) = \psi_1\frac{d\alpha}{dt}\lambda_1 + \psi_2\frac{d\beta}{dt}\mu_1 + \psi_3\frac{d\gamma}{dt}\nu_1;$$

hieraus folgt, mit Rücksicht auf die Bedeutung der Cosinusse $\lambda_1$, $\lambda_2$, ... $\nu_3$:

$$17)\quad \psi_1\frac{d\alpha}{dt} = u\cos(u, X'), \quad \psi_2\frac{d\beta}{dt} = u\cos(u, Y'), \quad \psi_3\frac{d\gamma}{dt} = u\cos(u, Z').$$

Die Ausdrücke der Projectionen der Geschwindigkeit eines Punktes des Mediums auf die Axen $X$, $Y$, $Z$ sind:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \alpha \frac{d(\psi_1 \lambda_1)}{dt} + \beta \frac{d(\psi_2 \mu_1)}{dt} + \gamma \frac{d(\psi_3 \nu_1)}{dt}$$

oder, mit Rücksicht auf die Formeln 15):

18a)
$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{d(\psi_1 \lambda_1)}{\psi_1\, dt} \varrho \cos(\varrho, X') + \frac{d(\psi_2 \mu_1)}{\psi_2\, dt} \varrho \cos(\varrho, Y') + \frac{d(\psi_3 \nu_1)}{\varphi_3\, dt} \varrho \cos(\varrho, Z'),$$

woraus ferner:

19)
$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} &= a_{11}\xi + (a_{12} - r)\eta + (a_{13} + q)\zeta, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= (a_{12} + r)\xi + a_{22}\eta + (a_{23} - p)\zeta, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= (a_{13} - q)\xi + (a_{23} + p)\eta + a_{33}\zeta. \end{aligned}\right.$$

Hier bedeuten:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \varkappa_1 \lambda_1^2 + \varkappa_2 \mu_1^2 + \varkappa_3 \nu_1^2, \\ a_{22} &= \varkappa_1 \lambda_2^2 + \varkappa_2 \mu_1^2 + \varkappa_3 \nu_2^2, \\ a_{33} &= \varkappa_1 \lambda_3^2 + \varkappa_2 \mu_3^2 + \varkappa_3 \nu_3^2, \\ a_{12} &= \varkappa_1 \lambda_1 \lambda_2 + \varkappa_2 \mu_1 \mu_2 + \varkappa_3 \nu_1 \nu_2, \\ a_{23} &= \varkappa_1 \lambda_2 \lambda_3 + \varkappa_2 \mu_2 \mu_3 + \varkappa_3 \nu_2 \nu_3, \\ a_{31} &= \varkappa_1 \lambda_3 \lambda_1 + \varkappa_2 \mu_3 \mu_1 + \varkappa_3 \nu_3 \nu_1, \\ p &= \lambda_2 \lambda'_3 + \mu_2 \mu'_3 + \nu_2 \nu'_3 = -(\lambda_3 \lambda'_2 + \mu_3 \mu'_2 + \nu_3 \nu'_2), \\ q &= \lambda_3 \lambda'_1 + \mu_3 \mu'_1 + \nu_3 \nu'_1 = -(\lambda_1 \lambda'_3 + \mu_1 \mu'_3 + \nu_1 \nu'_3), \\ r &= \lambda_1 \lambda'_2 + \mu_1 \mu'_2 + \nu_1 \nu'_2 = -(\lambda_2 \lambda'_1 + \mu_2 \mu'_1 + \nu_2 \nu'_1). \end{aligned}$$

Für die Ausdrücke der Projectionen der Rückkehrbeschleunigung auf die Axen $X$, $Y$, $Z$ ergiebt sich:

$$R\cos(R, X) = -2\left[\frac{d(\psi_1 \lambda_1)}{dt}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d(\psi_2 \mu_1)}{dt}\frac{d\beta}{dt} + \frac{d(\psi_3 \nu_1)}{dt}\frac{d\gamma}{dt}\right]$$

oder, mit Rücksicht auf die Formeln 17):

19)
$$R\cos(R, X) = -2\left[\frac{d(\psi_1 \lambda_1)}{\psi_1\, dt} u \cos(u, X') + \frac{d(\psi_2 \mu_1)}{\psi_2\, dt} u \cos(u, Y') + \frac{d(\psi_3 \nu_1)}{\psi_3\, dt} u \cos(u, Z')\right].$$

Der eingeklammerte Theil dieser Formel unterscheidet sich von dem zweiten Theile der Gleichung 18a) darin, dass in 19) anstatt der Projectionen von $\varrho$ diejenigen von $u$ vorkommen; hiermit drückt sich in diesem Beispiele die Rückkehrbeschleunigung durch die verdoppelte und entgegengesetzt genommene Geschwindigkeit desjenigen Mediumpunktes aus, dessen Radiusvector die relative Geschwindigkeit darstellt. Mit anderen Worten hat $R$ in diesem Beispiele dieselbe Bedeutung, wie im Falle eines unveränderlichen Mediums.

---

# Kleinere Mittheilungen.

## XX. Wann besitzt eine kubische Parabel eine Directrix?*

1. Nach Analogie** mit der ebenen Parabel könnte man erwarten, dass auch die räumliche (kubische) Parabel eine „Directrix“ besässe, d. h. dass eine Gerade existirte als Ort der Punkte, von denen Tripel je zu einander senkrechter Ebenen (Osculationsebenen) an die Parabel gingen.

Dies ist aber im Allgemeinen nicht der Fall, wie zunächst geometrisch so zu ersehen ist.

Eine kubische Parabel hat bekanntlich (vergl. z. B. Schröter, Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung, S. 307) die Eigenschaft, dass, wenn man durch einen beliebigen Raumpunkt zu den Tangenten und Ebenen der Parabel Parallel-Strahlen und Ebenen legt, diese die Kanten und Ebenen eines Kegels*** (zweiter Ordnung) sind.

Existirte nun im Allgemeinen eine Directrix der Parabel, so müsste dieser Kegel ein gleichseitiger sein, d. h. es würden ihm unendlich viele Tripel je zu einander senkrechter Tangentialebenen angehören.

Es ist aber bekanntlich (vergl. z. B. Schröter, Theorie etc., S. 76, 78 flgg.) eine Bedingung erforderlich, damit ein Kegel ein, und damit zugleich unendlich viele solcher Ebenentripel besitze.

Dass unser Kegel aber in der That ein ganz beliebiger ist (im Allgemeinen), ist leicht zu erkennen.

---

* Diese Note, ein Wiederabdruck aus den „Mathematisch-naturwissenschaftlichen Mittheilungen von Dr. O. Böklen“ (Heft 1, erschienen Ostern 1884), bezieht sich auf die in dieser Zeitschrift (Jahrg. 1884, Heft 4) publicirte Arbeit des Herrn Dr. Böklen, der bei seinen Arbeiten über das Ellipsoid auf kubische Parabeln mit Directrix stiess und dabei die im Titel gestellte Frage gelöst zu wissen wünschte.

** In der That besitzt ja das zweite räumliche Gebilde, das der ebenen Parabel entspricht, das Paraboloid, eine „Directrix“, d. i. eine Ebene als Ort der Punkte, von denen Tripel je zu einander senkrechter Ebenen (Tangentialebenen) an das Paraboloid gehen (vergl. Reye, Geometrie der Lage II, S. 268 Nr. 37).

*** Die Punkte des Kegelschnittes, in dem dieser Kegel die unendlich ferne Ebene trifft, sind die Spuren der Tangenten der Parabel und die Tangenten dieses Kegelschnittes die Spuren der Ebenen der Parabel. Denn die Parabel osculirt ja die unendlich ferne Ebene.

Es sei ein solcher *beliebig* gegeben*.

Dann lege man irgend eine Ebene, doch so, dass sie irgend einer Kegelebene parallel ist, und verzeichne in dieser Ebene irgend eine Parabel. Dann sind die sämmtlichen Ebenen, die diese ebene Parabel berühren und einer Kegelebene parallel sind, die Schmiegungsebenen einer kubischen Parabel, zu der der Kegel in der oben definirten Beziehung steht.

2. Umgekehrt ist aber die eine Bedingung, die erforderlich ist, damit unser Kegel (er heisse einfach „Parallelkegel der Parabel") ein, und damit unendlich viele Tripel von je auf einander senkrechten Ebenen besitze, auch *hinreichend,* damit die Parabel eine Directrix besitzt.

Man weiss (vergl. z. B. Reye, Geometrie der Lage I, S. 122), dass, wenn ein Kegel (zweiter Ordnung) diese Eigenschaft besitzt, seine Ebenen eine „Involution dritter Ordnung" bilden, d. h. sie sind so in Tripel getheilt, dass jeder Ebene immer die beiden anderen zugeordnet sind, die mit ihr eines der (orthogonalen) Tripel bilden.

Sodann sind die Ebenen des Kegels vermöge ihrer Construction den Ebenen der Parabel projectivisch zugeordnet, mithin bilden auch die Tripelebenen der Parabel eine solche Involution.

Dann aber liegen nach einem allgemeinen Satze (vergl. z. B. meine Schrift „Apolarität und rationale Curven" § 14) die Ecken dieser Ebenentripel immer in einer *Geraden.*

Dies ist dann die Directrix der Parabel.

### Analytische Behandlung.

3. Eine kubische Raumcurve (als Curve dritter Classe) kann immer dargestellt werden in der Form:

$$1) \qquad u\varphi(\lambda)=f_1(\lambda), \quad v\varphi(\lambda)=f_2(\lambda), \quad w\varphi(\lambda)=f_3(\lambda).$$

Hier sind die $u$, $v$, $w$ die Coordinaten einer Ebene der Curve, die $f$ und $\varphi$ ganze Ausdrücke dritten Grades in $\lambda$.

Jeder Ebene der Curve kommt dann ein Werth $\lambda$ zu und umgekehrt.

Soll die Curve eine kubische Parabel sein, so muss die unendlich ferne Ebene

$$2) \qquad u=0, \quad v=0, \quad w=0$$

eine Ebene der Parabel sein. Es komme ihr dann der Werth $\lambda=\alpha$ zu, so müssen die drei $f$ den Factor $\lambda-\alpha$ gemein haben, wie folgt:

---

* Die folgende Construction ist nur das Dualistische zu der bekannten Erzeugung der kubischen Raumcurven mittels zweier Kegel, die eine Kante gemein haben.

$$3)\quad \begin{cases} u\varphi(\lambda) = (\lambda-\alpha)(a_{00}\lambda^2 + a_{01}\lambda + a_{02}) = (\lambda-\alpha)\, g_1(\lambda), \\ v\varphi(\lambda) = (\lambda-\alpha)(a_{10}\lambda^2 + a_{11}\lambda + a_{12}) = (\lambda-\alpha)\, g_2(\lambda), \\ w\varphi(\lambda) = (\lambda-\alpha)(a_{20}\lambda^2 + a_{21}\lambda + a_{22}) = (\lambda-\alpha)\, g_3(\lambda). \end{cases}$$

Dann sind die Ebenen des Parallelkegels, dessen Spitze im Coordinatenursprung liegt, repräsentirt durch

$$4)\qquad xu + yv + zw \equiv xg_1(\lambda) + yg_2(\lambda) + zg_3(\lambda) = 0$$

oder auch durch

$$5)\qquad u : v : w = g_1(\lambda) : g_2(\lambda) : g_3(\lambda).$$

Die Elimination von $\lambda$ liefert (vergl. meine Schrift „Apolarität etc.“ S. 43 oder auch meine Note im Württembergischen Correspondenzblatt 1883):

$$6)\qquad \begin{aligned} u^2(A_{00}A_{02} - A_{10}^2)^* + v^2(A_{10}A_{12} - A_{11}^2) + w^2(A_{20}A_{22} - A_{21}^2) \\ + uv() + uw() + vw() = 0. \end{aligned}$$

Soll nun dieser Parallelkegel 6) die Bedingung erfüllen, ein Tripel von je auf einander senkrechten Ebenen zu besitzen, so besteht diese bekanntlich (vergl. z. B. Hesse, Analytische Raumgeometrie) im Verschwinden der Summe der drei Coefficienten von $u^2$, $v^2$, $w^2$; sie lautet also:

$$7)\qquad A_{00}A_{02} + A_{10}A_{12} + A_{20}A_{22} = A_{01}^2 + A_{11}^2 + A_{21}^2.$$

4. Wir wollen nunmehr die Parabel nebst ihrer Directrix und der Involution der Orthogonaltripel in einer *canonischen* Form analytisch darstellen.

Es mögen nämlich die drei Coordinatenebenen

$$8)\qquad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

eines der Orthogonaltripel bilden. Dann muss die Directrix durch den Ursprung hindurchgehen, also in der Form dargestellt sein:

$$9)\qquad x : y : z = \alpha : \beta : \gamma \quad \text{oder} \quad x = \varrho\alpha, \quad y = \varrho\beta, \quad z = \varrho\gamma,$$

wo $\varrho$ veränderlich ist.

Den drei Coordinatenebenen als Ebenen der Parabel mögen die resp. Werthe $\lambda = \lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ entsprechen.

Dann ist die kubische Parabel, wie leicht zu erkennen, folgender beider Darstellungen fähig:

$$10)\qquad u = \frac{a}{\lambda - \lambda_1}, \qquad v = \frac{b}{\lambda - \lambda_2}, \qquad w = \frac{c}{\lambda - \lambda_3},$$

$$11)\qquad x = \mathsf{A}(\lambda - \lambda_1)^3, \quad y = \mathsf{B}(\lambda - \lambda_2)^3, \quad z = \Gamma(\lambda - \lambda_3)^3 {}^{**}.$$

Dabei ist der unendlich fernen Ebene der Werth $\lambda = \infty$ beigelegt.

---

* Die $A_{ik}$ sind, wie üblich, die zu den Elementen $a_{ik}$ der Determinante der letzteren gehörigen Unterdeterminanten.

** Eine einfache Rechnung, nach der Clebsch'schen Regel (vergl. Clebsch, „Ueber die rationalen Curven“, Crelle Bd. 63) ausgeführt, liefert zwischen den $a$, $b$, $c$ und $\mathsf{A}$, $\mathsf{B}$, $\Gamma$ die Beziehungen:

$$a\mathsf{A} = b\mathsf{B} = c\Gamma = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_1)} = \frac{1}{D}.$$

Wir suchen die Grössen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, d. i. die Neigungen der Directrix gegen die Coordinatenaxen zu bestimmen.

Vom unendlich fernen Punkte der Directrix, dessen Gleichung ist:

$$12)\qquad u\alpha + v\beta + w\gamma = 0,$$

gehen (ausser der unendlich fernen Ebene) noch zwei weitere (zu einander senkrechte) Ebenen an die Parabel.

Die zugehörigen Werthe $\lambda$ für sie erhält man durch Combination von 12) und 10):

$$13)\qquad \frac{a\alpha}{\lambda-\lambda_1}+\frac{b\beta}{\lambda-\lambda_2}+\frac{c\gamma}{\lambda-\lambda_3}=0.$$

Andererseits ist die Bedingung, dass irgend zwei Ebenen ($u$, $v$, $w$; $u_1$, $v_1$, $w_1$) der Parabel (mit den Werthen $\lambda$, $\mu$) auf einander senkrecht stehen, gegeben durch

$$14)\qquad \begin{aligned} &uu_1+vv_1+ww_1=0\\ &\equiv\frac{a^2}{(\lambda-\lambda_1)(\mu-\lambda_1)}+\frac{b^2}{(\lambda-\lambda_2)(\mu-\lambda_2)}+\frac{c^2}{(\lambda-\lambda_3)(\mu-\lambda_3)}.\end{aligned}$$

Hält man hier $\mu$ fest, so ergeben sich aus dieser Gleichung gerade *die* beiden Ebenen, die mit der Ebene $\mu$ ein Orthogonaltripel bilden (d. h. „jede Schnittlinie zweier aufeinander senkrechter Ebenen der Parabel *muss die Directrix treffen*").

---

Uebrigens zeigen die Gleichungen 10), 11) sofort das weitere Resultat, dass für jeden Punkt der Parabel die Producte

$$xu^2,\quad yv^2,\quad zw^2$$

je denselben Werth haben, und zwar ist

$$\frac{xu^2}{a^2}=\frac{yv^2}{b^2}=\frac{zw^2}{c^2}=\frac{1}{D^2}.$$

Mit Rücksicht auf die Werthe der Constanten $\alpha, \beta, \gamma$ in 9) [vergl. 16)] haben wir also:

„Für jeden Punkt der kubischen Parabel (für welche die drei Coordinatenebenen ein Ebenentripel bilden) sind die Producte $xu^2$, $yv^2$, $zw^2$ *constant* und verhalten sich zu einander, wie die *Quadrate der Cosinus der Neigungswinkel der Directrix gegen die Coordinatenaxen.*"

Aus den Gleichungen 10) fliesst sofort eine sehr einfache Construction einer kubischen Parabel mit Directrix.

„Man nehme eine beliebige Gerade an. Eine jede Ebene durch dieselbe schneidet aus den Coordinatenaxen, vom Anfangspunkt an gerechnet, drei Abschnitte

$$e_1,\ e_2,\ e_3$$

aus."

Construirt man die reciproken Abschnitte

$$\frac{1}{e_1},\ \frac{1}{e_2},\ \frac{1}{e_3}$$

und verbindet deren drei Endpunkte durch eine Ebene, so umhüllen alle diese Ebenen eine kubische Parabel mit Directrix, für die das Coordinatenebenentripel ein Orthogonal-Schmiegungsebenentripel ist.

Jetzt nehme man für die Ebene $\mu$ die unendlich ferne Ebene, für die $\mu = \infty$ ist. Dann muss für diesen Werth von $\mu$ die quadratische Gleichung 14) mit 13) identisch sein.

Für diesen Werth ($\mu = \infty$) geht aber 14) über in:

$$15) \qquad \frac{a^2}{\lambda - \lambda_1} + \frac{b^2}{\lambda - \lambda_2} + \frac{c^2}{\lambda - \lambda_3} = 0.$$

Sollen die Gleichungen 15) und 13), und zwar für ganz beliebige Werthe von $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ identisch sein, so ist dazu ***nothwendig und hinreichend,*** dass

$$16) \qquad a:b:c = \alpha:\beta:\gamma.$$

Daher stellt sich die Involution aller Orthogonalebenentripel der Parabel vermöge der Gleichungen 10) und 15) so dar:

$$O = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) + K\{a^2(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) + b^2(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_3) + c^2(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\},$$

wo $k$ variabel ist.

Endlich ist noch zu bemerken, dass, wenn man statt des alten rechtwinkligen Coordinatensystems $\begin{pmatrix} x, & y, & z \\ u, & v, & w \end{pmatrix}$ irgend ein neues rechtwinkliges $\begin{pmatrix} X, & Y, & Z \\ U, & V, & W \end{pmatrix}$ mittels bekannter Formeln einführt, und drückt dann in 10) resp. 11) die alten Coordinaten durch die neuen aus, so erhält man die ***allgemeinste*** Darstellung einer kubischen Parabel mit Directrix.

Die Rechnung ist dabei so einfach, dass sie hier unterbleiben möge.

Tübingen, 1883. Dr. F. Meyer.

---

## XXI. Die Ortsfläche der Spitzen gleichseitiger Tetraeder zu gegebener Geraden der Zeichenebene.

(Hierzu Taf. VII Fig. 8.)

Angeregt durch den Aufsatz des Herrn Dr. A. Schmidt über gleichseitige Tetraeder*, erlaube ich mir, nachstehend einen Ueberblick über die Ortslinien der Spitzen solcher Vierflache zu bieten, welche einer gegebenen Strecke als Basis entsprechen.

Zu einem Dreieck $ABC_1$ der Zeichenebene findet man die Spitzen congruenter Dreiecke ($C_1 d_2 A$, $d_1 C_1 B$) auf dem Umkreise von $ABC_1$ in $|Bd_2 \| AC_1|$, $|Ad_1 \| BC_1|$ und erhält durch Drehung jener beiden Dreiecke um $|AC_1, BC_1|$ die Spitze ($D_1$) zum gleichseitigen Tetraeder, dessen Grund-

* Zeitschr. f. Math. u. Phys., Jahrg. 1884 S. 321.

fläche $ABC_1$. Die Spuren $|d_1 d'_1, d_2 d'_2|$ der Lothebenen, in welchen sich $(d_1, d_2)$ bewegen, können auch mit Hilfe der Durchmesser $|Ad'_1, Bd'_2|$ des Umkreises bestimmt werden, indem $(d'_1, d'_2)$ auf den Senkrechten $|AC_0, BD_0|$ jenen Spuren angehören. Verschiebung von $(C_1)$ auf $|BC|$ hat Fortrücken des Mittelpunktes $(o_1)$ auf der senkrecht Halbirenden $|Oy|$ zur Folge, was anzeigt, dass die Büschel $A|Oo_0 \infty o_1|B$ auf $|BD_0, AC_0|$ perspectivische Punktreihen beschreiben: $|BD_{01} \infty d'_1 \overline{\wedge} AC_0 \infty d'_2|$, deren Mittelpunkt $(AB_\infty)$ ist.

Die Umkreise zu den Dreiecken $ABC_i$ über der gemeinsamen Grundlinie $|AB|$ bilden ein Büschel mit den Grundpunkten $(A, B)$. Da $|d'_1 d_1 \perp BC_1, d'_2 d_2 \perp AC_1|$ mit einander Winkel bilden, welche zu $A\hat{C}_1 B$ supplementär sind, so erscheinen die Spitzen $(D_1)$, welche gleichen Winkeln $A\hat{C}_1 B$ entsprechen, in einem Kreise durch $(d'_1, d'_2)$ und gleich dem Umkreise $AC_1B$.

$|d'_1 D_1| \perp |AC_1|$ geht für $(C_1)$ in $|C_0 D_0 \| AB|$ über, für $(C) = (AC \perp BC)$ dagegen in $|AE_1 \| BC|$. Da nun das Parallelstrahlenbüschel $BE_\infty|BD_{01} \infty d'_2|$ mit der Axe der Parabel parallel ist, welche die Strahlen $|AE, C_0 D_{01}, \infty, d'_1 D_1|$ umhüllen, beide Büschel unter sich projectivisch sind und in $(D_{01})$ entsprechende Punkte zusammenfallen, so wird $|ED_{01} \infty D_1|$, ihr perspectivischer Schnitt, ebenfalls eine Tangente jener Parabel sein.

Man kann $|D_{01} E_1|$ auch als Ort der Theilpunkte von gleichwinkligen Bogenabschnitten erkennen, auf einer Kreisreihe, welche dem Büschel der Umkreise congruent ist und die $(D_i)$ enthält, die gleichen Winkeln $A\hat{C}_i B$ entsprechen.

$(D_{01}, E_1)$ bezeichnen Grenzlagen für $|D_i|$, indem sie den rechtwinkligen Dreiecken $AC_0B$, $ACB$ entsprechen.

Die Parallele zu $|BC_1|$ durch $(D_{01})$ ergiebt auf $|AB|$ den Brennpunkt $(F)$ der von den Ortsgeraden $|D_{0i} E_i|$ umhüllten Hyperbel, da $|BD_{01} \perp AB, BE_1 \| x_1 h_1 \perp D_{01} F \| BC_1|$, folglich: $|Fh_1 C \perp D_{01} x_1|$. Die Brennweite der Hyperbel beträgt demnach $\frac{1}{2} AB$.

Während $(C_i)$ die $|BC|$ durchläuft, bewegen sich die Spitzen $(D_1)$ in der Lothebene $[D_{01} E_1]$. Da das rechtwinklige Dreieck, wie gezeigt worden, die Grenze für die Möglichkeit gleichseitiger Tetraeder bildet, so finden sich reelle Spitzen nur zwischen $(D_{01}, E_1)$ orthogonal-symmetrisch zu dieser Spur. Aus der Congruenz der rechtwinkligen Dreiecke $AE_1B$, $C_0 \perp D_{01}$ ergiebt sich, dass der Schnitt $(m_1)$ von $|BC, D_{01} E_1|$ die Mitte von $|D_{01} E_1|$ bezeichnet Da zugleich der $(m_1)$ entsprechende $(d'_{2m})$ in die Mitte der Strecke $|D_{01} B|$ fällt und die Höhen der Basisdreiecke $AC_1B$ in Bezug auf den festen Strahl $BC$ stets dieselben bleiben, so stellt der Ort der Spitzen $(D)$ den Schnitt der Lothebene $[D_{01} E_1]$ mit einem Rotationscylinder der Axe $|BC|$ und vom Radius $|BE_1|$ dar, welcher stets eine Ellipse ist.

Die Ortsfläche der Spitzen gleichseitiger Tetraeder, welche die Bildebene zur gemeinsamen Grundfläche und $|AB|$ zur Kante haben, wird also durch lothrechte Ellipsen erzeugt, deren Spuren eine Hyperbel umhüllen.

Die symmetrische Anlage der Zeichnung (Taf. VII Fig. 3) weist darauf hin, dass in den Lothebenen $[D_{01}D_{01}{}^*, D_{02}D_{02}{}^*]$ jedesmal noch eine zweite Ortsellipse liege $[C'D_{01}{}^*, CD_{02}{}^*]$, welche den Strahlen $|AE_1, AE_2|$ entsprechen und mit $[D_{01}E_1, D_{02}E_2]$ sich in den Lothen $|x_1, x_2|$ der $[AB]$ schneiden; denn jene congruenten Ellipsen stehen sich wechselweise in Kegeln der Spitze $(O)$ symmetrisch gegenüber und die Lothebene $[AB]$ ist eine Symmetrieebene der beiden Kegel zugleich.

Die Symmetrie zeigt ferner, dass die Endpunkte der Lothe $|x|$ eine Ellipse bilden, welche durch den Schnitt der involutorischen Büschel $(A, B)$ in $[AB]$ erzeugt wird; deren eine Axe $|AB|$, während die andere durch den Schnitt der Lothebenen zu den Asymptoten der Grundhyperbel bezeichnet ist. Diese Schnittcurve begrenzt mit dem Hauptkreise über $|AB|$ einen mittlern Raum, welcher von den beiderseits zum Kreise sich senkenden Ellipsenbogen eingeschlossen ist.

Von der Gestalt des röhrenförmigen Restes erhält man eine genauere Vorstellung durch den Ort der Mittelpunkte der erzeugenden Ellipsen. Derselbe geht aus dem Schnitte der Büschel $(B, A)(C, C', \ldots)$ mit dem Tangentenbüschel $\|D_{01}E_1, D_{02}E_2, \ldots\|$ hervor und verläuft symmetrisch zu den Axen $|AB, y|$, von welchen die erstere Rückkehrtangente, die letztere Asymptote ist. Diese Mittelpunktscurve bezeichnet die Culminationen der erzeugenden Ellipsen, während die Radien vectoren deren Brennweiten darstellen.

Unsere Zeichnung gewährt somit einen Ueberblick über das Bereich der Spitzen gleichseitiger Tetraeder, deren Grundfläche in der Zeichenebene liegt und in welchen zwei Gegenkanten von gegebener Länge sind.

Hottingen-Zürich. F. Graberg.

---

## XXII. Notiz über Ungleichungen.

In den Lehrbüchern und Beispielsammlungen für Elementarmathematik begegnet man sehr selten Aufgaben über Ungleichungen, obschon diese besonders instructiv sind, weil sie mehr Ueberlegung verlangen, als das ziemlich mechanische Auflösen von Gleichungen. Im Interesse des Unterrichts mögen hier ein paar derartige Aufgaben folgen, deren beigefügte Lösungen nicht schwer zu finden sind.

Für das Dreieck sollen die Bedingungen ermittelt werden, unter denen es möglich ist,

a) aus den Abständen des Umkreismittelpunktes von den Seiten,
b) aus den Abschnitten, welche die Berührungspunkte des Inkreises auf den Seiten bilden,

ein neues Dreieck zu construiren.

a) Sind $\alpha < \beta < \gamma$ die Dreieckswinkel, so ist im Falle $\gamma < 90^0$ das neue Dreieck nur unter der Bedingung $\alpha > 42^0 56' 29''$ möglich; liegt $\alpha$ zwischen $42^0 56' 29''$ und $45^0$, so muss

$$\beta > ang\,sin \frac{cos\,\alpha}{2\,sin\,\frac{1}{2}\alpha} - \tfrac{1}{2}\alpha$$

genommen werden; für $\alpha \gtreqless 45^0$ genügt $\beta > \alpha$.

Soll das ursprüngliche Dreieck stumpfwinklig sein, so müssen die Bedingungen

$$\alpha < 45^0, \quad \beta < ang\,cos \frac{cos\,\alpha}{2\,cos\,\frac{1}{2}\alpha} - \tfrac{1}{2}\alpha$$

eingehalten werden.

b) Im Falle $\alpha \lesseqgtr 38^0 56' 33''$, ist

$$\alpha < \beta < ang\,sin (3\,sin\,\tfrac{1}{2}\alpha) - \tfrac{1}{2}\alpha$$

zu nehmen; für $\alpha > 38^0 56' 33''$ genügt $\beta > \alpha$.

Auf die Seiten bezogen, lassen sich diese Bedingungen einfacher ausdrücken durch

$$b > \tfrac{1}{2}c, \quad a > \tfrac{1}{3}(b+c).$$

Die Höhen und die Schwerlinien des Dreiecks geben Gelegenheit zur Bildung analoger Aufgaben.

SCHLÖMILCH.

---

**Berichtigung.**

Auf Seite 211 im 4. Hefte (Jahrg. XXX) ist zwischen den Zeilen 15 und 16 der Passus: „Es sei $m - n = k$“ einzuschalten.

# Historisch-literarische Abtheilung

der

# Zeitschrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

**Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl**

und

**Dr. M. Cantor.**

**XXX. Jahrgang.**

Leipzig,
Verlag von B. G. Teubner.
1885.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

# Inhalt.

## I. Abhandlungen.



## II. Recensionen.

### Geschichte der Mathematik.



### Arithmetik, Algebra, Analysis.

### Synthetische, analytische, descriptive Geometrie, Geodäsie.



### Mechanik und Physik.

# Historisch-literarische Abtheilung.

## Die mathematischen Instrumente des Brescianer Grafen Giambattista Suardi.

Eine bibliographisch-historische Notiz

von

Prof. EUGEN GELCICH,
Director der nautischen Schule in Lussinpiccolo.

Hierzu Taf. II Fig. 2—7.

Gelegentlich der Pflege gewisser nautisch-historischer Studien gelangt uns ein Werk zu Händen, welches unsere Aufmerksamkeit in besonderen Anspruch nahm und betitelt ist: Nuovi istromenti per la descrizione di diverse curve antiche e moderne, e di molte altre che servir possono alla speculazione de' Geometri ed all'uso de' Pratici. Col progetto di due nuove macchine per la nautica ed una per la meccanica, e con alcune osservazioni sopra de' poligoni rettilinei regolari. Del Conte Giambattista Suardi. In Brescia MDCCLII. Obwohl dieses Werk noch durchaus nicht so alt ist, um zu vermuthen, dass selbes so äusserst selten sei, so überzeugten wir uns doch, dass Suardi in der Geschichte der Mathematik nur zu wenig bekannt ist. Seine Versuche, verschiedene Curvengattungen, und zwar sowohl Curven höherer Ordnung, als auch solche, welche in das transcendente Gebiet fallen, durch mechanische Instrumente zu construiren, erscheinen uns aber um so beachtenswerther, als gerade auch in neuester Zeit die Lösung ähnlicher Aufgaben mehrere Mathematiker beschäftigte. Wir finden in der Geschichte mehrfache Erwähnung von den Instrumenten, die zur Verzeichnung der Kegelschnittlinien bestimmt sind, und etwas Weniges über Werkzeuge, durch welche alle oder mehrere Fälle einer gewissen Problemgattung erledigt werden können. Der Schöpfer der letzteren Methode war, wie Schanz* und mit Bezug auf Letzteren auch Günther** berichten,

---

* Schanz, Der Cardinal Nicolaus von Cusa als Mathematiker. Rottweil 1872. S. 22.

** Dr. S. Günther, Studien zur Geschichte der mathematischen Geographie. Halle 1879. S. 348.

Nicolaus von Cues. In letzterer Zeit sind von Emsmann Transporteure mit fest aufgetragenen Curven dritter und höherer Ordnung zur Lösung des Problemes der Winkeltheilung anempfohlen worden;* aber von Versuchen, die sich denjenigen des Grafen Suardi nähern spricht die Geschichte der Mathematik fast gar nicht. Was schliesslich die Person des Verfassers anbelangt, so denken wir, dass ihm schon aus dem Grunde eine verdienstvolle Stelle unter den Erfindern zugedacht werden muss, als wenigstens einer seiner Apparate bei verschiedenen Maschinen eine schöne praktische Anwendung fand. Unseres Wissens hat es doch einen Autor gegeben, der sich bei Verfassung eines grösseren Werkes bemüssigt fand, dem Brescianer besonderes Lob zu spenden. Es war dies der auf dem Gebiete der Instrumentenkunde sowohl in theoretischer, als in technischer Hinsicht verdienstvolle Engländer George Adams,** dessen Urtheil wir später anzuführen haben werden.

Zu den voranstehenden Zeilen, welche den nachfolgenden Blättern so zu sagen eine gewisse Existenzberechtigung zu verschaffen haben, möge noch die Bemerkung dazu gesellt werden, dass das Werk Suardi's zwei Briefe des Jesuiten Boscovich über die mathematischen Eigenschaften der Cartesischen Ovalen und eine Reihe von Untersuchungen über die regelmässigen Vielecke enthält, die manches Interessante enthalten.

Indem wir zur Beschreibung einiger der wichtigsten Instrumente von Suardi übergehen, bemerken wir, dass die durch einfache Linien skizzirten Apparate aller technischen Details entblösst erscheinen, da es sich hier nur um die Erklärung der Principien — der Theorie der Functionsweise — handeln kann. Der Techniker und Mechaniker, der nähere Kenntnisse über constructive Details verlangt, muss sich wohl das Originalwerk verschaffen, welches 283 Gross-Quartseiten mit 23 Tafeln enthält und in jeder Hinsicht erschöpfende Auseinandersetzungen liefert.

Zweifelsohne ist die geometrische Feder das wichtigste der Instrumente. Adams äussert sich über dieselbe folgendermassen: „Obschon verschiedene Schriftsteller der Krümmungen erwähnt haben, welche vermöge einer zusammengesetzten Bewegung zweier Zirkel entstehen, deren einer sich um den andern rund herum bewegt, so scheint doch keiner diesen Grundsatz angewendet und in Ausführung gebracht zu haben, als J. B. Suardi. Seit einiger Zeit ist er sehr vortheilhaft bei der Dampfmaschine von den Herren Watt und Bolton angewendet worden: ein Beweis unter vielen anderen, nicht blos in Rück-

* a. a. O.

** Geometrische und graphische Versuche oder Beschreibung der mathematischen Instrumente, deren man sich in der Geometrie, der Civil- und Militär-Vermessung etc. bedient. Von George Adams. Mathematischer Instrumentenmacher Sr. Majestät und Opticus Sr. Königl. Hoheit des Prinzen von Wales. Deutsch von J. G. Geissler. Leipzig 1795.

sicht der Anwendbarkeit dieser Speculationen, sondern auch in Rücksicht der Vortheile, welche die höhere Mathematik in den Händen eines sinnreichen Mechanikers gewährt. Vielleicht hat es noch nie ein Instrument gegeben, welches so verschiedene Krümmungen zeichnet, als eben die geometrische Feder; der Verfasser erwähnt deren 1273, welche dadurch in einfacherer Form, und vermöge der wenigen Räder, die dazu gehören, beschrieben werden können."

Die geometrische Feder hat also jene Curven zu verzeichnen, welche durch die zusammengesetzte Bewegung zweier Zirkel entstehen, deren einer sich um den andern rund herum bewegt. Unsere Fig. 2 hat die Bestimmung, dieses Instrument durch einfache Linien erklärlich zu machen.*

Man denke sich eine um $Q$ drehbare Alhidade $MN$, und über dem Mittelpunkte $Q$ derselben einen fixen Cylinder $TZ$. Die verticale Axe des Cylinders liegt genau über dem Drehungspunkt der Alhidade. $dm$ sei ein zweiter beweglicher Cylinder, welcher bei einer eventuellen Drehung den Stift $S$ mitnimmt. Der Cylinder $r$ mit dem Stifte $S$ sind durch den Schieber $nn$ mit einander verbunden, der längs des Ausschnittes $xy$ der Alhidade hin und her verschoben und durch die Druckschraube $C$ in jeder beliebigen Lage fixirt werden kann. Von einem Punkte des grösseren Cylinders $T$ führt eine Schnur $Tm$ zum kleineren Cylinder, die mehrere Male um letzteren gewickelt und endlich an denselben befestigt ist. Dreht man nun die Alhidade $MN$ im Kreise herum, so beschreibt der Punkt $r$ den Weg 2, 3, 4, 5, 6 etc. Gleichzeitig wickelt sich aber der Faden auf die Mantelfläche des Cylinders $TZ$ auf und von der Mantelfläche des Cylinders $r$ ab. In dem Maasse also als $r$ um $Q$ herumgeführt wird, beschreibt auch der Stift $S$ eine Curve, deren Form und Eigenschaften durch folgende Factoren bestimmt werden. Erstens durch das beliebig einzustellende Verhältniss der beiden Halbmesser $Rr : SS$; zweitens durch den Halbmesser der Cylinderbasis; drittens durch die Lage des Fadens, je nachdem dieser von $T$ über $m$ oder über $d$ um den kleineren Cylinder gewickelt wird. Man sieht ohne Weiteres, dass die Curven, welche damit zu verzeichnen sind, bis ins Unendliche wachsen können. Die durch Adams angegebeen Zahl bezieht sich somit auf ein ganz bestimmtes Exemplar. Bei der wirklichen Ausführung des Apparates werden Schnur und Cylinder besser durch Zahnräder ersetzt. Man hat drei der letzteren, indem das dritte Zahnrad die Verbindung zwischen $Q$ und $r$ herstellt. Jeder Leser erkennt sofort, dass dieses Princip bei zahlreichen Instrumenten jeder Gattung Verwendung findet, so bei den Dampfmaschinen, bei den Planetarien, bei den Dromoskopen von Paugger und Garbich etc. etc.

---

* Einige dieser Curven wurden durch den P. Castel mathematisch untersucht. Traité 50me de Mathematique. Des Especes des Courbes de divers ordres. Liv I.

Einfach wie möglich im Princip ist ein Apparat, welcher die Konchoide des Nicomedes verzeichnet.

$AB$ in Fig. 3 ist ein Reissbrett, worauf sich ein Gestell $CDE'F$ senkrecht darüber aufgeschraubt befindet. $DE'$, $GH$ stellen zwei zum Brett parallele Etagen vor, welche mit einer Furche versehen sind. Ein Arm $NT \perp DE$, der bei $N$ einen Stift $NO \perp NM$ trägt, kann längs der $DE$ verschoben und in jeder beliebigen Lage durch die Druckschraube $M$ fixirt werden. Ein zweiter Arm $QS$, dessen Armlängen innerhalb der durch die Dimensionen des ganzen Apparates gestatteten Grenzen beliebig eingestellt werden können, greift mit einem Stift $P$ in die Furche $GH$. Die Seite $QP$ des Armes enthält ihrerseits eine zweite Furche, durch welche der fixe Stift $NO$ hindurchgeht. An den Enden $Q$ und $S$ befinden sich zwei senkrechte Stifte $QR$ und $SE$. Die Function des Apparates ist einfach. Ist $NT$ durch die Schraube $M$ senkrecht auf $DE$ unverrückbar eingestellt, so bildet $O$ den Pol der Curve. Ist $O'm$ die Projection der $NM$, $n$ die Projection von $P$, $O'E$ die Projection von $QS$, so bildet $mO'n$ den veränderlichen Polarwinkel, $nE$ die constante Länge des Radiusvectors von der Leitlinie bis zur Curve. Verschiebt man somit den Arm $QS$ längs der $HG$, so beschreiben die Stifte $E$ und $R$ zwei Konchoiden. Mit diesem Instrument können auch verschiedene andere Konchoiden, so jene mit kreisförmiger Basis, entworfen werden.

Dieser Maschine ist eine andere sehr ähnlich, welche die Logarithmica von Neper und die Trajectorie von Claudius Perralto zu verzeichnen hat. Die Leitlinie ist, wie früher, ein Parallelopipedon mit eingeschnittener Furche. Auf diesem bewegen sich zwei Schieberlineale, eines senkrecht auf die Leitlinie und durch eine Druckschraube feststellbar. Das andere hat eine Furche und gleitet längs eines am Parallelopipedon verschiebbaren Pivots. Diese Maschine wurde jedoch früher schon durch den Marchese Poleni erfunden und Suardi giebt an, nur eine Modification derselben eingeführt zu haben.

Die Fig. 4 veranschaulicht ein Instrument, womit die Cissoide von Diocles und auch die Curven von Carrè gezogen werden. Um den Mittelpunkt $C$ eines gedachten Kreises $LNPR$ ist eine Kurbel $CR$ drehbar. An einen Punkt $P$ desselben Kreises ist die Tangente $PD$ angelegt, welche aus einer Schiene besteht. Ein aus durchbrochenen Linealen gebildeter rechter Winkel ist mit dem Scheitel und um diesen drehbar in $P$ befestigt; ein zweiter, ebenso gebildeter rechter Winkel gleitet mit einem Pivot oder Schieber $D$ längs der Schiene $Px$. In die Furchen der $PF$ und $LD$ greift der Zapfen $R$, welcher sich am beweglichen Ende der Kurbel $CR$ befindet. Das Lineal $LD$ erhält eine zweite Führung durch das Pivot $L$ noch, welches in die Furche des ersteren eingreift. Endlich kreuzen sich die Arme $Py$, $DB$ mit ihren Furchen in einem (beweglichen) Punkte $M$, der den Träger eines Stiftes bildet. Wird nun die Kurbel derart gedreht, dass $RC$ über $CP$ falle, so hat man folgende Stellung des Instrumentes.

*R* und *D* vereinigen sich in *P*, *DB* ist senkrecht auf *LP*, somit bildet *DB* die Verlängerung der Tangente *Px*. Die *PF* deckt sich mit der *Px* und die *Py* mit der *PZ*. Der Stift *M* liegt über *P*. Dreht man die Kurbel von *P* über *R* bis *L*, so öffnen sich die Arme *PD* und *DB*, der Schieber *M* gleitet längs der *Py* (oder *DB*) und der an demselben befestigte Stift beschreibt die Cissoide. Es ist in der That immer $PM = RD$, somit die Curve *PaM* eine Cissoide; denn da für jede Stellung $\angle P = \angle D = 90^0$ ist und der Winkel im Halbkreis $\angle LRP$ auch $90^0$ beträgt, hat man auch $\angle PRD = 90^0$ und daher $\angle PMD = 360 - 270 = 90^0$. *RPMD* ist somit ein Parallelogramm, ergo immer $PM = RD$, *quod erat demonstrandum.* Nimmt man vom Instrument *LDB* und *Px* hinweg, versetzt man den Vertex *D* nach *R* und giebt man den Schenkeln *LD* und *DB* eine Führung in *L* und *P*, bringt man endlich auf den Arm *DL* einen Stift an in einer Entfernung von $D = LP$, so würde letzterer Stift bei der Drehung der Kurbel die Curve von Carrè* beschreiben.

Schon der P. Milliet** hatte gemeint, dass die mechanische Construction der Quadratrix von Dinostratus leicht ausfallen müsse; wie man eine solche vornehmen könnte, hat er aber nie gezeigt. Der Lösung dieser, bei den alten Bestimmungen des Kreisumfanges wichtigen Curve widmet Suardi das folgende Instrument.

*KAEN* ist ein Rahmen, *CD* eine um *C* drehbare, wieder mit einer Furche versehene Alhidade, die bei *C* einen Quadranten *xCa* trägt. *PT* ist eine ebenfalls mit einer Furche versehene, parallel zu *KN* oder zu *AE* bewegliche Querleiste, deren Bewegung durch die Hülse *TQ* eine Führung längs der *EN* erhält. (Fig. 5.) An dem Punkte *x* ist eine Schnur befestigt, welche bei *y* um eine Rolle geführt wird und an dem Ohr *b* der Hülse *TQ* das zweite *sin*-Ende hat. Die Dimensionen sind derart gehalten, dass wenn *CD* mit *KA* übereinfällt, *PT* in *M* den Quadranten *CMV* tangirt. Erfasst man die Alhidade bei *D* und dreht man sie von *M* bis *V* herunter, so zieht die Schnur die Querleiste von *M* bis *C* herab. Dann beschreibt ein Stift *S*, der sich im Kreuzungspunkte der Furchen *CD* und *PT* befindet, die Quadratrix. Selbstverständlich liegt *S* in *M*, wenn die *CD* mit der *CM* übereinfallen.

Interessant sind die Curven, welche durch den folgenden Apparat gezeichnet werden, da sie zu Formen führen, nach welchen in der Natur die Blätter der Pflanzen gezeichnet zu sein scheinen. Da diese Curven keinen besonderen Namen erhielten, so wollen wir kurz angeben, wie sie entstehen. Man nehme in Zirkelöffnung einen beliebigen Bogen $V_1$ (Fig. 6) und trage denselben von *V* gegen *A* und von *M* gegen *A* einige Male auf. Man erhält die Punkte 1, 2, 3 und beziehungsweise *II*, *I*, *G*. Führt man

---

* Mémoires de l'Academie. 1705. S. 56.

** Lib. II. De indivisib. prop. 1. Descriptio lineae Quadratricis.

die Radien $O1$, $O2$, $O3$ und die Sehnen $Vg$, $VI$ $VII$, so sind die Durchschnittspunkte $V$, $a$, $b$, $O$ Punkte der fraglichen Curven. Nennt man den Halbmesser des Kreises $a$, und legt man ein senkrechtes Coordinatensystem mit dem Ursprung im Mittelpunkte des Kreises und zwar derart an, dass die $OV$ die Abscissenaxe werde, so ist die Gleichung dieser Curve:

$$g = \pm \frac{\sqrt{x^3 - 2ax^2 + a^2x}}{2a - x}.$$

In Fig. 7 haben wir ein Instrument zu ihrer Erzeugung. $AB$ ist ein Ring, welcher auf die Papierebene gelegt und unveränderlich darauf festgehalten wird. Die innere Peripherie desselben enthält einen zweiten beweglichen Ring $Vndm$, der mit einem Halbmesser $mn$ versehen ist. Halbmesser und Ring tragen eine Furche und diejenige des letzteren $(xyz)$ ist der Träger eines in jeder Lage durch eine Stellschraube fixirbaren Schiebers $d$. Eine Alhidade $VD$ kann durch einen Haken nach Belieben in $V$ an den festen Ring eingehakt oder wieder von demselben entfernt werden. Die Alhidade hat eine Längenfurche; im Kreuzungspunkte $S$ befindet sich, wie fast bei allen diesen Instrumenten, der gewöhnliche Stift. Der Schieber $d$ und ein an demselben angebrachtes Pivot dienen der Alhidade als Führung. Stellt man den beweglichen Ring und die Alhidade (letztere vermöge der Führung $d$) derart ein, dass, wenn $VM$ einen Halbmesser des fixen Ringes $AB$ vorstellt, Centriwinkel $Vz$ = Centriwinkel $MD$ gleich sei, und fährt man um den beweglichen Ring im Kreise herum, so beschreibt der Stift $S$ die fragliche Curve.

Wir unterlassen die Beschreibung eines weiteren Apparates zur Beschreibung der Cykloiden, da die vorangeführten Instrumente im Allgemeinen die Charakteristik der Erfindungen Suardi's zur Genüge bezeichnen. Origineller ist erst sein Compasso loxodromico, ein Apparat, womit die Loxodrome auf der Kugel und ihre stereographische Polarprojection, die logarithmische Spirale, erzeugt werden können. Da aber dasselbe zu den nautischen Diagramm-Instrumenten oder zu den nautischen Rechenmaschinen gezählt werden kann, die wir in der Central-Zeitung für Optik und Mechanik Nr. 21, Jahrg. 1884 beschrieben haben, so unterlassen wir, das dort Gesagte hier noch zu wiederholen.

# Recensionen.

---

**Lehrbuch der Theorie der periodischen Functionen einer Variabeln mit einer endlichen Anzahl wesentlicher Discontinuitätspunkte, nebst einer Einleitung in die allgemeine Functionentheorie.** Von Dr. OTTO RAUSENBERGER. Mit in den Text gedruckten Figuren. 8°. VIII u. 476 S. Leipzig, B. G. Teubner. 1884.

Ein gutes Buch zur richtigen Zeit! Gerade jetzt, wo die Theorie der transcendenten eindeutigen Functionen durch Weierstrass neu gegründet ist und insbesondere die Functionen mit linearen Transformationen in sich, von verschiedenen Seiten her behandelt, zu einem der wichtigsten Capitel der neueren Analysis sich gestalten, ist eine geschlossene, von den Elementen ausgehende erste Einleitung in dieses ganze Begriffssystem für den Studirenden nothwendig geworden, und eine solche bietet das vorliegende Werk.

Der Verfasser versteht unter „periodischer" Function eine Function, welche bei eindeutiger, insbesondere linearer Substitution für das Argument sich nicht ändert, und behandelt hauptsächlich die Exponentialfunction und die einfach multiplicativ-periodischen Functionen, aus welch' letzteren die doppelt additiv-periodischen Functionen mit einem wesentlich singulären Punkt, die elliptischen Functionen, durch einfache Umgestaltung des Arguments hervorgehen.

Der Ausgangspunkt ist die Weierstrass'sche Definition der analytischen Function durch die Potenzreihe; und die Darlegungen gehen einfach und systematisch durch die Hauptheile der Analysis hindurch bis zu den eben genannten Functionen hin, während alle weiteren Betrachtungen der Functionentheorie, insbesondere die Integration im complexen Gebiete, bei Seite gelassen werden.

In der Behandlung der elliptischen Functionen selbst schliesst sich der Verfasser mehrfach ziemlich eng an die Königsberger'schen „Vorlesungen" an. Deren Auffassung als Function des Moduls, die Theorie der elliptischen „Modulfunctionen" und überhaupt der Functionen mit mehreren nicht vertauschbaren Transformationen in sich und mit unendlich vielen wesentlich singulären Stellen, worüber in diesem Buche nur erst kurze Andeutungen gemacht werden, scheint der Verfasser sich auf eine Fortsetzung des Werkes vorbehalten zu wollen. Dann werden hoffentlich auch die interessantesten Theile dieser Theorien, der Zusammenhang

der Transcendenten mit der Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung — zu dessen völliger Klarlegung freilich die Integration im complexen Gebiete unerlässlich wird —, die zugehörigen geometrischen Gebietseintheilungen etc., zur Geltung kommen.

Zu dem Vorzuge des Buches, bei begrenztem Thema eine geschlossene Einleitung in wichtige Capitel der neueren Analysis zu liefern, kommt der weitere, dass die Darstellung überall klar und correct gehalten ist. Nur mit der Einleitung über den Zahlenbegriff und die Rechnungsoperationen ist Referent nicht einverstanden; denn auch die algebraische Grundlegung erfordert es nicht, dass die Einführung der irrationalen Zahlen vor Einführung ins Unendliche fortgesetzter Operationen vorgenommen und auf die Umkehrung algebraischer Gleichungen, diese aber auf die Anschauung gegründet wird.

Erlangen, im September 1884. M. Noether.

---

**Leitfaden der Kartenentwurfslehre** für Studirende der Erdkunde und deren Lehrer, bearbeitet von Dr. Karl Zöppritz, ord. Professor der Erdkunde an der Universität zu Königsberg i. Pr. Mit Figuren im Text und einer lithographischen Tafel. (VIII u. 162 S.) gr. 8°. geh. n. Mk. 4.40. Leipzig 1884, B. G. Teubner.

Das vorliegende Buch ist laut seinem Vorworte dem Bedürfniss des Universitätsunterrichts entsprungen. Es will die Kenntniss der geometrischen Methoden, auf denen der Kartenentwurf beruht, und einen gewissen Grad von Uebung in der Handhabung derselben vermitteln, soweit er für jeden unerlässlich ist, der Karten mit Nutzen gebrauchen und Geographie nicht blos dilettantisch betreiben will. Es stellt unter Verzichtleistung auf eingehendere Rechnung die elementar-geometrische Construction durchaus in den Vordergrund.

Der erste Abschnitt über Ortsbestimmung beschränkt sich auf das für die Zwecke der Karthographie Nöthige und Unentbehrliche, zeichnet sich durch grosse Klarheit und Präcision aus und behandelt auf nur 20 Seiten der Reihe nach die Hauptmomente der geometrischen, astronomischen und graphischen Ortsbestimmung. Der folgende grössere Abschnitt „Netzentwurfslehre“ giebt zunächst den Begriff der Abbildung im Allgemeinen und geht dann sofort auf die Abbildung der Erde auf die Ebene ein, wobei es sich etwas befremdend ansieht, die Erde so gut wie immer als Kugel in Betracht gezogen zu finden, nachdem kurz zuvor wörtlich gesagt worden ist, es solle im vorliegenden Werk mit der bisher fast ausnahmslos beobachteten und im Elementarunterricht auch nicht wohl zu umgehenden Praxis, dass man anfangs die Meridiane zwischen Aequator und Pol in gleiche Theile (Grade) eintheilt, um in einem späteren Abschnitt zu lernen,






dass diese Theile ungleich sind, gründlich gebrochen, d. h. von vornherein darauf verzichtet werden, die Erde als Kugel zu betrachten.

Vielfach wird auf Tissot's epochemachendes Werk: Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques, Paris, Gauthier-Villars, 1881, hingewiesen, die Tissot'sche Terminologie wird neben der sonst gebräuchlichen eingeführt, und nach den drei wichtigsten Anforderungen, die man an eine Abbildung stellen kann, werden die Gruppen der winkeltreuen, flächentreuen und mittelabstandstreuen (conformen, äquivalenten und äquidistanten) Abbildungen unterschieden.

Diesen Hauptprincipien der Projectionslehre gegenüber charakterisirt sich die ganze Stellung des Buches durch die Worte (S. 26): „Vom mathematischen Gesichtspunkte aus betrachtet, liefert die Winkeltreue die interessantesten Abbildungsprobleme. Für die praktische Kartographie ist aber die Flächentreue weit wichtiger, weil geographische Vergleiche zunächst an Erscheinungen anknüpfen, die über flächenhaft ausgedehnte Gebiete ihre Gleichartigkeit oder Verschiedenheit offenbaren, und weil das Planimeter in der Hand der Geographen ein Instrument von zunehmender Wichtigkeit ist.“ Von diesem leitenden Gedanken ausgehend sind nun auf S. 31—102 die wichtigsten Abbildungsarten behandelt, erst die azimutalen oder zenitalen, nämlich von den perspectivischen die gnomonische, orthographische, sterographische und externe; von nicht perspectivischen Postel's mittelabstands- und Lambert's flächentreue Azimutalprojection, sowie die gewöhnliche und Nell's modificirte Globularprojection. Hieran reihen sich die Abbildungen auf abwickelbaren Flächen und zwar zunächst auf einen Cylinder. Wir finden behandelt die Plattkarten, die Cassini-Soldner'sche, die flächentreue, die Mercator'sche und die Centralprojection auf den Cylinder, die Sanson-Flamsteed'sche und Mollweide's homalographische Projection. An echten Kegelprojectionen finden sich die gewöhnliche äquidistante, diejenige von De l'Isle, die flächen- und winkeltreue; an unechten die Bonne'sche, die gewöhnliche und die orthogonale polykonische, endlich die preussische Polyederprojection.

Bei allen zur Besprechung kommenden Abbildungsarten ist auf ihre Vorzüge und Mängel hingewiesen, und es wird ihre Verwendbarkeit oder Nichtverwendbarkeit für bestimmte Zwecke hervorgehoben. Getreu dem Programm des Buches tritt die geometrische Construction durchaus in den Vordergrund und es ist auf Entfaltung des mathematischen Apparates soviel als irgend möglich verzichtet. Dieses Fehlen mathematischer Entwickelungen macht sich aber da und dort recht empfindlich wahrnehmbar, z. B., um nur eines hervorzuheben, bei der Mercator-Projection. Von ihr wird einfach gesagt, sie sei winkeltreu, und man finde den Abstand $y$ des $\beta^{\text{ten}}$ Parallelkreises vom Aequator nach der Formel:

$$y = \frac{r}{M} lg\, tg \left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right).$$

Die Bedeutung dieser vielgebrauchten Abbildungsart wird sodann für die Darstellung physikalischer Verhältnisse auf der (fast) ganzen Erdoberfläche und für die Schifffahrt charakterisirt, wobei auch kurz der Loxodrome Erwähnung geschieht. Hier hätte nun ganz entschieden mehr gesagt werden müssen. Eine elementare Ableitung der obigen Gleichung, ausgehend von der Definition der Loxodrome, wie sie z. B. in Gretschel's vorzüglichem Lehrbuch der Kartenprojection S. 114—120 gegeben wird, nebst einem Hinweis auf Mercator's eigene Erklärung seines Abbildungsprincips (Gradus latitudinum versus utrumque polum auximus pro incremento parallelorum supra rationem, quam habent ad aequinoctialem) wäre für einen Universitätsstudenten, bei dem man Gymnasial- oder Realschulreife voraussetzt, nicht zu hoch und gewiss anregender gewesen, als eine Gleichung, die ohne Ableitung ganz absolut hingestellt wird. Auch das Maass der Flächenvergrösserung und die Eigenschaft der Winkeltreue der vorliegenden Abbildung hätte sich leicht entwickeln lassen.

Dieses Beispiel statt mehrerer. Wenn auch Gretschel's treffliches Buch mit seiner reichen Entfaltung mathematischer Hilfsmittel manchem Studirenden vielleicht etwas zu schwer erscheinen dürfte, so ist es eben für den mathematisch einigermassen Vorgebildeten bezüglich der eigentlichen Projectionslehre doch ganz anders als das Zöppritz'sche geeignet, zum Studium der theoretischen Kartenentwurfslehre anzuregen und dasselbe zu vertiefen. Ja, selbst Steinhauser's „Grundzüge der mathematischen Geographie und Landkartenprojection“ scheinen, wenn denn doch einmal wahrhaft elementar vorgegangen werden soll, den Zweck, die geometrischen Methoden der Kartenentwurfslehre zu entwickeln und dem Studirenden einen gewissen Grad von Uebung in ihrer Handhabung zu verschaffen, ebenso gut zu erreichen, als das Zöppritz'sche Buch, bei dessen Literaturverzeichniss nebenbei bemerkt auch das verdienstvolle „Lehrbuch der wichtigsten Kartenprojectionen von O. Möllinger, Zürich 1882“ Erwähnung verdient hätte, besonders wegen seiner eingehenden Vergleichung zwischen der stereographischen und Bonne'schen Abbildungsweise und seiner ausführlichen Behandlung der Mercator-Projection und der auf dieselbe bezüglichen Constructionsaufgaben aus der Schifffahrtskunde.

Bedeutend werthvoller, als die Darstellung der einzelnen Abbildungsarten, erscheint der Abschnitt mit dem Titel: „Die Projectionen geringster Verzerrung“, der eine Reihe von allgemeinen Sätzen über Deformation überhaupt und eine Auswahl von Projectionen geringster Verzerrung für bestimmte Zwecke enthält. Dieser Abschnitt schliesst sich an das schon erwähnte Tissot'sche Werk an, in welchem, ausgehend von dem Satze, dass einem System orthogonaler Curvenschaaren der einen Fläche im Allgemeinen nur ein einziges ebensolches System auf der andern Fläche entspricht, als Maass der Verzerrung an jedem Punkt der Karte eine Indicatrix genannte Ellipse eingeführt wird, deren Axenverhältniss sowohl in Bezug

auf die Länge als die Winkel den Maassstab für die Grösse der Verzerrung abgiebt. Einige kleine Tabellen stellen je nach den an die Karte gestellten Anforderungen die Fehler derselben für einzelne verglichene Projectionsarten zusammen, bei welcher Vergleichung mit vollem Recht wiederholt auf die bedeutenden Mängel der von den Kartographen so oft angewandten Bonne'schen Projection hingewiesen wird, die endlich einmal aus unseren Kartenwerken verschwinden sollte.

Befremdend bei diesem an sich werthvollen Theil des Buches ist zweierlei. Einmal die auffallende Bevorzugung der flächentreuen Abbildung vor der winkeltreuen, die, wie schon erwähnt, gleich zu Anfang des Buches gewissermassen als eine Art von Programm desselben hingestellt wird. Nun hat aber die Winkeltreue nicht nur deshalb Bedeutung, weil sie dem Mathematiker die interessantesten Abbildungsprobleme bietet; vielmehr ist sie genau betrachtet diejenige Forderung, die einer kartographischen Darstellung gar nie erlassen werden darf. Es sollten, wenn anders die Kartenzeichner ihre Aufgabe richtig erfassen wollen, nur noch winkeltreue Abbildungen geschaffen werden, und das aus dem einfachen Grunde, weil die erste und Hauptforderung an jede Karte die ist, dass sie ein möglichst treues Bild des dargestellten Erdraumes gebe. Dem wird aber nur genügt durch die Winkeltreue im Einzelnen, wobei man sich durch etwaige Verzerrungen der Contouren im Grossen und zu starke Krümmung der kürzesten Linien nicht abschrecken zu lassen braucht, da diesen beiden Mängeln, wie sofort gezeigt werden soll, abgeholfen werden kann. Die Flächentreue hat dem gegenüber in den Hintergrund zu treten; denn was nützt es, den Verbreitungsbezirk irgend einer physikalischen Erscheinung auf der Erde flächentreu abgebildet zu sehen, wenn dabei jeder einzelne Winkel verzerrt, also das ganze Bild durchaus entstellt ist? Dass ferner die flächentreue Abbildung wegen ihrer Verwendbarkeit zur Flächenberechnung mittels des Planimeters unentbehrlich sei, scheint durchaus unstichhaltig. Beim Kartenmaassstab derjenigen Länder, bei denen der Flächeninhalt nur mit dem Planimeter bestimmbar erscheint, kann das Resultat doch nur höchst ungenau ausfallen; bei den Ländern aber, über die wir Karten in grossem Maassstabe besitzen, liegen auch directe Inhaltsmessungen vor, so dass in beiden Fällen das Planimeter entbehrt werden kann.

Was weiter an dem genannten Abschnitt tadelnswerth erscheint, ist das vollständige Ignoriren zweier schon seit längerer Zeit veröffentlichten hierher gehörigen Arbeiten von Fr. Eisenlohr.* Die erste derselben leitet mathematisch ab, dass, wenn man bei conformer Abbildung alle Kartenpunkte gleichen Maassstabes durch sogenannte isometrische Linien

* 1. Ueber Flächenabbildung. Journal für reine und angewandte Mathematik. Bd. 72 S. 143 flgg. 2. Ueber Kartenprojection. Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin, Bd. 10 S. 305 flgg.

verbunden hat, die auf diesen senkrecht stehenden geodätischen Linien keine, die ihnen parallelen aber die grösste Krümmung erleiden. Dieser Krümmungswerth der geodätischen Linien empfiehlt sich daher als sehr geeignetes Maass des Kartenfehlers in jedem Punkt, und es ergiebt sich nun ferner, dass dieser Fehler im Innern der Karte am kleinsten wird, wenn die Vergrösserung auf dem Rande derselben einen constanten Werth annimmt, d. h. wenn die Begrenzung der Karte mit einer isometrischen Linie zusammenfällt. Für den Aequator als Begrenzungscurve erhält man die stereographische, für zwei gleichweit vom Aequator abstehende Parallelkreise die Mercator-Projection als Specialfall. Für zwei Meridiane als Begrenzungscurven löst Eisenlohr die Aufgabe neu. Die zweite Abhandlung behandelt unter Verzicht auf die mathematische Ableitung die Bedeutung der conformen Abbildung überhaupt und die oben dargestellten Resultate im Besonderen. Sodann giebt sie eine Tabelle für das Gradnetz der ganzen Erdoberfläche von 10 zu 10 Grad, und führt weiter aus, dass der Netzentwurf eine wesentliche Erleichterung durch die Beschränkung erfährt, dass jeder Meridian und Parallelkreis als Kreis abgebildet werden und dass man unter den noch möglichen Abbildungsarten diejenige auswählen soll, bei welcher eine isometrische Linie annähernd mit der Begrenzung übereinstimmt. Am Schlusse folgen Tabellen für verschiedene Kartenmittelpunkte bei verschiedener Breite, z. B. auch für die Karten von Asien und Amerika.

Um es nochmals zu wiederholen, die auffällige Zurücksetzung der winkeltreuen Abbildung vor der flächentreuen und die Nichtbeachtung der citirten Eisenlohr'schen Arbeiten, die sicherlich höchst bedeutend für die wahrhaft wissenschaftliche Grundlage der Kartographie sind, und die darum in einem für den Studirenden der Erdkunde bestimmten Werke über Kartenentwurfslehre eine eingehende Darstellung durchaus verdienen, berührt bei der Lecture des Zöppritz'schen Buches störend. Diesem Vorwurf gegenüber ist aber zu constatiren, dass der folgende Abschnitt „Topographie" sehr zweckmässig und lehrreich ist und Alles bietet, was billigerweise verlangt werden kann. Nach den Vorbildern von Neumayer und Kaltbrunner ist es nicht ganz leicht gewesen, die zur Behandlung kommenden Fragen auf originelle Art zu bearbeiten. Allein die Paragraphen über Routenconstruction, die Anleitung zum Zeichnen, zum Reduciren der Maassstäbe u. s. f. sind geradezu vorzüglich. Dasselbe gilt von der Behandlungsweise der Terrainlehre. Der Anhang, welcher einige Grundregeln für das Zeichnen mit Lineal und Zirkel giebt, wird manchem in solchen Dingen weniger Geübten willkommen sein. So bietet demnach unser Werk im Ganzen des Guten sehr viel. Bei einer hoffentlich recht bald nöthig fallenden Neuauflage wäre nur zu wünschen, dass obigen Ausstellungen einigermassen Rechnung getragen würde, dass also die mathematischen Partien mehr dem Stand der Universitätsstudenten angepasst und dass die winkeltreuen Abbildungsarten mehr in das ihnen gebührende Recht eingesetzt würden. — Die

Ausstattung ist, wie bei der berühmten Verlagsbuchhandlung nicht anders erwartet werden kann, mustergiltig.

Heidelberg. Prof. Dr. LUDW. NEUMANN.

---

**Ueber die nichteuklidischen Raumformen von *n* Dimensionen.** Festgabe für das Briloner Gymnasium zum 23. October 1883 von Dr. WILHELM KILLING. Braunsberg 1883, Huye's Buchhandlung.

Bereits seit längerer Zeit beschäftigt sich Herr Killing erfolgreich mit der Ausbildung der Theorie nichteuklidischer Raumformen. Charakteristisch für seine Untersuchungen ist die ausgiebige Verwendung geometrischer Betrachtungsweisen im Gegensatz zu der ausschliesslich analytischen Behandlung desselben Gegenstandes von Seiten anderer Autoren. Hierdurch ist es Herrn Killing in mehreren Fällen möglich geworden, ungenaue oder fehlerhafte Resultate früherer Forscher richtig zu stellen. Es sei namentlich erinnert an die von ihm gegebene Unterscheidung zwischen der Riemann'schen Raumform und ihrer Polarform, an den Nachweis, dass diese beiden die einzigen constant positiv gekrümmten Raumformen sind, und dass für das reale Gebiet (in unserem Denken!) ausser ihnen nur noch die Euklidische und Lobatschewsky'sche existiren, ferner auf die Verwendung der vom Verfasser als Weierstrass'sche eingeführten Coordinaten zu analytischen Untersuchungen.

Während diese früheren Arbeiten des Verfassers sich auf die Gebiete von zwei und drei Dimensionen beschränken, giebt er in der vorliegenden Abhandlung eine Verallgemeinerung verschiedener Resultate der nichteuklidischen Geometrie für das $n$-dimensionale Gebiet. Veranlassung zu diesen Untersuchungen gab die Bemerkung, dass der Aufbau der Mechanik für nichteuklidische Raumformen, wie ihn der Verfasser plant, die vorherige Entwickelung einer Anzahl rein geometrischer Resultate nöthig macht. Vor Allem wird bemerkt, dass die vier oben erwähnten Raumformen in beliebiger Dimensionenzahl existiren, und dass die früher mittels Weierstrass'scher Coordinaten geführten Untersuchungen sich ohne Weiteres auf $n$ Variable ausdehnen lassen. Auch der Begriff der Polarform, welcher ursprünglich auf der Reciprocität von Punkt und Ebene beruhte, erweitert sich im $n$-dimensionalen Gebiet durch Gegenüberstellung eines $m$-fach und eines $(n-m)$-fach ausgedehnten ebenen Gebildes. Für die Nichtexistenz weiterer constant positiv gekrümmter Raumformen, ausser den beiden oben erwähnten, wird ein neuer, geometrischer Beweis von grosser Einfachheit gegeben. Für die im $n$-dimensionalen euklidischen (d. h. ebenen) Gebiet auftretenden Winkel hat bereits Jordan analytische Definitionen gegeben. Diese Definitionen lassen sich, wie der Verfasser bemerkt, auch auf die nichteuklidischen Raumformen übertragen; er giebt aber ausserdem eine

rein geometrische Ableitung des Winkelbegriffs, welche den Vorzug besitzt, unmittelbar als Verallgemeinerung des gewöhlichen Winkelbegriffs erkennbar zu sein. Sehr einfach gestaltet sich die Untersuchung der $m$-dimensionalen Kugelgebilde. Dieselben stellen höhere Riemann'sche Raumformen dar, deren Krümmungsmaasse ein Minimum besitzen, welches gleich ist dem Krümmungsmaasse desjenigen $n$-dimensionalen Gebietes, in welchem die Kugelgebilde betrachtet werden. Hervorzuheben ist die Bemerkung, dass in jeder $n$-dimensionalen Lobatschewsky'schen Raumform Riemann'sche, euklidische und Lobatschewsky'sche Raumformen von geringerer Dimensionenzahl enthalten sind, dagegen in jeder Riemann'schen wieder nur Riemann'sche, ein Resultat, welches man sich übrigens durch die auf dem einschaligen Hyperboloid einerseits, auf der Kugel andererseits möglichen Linien verdeutlichen kann. Weiter wird gezeigt, wie die von Dandelin und Quetelet gegebene Ableitung der Kegelschnitte aus dem geraden Kegel (mittels zweier die Schnittebene und den Kegelmantel berührenden Kugeln) sich unmittelbar aus der euklidischen in eine nichteuklidische Raumform übertragen und daselbst zur Grundlage einer elementaren Theorie der Kegelschnitte machen lässt. Unter quadratischen Gebilden von $n-1$ Dimensionen versteht der Verfasser solche, welche durch eine homogene quadratische Gleichung zwischen Weierstrass'schen Coordinaten dargestellt werden. An diese Gebilde schliesst sich naturgemäss die Polarentheorie nebst der Darstellung der Gleichung durch Quadrate linearer Functionen der Coordinaten. Von der Zahl der hierbei auftretenden negativen Quadrate hängt die Anzahl der auf dem Gebilde liegenden Geraden, Ebenen und ebenen Gebilde ab. Der Verfasser wendet sich dann zu den metrischen Eigenschaften dieser quadratischen Gebilde, zunächst im endlichen Raume. Diese Eigenschaften hängen mit der von Weierstrass gelösten Aufgabe zusammen, die beiden quadratischen Formen

$$\varphi\,(x_0\; x_1 \ldots x_n) \text{ und } \omega = k^2 x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2$$

durch die Summen derselben Quadrate darzustellen (Berlin. Monatsber. 1868, S. 310 flgg.). Der Verfasser zeigt im Einzelnen, welche Eigenschaften des quadratischen Gebildes mit den verschiedenen Fällen von Gleichheit und Ungleichheit der (von Weierstrass bei der Behandlung jener Aufgabe eingeführten) „Elementartheiler“ zusammenhängen. Diese geometrische Deutung analytischer Thatsachen ist eine der interessantesten Partien der Killing'schen Arbeit und beweist gleichzeitig, wie wenig es ohne die Resultate der transcendentalen Geometrie möglich sein würde, für gewisse analytische Thatsachen das geometrische Aequivalent aufzufinden. Es werden weiter ähnliche und confocale quadratische Gebilde betrachtet und die Veränderungen dargelegt, welche die Theorie der quadratischen Gebilde erleidet, wenn man von den endlichen zu den Lobatschewsky'schen Raumformen übergeht. Specielle Beispiele werden hier wie in der sonstigen Theorie der quadratischen Gebilde aus dem dreidimensionalen Gebiet her-

genommen. Zum Schluss wird bemerkt, dass u. A. auch die von Jordan für euklidische Raumformen gegebene Theorie der Krümmungen einer Raumcurve durch den Uebergang in nichteuklidische Raumformen sich nur unwesentlich ändert.

Es sei schliesslich noch erwähnt, dass Herr Killing in einer neueren Abhandlung (Programm des Lyceum Hosianum in Braunsberg, Michaeli 1884) eine weitere, auf dem Begriff der Bewegung beruhende Verallgemeinerung des Raumbegriffes gegeben hat, die ihn zu nichtprojectivischen Raumformen führt, Formen, von denen bisher nur eine einzige (in einer Abhandlung des Verfassers in Borchardt's J., Bd .89 S. 284) betrachtet zu sein scheint.

Waren.

V. Schlegel.

---

**Elementar-synthetische Geometrie der gleichseitigen Hyperbel.** Von A. Milinowsky (Weissenburg i. E.). Leipzig, Teubner. 1883.

„Unter allen Kegelschnitten ist keiner der elementaren Behandlung so zugänglich, wie die gleichseitige Hyperbel, und trotzdem besitzt unsere mathematische Literatur kein Buch, welches die Eigenschaften derselben in elementarer und einheitlicher Weise im Zusammenhange darstellt. Dieses Ziel hat sich der Verfasser in vorliegendem Werkchen gesteckt und hofft dadurch Allen, welche Beruf oder Neigung zur elementaren Betrachtung der Kegelschnitte führen, keine unwillkommene Gabe darzubringen. Namentlich aber hofft er dadurch auch dem Gedanken, dass das harmonische Gebilde ein durchaus elementares ist, weitere Geltung und der Anwendung desselben in der elementaren Geometrie grössere Ausbreitung zu verschaffen."

Mit diesen Worten schliesst die Vorrede des vorbezeichneten 135 Seiten starken Schriftchens. Unter allen Kegelschnitten ist zweifellos der Kreis die einfachste und der elementaren Behandlung zugänglichste Curve. Dann zeichnet sich die Parabel durch viele höchst einfache Eigenschaften aus und hat zudem den (nicht ganz zu ignorirenden) Vortheil, dass einfache physikalische Betrachtungen auf diese Curve führen. Manche Eigenthümlichkeiten derselben jedoch, insbesondere die durch die Lage ihres Mittelpunktes bedingten, liegen dem von der Kreisgeometrie kommenden Anfänger weiter ab, und somit ist es doch mindestens zweifelhaft, ob nicht der gleichseitigen Hyperbel, diesem Zerrbilde des Kreises, wirklich die Siegespalme grösserer Einfachheit und leichteren Zuganges gebührt.

Der Inhalt unseres Buches gliedert sich in sieben Paragraphen, von denen der erste die Ueberschrift: „Punkte und Tangenten" führt. Bei der fundamentalen Bedeutung dieses ersten Abschnittes mag es gestattet sein, demselben eine eingehendere Besprechung zu widmen. Ist so der Plan des Verfassers deutlich geworden, so dürfen wir uns im Uebrigen kürzer fassen,

da die vorgetragenen Materien im Ganzen nicht neu sind und dies ja auch keineswegs sein wollen.

Den Ausgangspunkt bildet der Sache nach die Gleichung der auf die Asymptoten bezogenen Curve, nämlich $xy = q^2$. Dann werden in sehr einfacher Weise die Begriffe Potenz ($= q^2$), inneres und äusseres Gebiet, Asymptoten, Mittelpunkt, Durchmesser, Axen gewonnen. Es folgt der einfache und in den Anwendungen fruchtbare Satz: „Jede Secante der gleichseitigen Hyperbel wird von dieser und den Asymptoten in äquidistanten Punkten geschnitten. Zu den Tangenten ist ebenfalls der Zugang ein natürlicher: Jede Tangente der gleichseitigen Hyperbel begrenzt mit den Asymptoten ein Dreieck von constantem Inhalte. Man erkennt nun durch einfache Ueberlegungen, dass die Tangenten in den Endpunkten eines Diameters parallel sind, und den wichtigen Satz, dass eine beliebige Sehne der gleichseitigen Hyperbel den Endpunkten eines Diameters unter gleichen bez. supplementären Winkeln erscheint. Die Umkehrung dieses Satzes, welche als selbstverständlich nicht bewiesen, ja nicht einmal als besonderer Satz erwähnt ist, gewährt nun die Einsicht, dass der Höhenpunkt eines jeden der gleichseitigen Hyperbel eingeschriebenen Dreiecks auch auf derselben liegt. Aus den Folgerungen heben wir besonders zwei hervor. Erstens den theoretisch wichtigen Satz, dass eine gleichseitige Hyperbel von einem Kreise höchstens in vier Punkten geschnitten wird; zweitens den für Aufgaben fruchtbaren Satz: Wenn ein Kreis eine gleichseitige Hyperbel berührt, so schneidet er sie noch in zwei Punkten, deren Verbindungslinie auf dem Durchmesser des Berührungspunktes senkrecht steht. Bei dem Herrn Verfasser erscheint dieser Satz als Umkehrung eines andern, wie uns scheinen will, weniger anschaulichen. Hiermit gelangt man nun zum Krümmungskreise und zu dem Feuerbach'schen Kreise, der durch den Mittelpunkt der Hyperbel geht. — Die Beziehungen der Hyperbel zum Kreise sind hiermit dargelegt. Analytisch gewinnen dieselben eine besonders merkwürdige Form, wenn man von der Darstellung der Coordinaten durch hyperbolische Functionen Gebrauch macht. Setzt man nämlich $x = a\,\mathfrak{Cos}\,u$, $y = a\,\mathfrak{Sin}\,u$, so ist jedem Punkte der Hyperbel ein Argument $u$ zugeordnet. Schneidet nun ein Kreis die Hyperbel, so ist die Summe der hyperbolischen Argumente der vier Schnittpunkte Null (oder $2\pi i$).

Insbesondere schneidet der Krümmungskreis mit dem Berührungspunkte, dessen Argument $u$ ist, die Hyperbel in einem ferneren Punkte, dessen Argument $-3u$ sein muss. Daher kommt die Aufgabe, welche Herr Milinowsky Seite 55 Nr. 83 löst, auf die Dreitheilung eines gegebenen hyperbolischen Sectors hinaus. (Vergl. hierzu Salmon-Fiedler, Kegelschnitte, Art. 252, wo der entsprechende Satz für die Kreisfunctionen ausgesprochen ist. und bezüglich der Verwendung hyperbolischer

Argumente u. A. die interessante Schrift von S. Günther, „Parabolische Trigonometrie", Teubner.)

Der Verfasser wendet sich nunmehr den gegenseitigen Beziehungen gleichseitiger Hyperbeln zu. Die früher gewonnenen Sätze lassen hier leicht erkennen, dass durch vier Punkte eine gleichseitige Hyperbel bestimmt ist und dass zwei gleichseitige Hyperbeln, welche sich in drei Punkten schneiden, den Höhenpunkt des eingeschriebenen Dreiecks zum vierten Schnittpunkte haben. Die Gesammtheit aller gleichseitigen Hyperbeln, welche einem Dreiecke umschrieben sind und durch dessen Höhenpunkt gehen, bilden ein Büschel. Die Mittelpunkte dieses Büschels liegen auf einem Kreise. Es folgen einige harmonische (projectivische) Eigenschaften, von denen wir den Satz, dass eine Asymptote und zwei Tangenten zwei gleichseitige Hyperbeln bestimmen, erwähnen.

Die jetzt folgenden Sätze ziehen die bekannten Eigenschaften des Kreisbüschels heran und so gelangen wir zu der Einsicht, dass der Ort der Mittelpunkte aller einem Dreiecke eingeschriebenen gleichseitigen Hyperbeln ein Kreis um den Höhenpunkt dieses Dreiecks ist, welcher den Umkreis desselben rechtwinklig schneidet. Als leichte Folgerungen erhält man dann die wichtigen Sätze, dass durch vier Tangenten zwei gleichseitige Hyperbeln bestimmt sind und zwei gleichseitige Hyperbeln sich mindestens in zwei reellen Punkten schneiden. Der letztere Satz ist um so interessanter, als wir hier offenbar den Specialfall $n=2$ des bekannten Gauss'schen Beweises von der Anzahl der Wurzeln einer Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades vor uns haben. Diese Bemerkung hätte auch der Verfasser machen und erhärten dürfen.

Mögen einige Randbemerkungen hier beigefügt werden. S. 7, in 9c, ebenso S. 21 in Nr. 26, S. 24 in Nr. 30 und S. 56 in Nr. 84 giebt Verfasser die Buchstaben ähnlicher Dreiecke nicht in richtiger, ähnlicher Reihenfolge. Ferner muss es wohl S. 5 in Nr. 7a statt $2q^2$ heissen $4q^2$, wie auf S. 24, wo sogar auf diese Stelle verwiesen wird, richtig zu lesen ist. In Fig. 4 fehlen die im Text vorkommenden $F$, $F_1$. Durch 14a wird 12 eingeschränkt, was nicht ausdrücklich bemerkt wird; bei 12 hätte also der Zusatz „im Allgemeinen" nicht fehlen sollen. Der Beweis des Satzes in Nr. 19 geht wohl noch einfacher aus der Aufgabe hervor, einen (zwei) Punkt zu bestimmen, der von drei gegebenen Punkten Abstände hat, die sich verhalten wie $m:n:p$. Ebenso oder noch mehr macht der Beweis des Satzes in 21a einen etwas „mühsamen" Eindruck.

Hiermit glauben wir den ersten Abschnitt des Buches hinreichend charakterisirt zu haben und werden uns von jetzt ab aus oben angegebenen Gründen grösster Kürze befleissen.

Der zweite Abschnitt behandelt die conjugirten Diameter, die Gleichung der Hyperbel und in etwas langweiliger Darstellung den Sehnensatz Nr. 27d.

Der dritte führt die Ueberschrift: Die Brennpunkte. Die einschlägige Theorie ist interessant und originell.

Gleiches Lob spenden wir gern dem folgenden, welcher die Polareigenschaften zum Gegenstande hat.

Der fünfte Abschnitt sucht die gleichseitige Hyperbel auf dem geraden Kreiskegel auf.

Der sechste liefert Ergänzungen und Aufgaben. Dabei ist der Krümmungskreis sorgfältig behandelt, auch wird die Dreitheilung des Winkels und das Delische Problem mit Hilfe der gleichseitigen Hyperbel gelöst. Ferner heben wir die Erzeugung dieser Curve aus der Geraden und eine physikalische Eigenschaft (Benetzung zweier Glasplatten) anerkennend hervor.

Der letzte Abschnitt behandelt die übrigen Kegelschnitte, insbesondere zunächst die allgemeine Hyperbel.

Fassen wir zusammen, so haben wir eine Arbeit vor uns, welche dem wissenschaftlichen Sinne des Verfassers Ehre macht. Das Streben desselben nach möglichst elementarer Darstellung ist oft von glücklichem, vielfach von befriedigendem Erfolge begleitet, und so wird das Büchlein in den Kreisen, auf welche es berechnet ist, gewiss als eine willkommene Gabe erscheinen.

Coesfeld, im August 1884. K. Schwering.

---

**Lehrbuch der ebenen Geometrie mit Uebungsaufgaben für höhere Lehranstalten.** Von Dr. Th. Spieker, Professor am Realgymnasium in Potsdam. Verlag von A. Stein in Potsdam. Sechzehnte verbesserte Auflage.

Sechzehn Auflagen zu erleben, ist nicht jedem Buche beschieden. Selbstverständlich tritt man daher an die Beurtheilung einer Schrift, welcher dies Glück zu Theil geworden ist, so oft aufgelegt worden zu sein, mit nicht niedrig gespannten Erwartungen heran. Insbesondere scheint die Aussicht gerechtfertigt, dass ein solches Schulbuch den Anforderungen der Lehrpraxis in hervorragender Weise entsprechen müsse. Allein auch für die wissenschaftliche Seite der Stoffbehandlung darf man Gutes hoffen; denn bei dem erfolgreichen Streben und Ringen, welches die Mehrzahl der neueren Schulbücher vortheilhaft auszeichnet, kann ein unwissenschaftliches Machwerk die Concurrenz nicht mehr bestehen.

Das vorliegende 326 Seiten starke Lehrbuch gliedert seinen Inhalt in vier Cursus.

Der erste geht nach einer Einleitung zur Besprechung der Lage gerader Linien über, handelt von den ebenen Figuren im Allgemeinen, von der Congruenz der Dreiecke und von den Parallelogrammen.

Wir heben aus dem ersten Cursus das Folgende hervor.

Es werden die Begriffe Gerade, Strahl, Strecke definirt und dann der Winkel im § 10 erklärt. „Der Theil der Ebene, welcher zwischen zwei von einem Punkte ausgehenden Strahlen liegt, heisst ein Winkel oder Winkelraum.“ In § 19 wird der Grundsatz aufgestellt: „Durch einen Punkt ausserhalb einer Geraden lässt sich in der Ebene stets eine aber auch nur eine gerade Linie ziehen, welche beliebig weit verlängert, die erstere nicht schneidet.“ Hierdurch ist die Definition der Parallelen zugleich gegeben. Denn es heisst sofort weiter: „Zwei gerade Linien in einer Ebene, welche beliebig weit verlängert sich nicht schneiden, heissen parallel.“ Den Schluss bilden 27 Uebungsaufgaben.

Die Darstellung hält sich von trockener Kürze ebenso fern, wie von ermüdender Ausführung selbstverständlicher Kleinigkeiten. Durch den Druck ist das Wichtige vom Unwichtigen passend für den Anfänger geschieden. In den Uebungsaufgaben kehrt derselbe Gedanke in verschiedener Fassung wieder und fordert so zur präcisen, logisch scharfen Behandlung gebieterisch auf.

Dieselben glücklichen Eigenschaften kann man den übrigen Abschnitten des ersten Cursus im Allgemeinen nachrühmen. Insbesondere liefern die 65 Uebungsaufgaben des dritten Abschnittes ein treffliches Mittel, den Inhalt des Lehrvortrages zu wiederholen und lebendig zu machen.

Im zweiten Cursus handelt der erste Abschnitt von der geometrischen Aufgabe im Allgemeinen. Der Verfasser legt die vier gewöhnlichen Requisite, als Analysis, Construction, Beweis, Determination dar und giebt als Hilfsmittel der erstgenannten, insbesondere Lehrsätze, geometrische Oerter und Reduction durch Data und Zerlegung an. Hiermit ist für den Anfänger das Nöthige gesagt, und Beispiele sorgen für Verdeutlichung. Selbstverständlich gelingt dem Schüler darum nicht die Lösung einer ihm bis dahin unbekannten Aufgabe von selbst. Dazu kann nur das Studium der Methoden, wie dies Petersen in seinem trefflichen Buche so dankenswerth gefördert hat, in Verbindung mit zahlreichen Uebungsbeispielen führen. Auch ist es keineswegs Absicht unseres Verfassers, besonders an dieser Stelle das lebendige Wort des Lehrers überflüssig zu machen. Zum ersten Abschnitte 101 Aufgaben.

Der zweite Abschnitt behandelt den Kreis. Wir finden die gewöhnlichen elementaren Sätze über Sehne, Tangente, Peripheriewinkel u. s. w. Der Stoff ist, wie überhaupt in unserem Buche, nicht in trockener Brachyologie, sondern mit einer gewissen angenehmen Behaglichkeit vorgetragen und insbesondere den Sätzen, welche zu Aufgaben führen, Aufmerksamkeit zugewandt. Dazu 130 Beispiele.

Die folgenden Abschnitte behandeln der Reihe nach die regulären Polygone, die Gleichheit der Figuren, Proportionalität und Aehnlichkeit der Figuren. Proportionen am Kreise, Ausmessung

geradliniger Figuren und des Kreises. Jeder dieser Abschnitte enthält zahlreiche Uebungsbeispiele. Wir heben besonders die interessante Behandlung des Pythagoreischen Satzes, die höchst einfache und lehrreiche Einführung des Coordinatenbegriffes in § 193 hervor und, um zu zeigen, wie sehr der Verfasser bemüht ist, auch die historisch interessanten Gegenstände dem Schüler deutlich zu machen, die Erörterungen über den Arbelus und das Salinum des Archimedes. Der Tangenten-, Sehnen-, Secantensatz erscheint in doppelter Fassung, einmal als Proportion S. 165 flg., dann auch als Rechteck S. 179. Bei dem Streben nach Vollständigkeit, welches der Verfasser so glücklich bethätigt, wollen wir hierüber nicht mit ihm rechten.

Der dritte Cursus handelt in vier Abschnitten von den Transversalen, der harmonischen Theilung, den Aehnlichkeitspunkten, Chordalen (Tactionsproblem) und den Kreispolaren.

Die Lehre von den Transversalen geht selbstverständlich von den Sätzen des Ceva und des Menelaus aus. Die Darstellung zeigt insofern didaktisches Geschick, als die Einführung der Vorzeichen bei den abgemessenen Strecken vermieden ist. Leider hat der Verfasser aber nicht den Muth gehabt, trotzdem an dem Begriffe der Theilverhältnisse festzuhalten. Vielmehr ist nun auch die Gleichheit der Producte der nicht anstossenden Seitenabschnitte behauptet. Im Gegensatze (?) zu dem geehrten Herrn Verfasser halten wir es erstens für durchaus wissenschaftlich richtig, zu sagen, eine Strecke werde im Verhältnisse $m:n$ durch zwei Punkte getheilt, von denen der eine innerhalb, der andere ausserhalb der Endpunkte liegt. Zweitens behaupten wir vom Standpunkte der Schulpraxis aus, dass die Einführung der Theilverhältnisse beim Umlaufen des Dreiecks dem Lernenden die Sache leichter macht. Wir würden an einen Gegensatz zum Verfasser nicht recht glauben, wenn nur § 232 und nicht auch die Bemerkungen S. 201 und 212 vorhanden wären. Referent würde also, und damit sei dieser Gegenstand erledigt, die Thesis S. 212, unbekümmert um Streckenvorzeichen, schreiben wie folgt:

$$\frac{YA}{YC}\cdot\frac{XC}{XB}\cdot\frac{ZB}{ZA}=1.$$

Wer als Primaner mit den Materien in dieser Form bekannt geworden ist, dem wird die Einführung der Streckenvorzeichen keine Schwierigkeiten machen. Vielleicht aber wohl umgekehrt.

Die früher gerühmten Vorzüge des Lehrvortrages können wir im Uebrigen in besonders lebhafter Betonung an dieser Stelle wiederholen. Namentlich angesprochen haben uns die schönen Uebungen zum vierzehnten Abschnitt und die Behandlung des fünften merkwürdigen Punktes am Dreieck. Der Verfasser versteht darunter den Schnittpunkt der drei Ecktransversalen nach den Berührungspunkten der angeschrie-

benen Kreise. Das Tactionsproblem erscheint in älterer und neuerer Lösung.

Der vierte Cursus trägt einen mehr rechnerischen Charakter. Er zerfällt in vier Abschnitte, welche die Anwendung der Algebra auf geometrische Probleme, metrische Relationen am Dreiecke, die Kreisberechnung und vermischte Uebungen enthalten.

Die algebraische Analysis geometrischer Probleme ist ein ebenso interessanter wie nützlicher Gegenstand des Gymnasialpensums. Der Verfasser behandelt ihn ebenso gründlich wie klar. Die Discussion der Formeln ist durchweg musterhaft.

Fassen wir unser Urtheil zusammen, so sind die eingangs ausgesprochenen Erwartungen des Referenten durch dasselbe erfüllt, ja überboten worden. Nach unserer besten Ueberzeugung wird es sich dem Unterrichte an höheren Lehranstalten mit Erfolg zu Grunde legen lassen, wobei selbstverständlich der vorsichtige Lehrer sich nicht darauf steifen wird, Alles durchzunehmen. Insbesondere empfehlen wir es den Herren Collegen zum Selbstgebrauche und als Aufgabensammlung.

Coesfeld, den 8. Mai 1884. K. Schwering.

---

**Ueber einem Dreieck um- und eingeschriebene Kegelschnitte.** Inauguraldoctordissertation von K. Dörholt. Münster, 1884.

Verfasser beabsichtigt, einen Theil der von Steiner in Crelle's Journal Bd. 55 S. 356 gemachten Mittheilungen zu beweisen. Auf andere Arbeiten des berühmten Geometers, insbesondere die Abhandlung: „Teoremi relativi alle coniche inscritte e circoscritte“, Crelle Bd. 30, ist ebenfalls Rücksicht genommen.

Die Dissertation zählt 88 Seiten Octav mit recht hübschen beigegebenen Figuren. Der Inhalt ist im Allgemeinen ansprechend, das Material wohl geordnet und im Ganzen übersichtlich. Die Darstellung vermeidet trotz vorwiegend synthetischer Richtung nicht ängstlich die Rechnung. Darf man aus der Schrift auf den Studiengang des Verfassers schliessen, so hat er die Vorlesungen von Professor Sturm in Münster mit Fleiss und Nutzen gehört. K. Schwering.

---

**Lettre de Charles-Frédéric Gauss au Dr. Henri-Guillaume-Mathias Olbers** en date de „Braunschweig den 3. September 1805“ publiée par B. Boncompagni d'après l'original possédé par la société royale des sciences de Göttingen. Berlin, Institut de Photo-lithographie des Frères Burchard, Imprimerie de Gustave Schade (Otto Francke), 1883

Der in der Ueberschrift genannte, vier grosse Seiten füllende Brief von Gauss an Olbers ist nicht ganz unbekannt geblieben. Schon 1877

hat Herr Schering Theile desselben der Oeffentlichkeit übergeben. Man wird sich nichtsdestoweniger freuen dürfen, in dem meisterhaft gelungenen Abdruck des ganzen Briefes eine Erinnerung an die zierliche, deutliche Handschrift des grossen Mathematikers zu besitzen, welche bis in seine letzten Lebensjahre sich nur sehr unwesentlich veränderte. Ausser dem photolitographischen Abdrucke hat Fürst Boncompagni auch einen Abdruck des Briefes, im Urtexte, sowie in einer von Herrn Sparagna besorgten italienischen Uebersetzung, im Aprilhefte 1883 seines Bulletino di Bibliografia u. s. w. anfertigen lassen und hat endlich am 20. Mai 1883 der Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei in Rom eine Abhandlung vorgelegt, welche in den Atti dieser Gesellschaft (Tomo XXXVI) erschien und in besonderem Abdrucke unter dem Titel: „Intorno ad una lettera di Carlo Federico Gauss al Dr. Enrico Guglielmo Mattia Olbers. Memoria di B. Boncompagni" (95 S.) in unseren Händen ist. Mit gewohnter peinlicher Sorgfalt sind in dieser Abhandlung die Worte des Briefschreibers einzeln mit Belegstellen versehen. Unter Anderem macht der Verfasser darauf aufmerksam, dass die Ehe zwischen Minna Gauss, der Tochter Gauss' aus erster Ehe, und dem Orientalisten Ewald am 15. September 1830 geschlossen wurde, und dass der Todestag der zweiten Frau von Gauss, Minna Waldeck, auf den 12. September 1830 fiel, zwei Daten, welche, wie es scheint, noch in keinem Buche abgedruckt waren.

Cantor.

---

**Die Entwickelung der Mathematik** in den letzten Jahrhunderten. Von Dr. Hermann Hankel, vorm. ord. Professor der Mathematik in Tübingen. II. Auflage mit einem Vorwort von Dr. P. du Bois-Reymond, ord. Professor der Mathematik an der Universität Tübingen. Tübingen, Verlag und Druck von Franz Fues (L. Fr. Fues'sche Sortiments-Buchhandlung), 1885. 27 S.

Die Antrittsvorlesung Hankel's, mit welcher er am 29. April 1869 für seine Aufnahme in den akademischen Senat der Universität Tübingen dankte, ist seit einer Reihe von Jahren vergriffen, so dass die Buchhandlung, welche dieselbe verlegt hatte, wiederholt in der Lage war, Bestellungen ablehnen zu müssen. Lohnte es einen neuen Abdruck zu veranstalten? Herr P. du Bois-Reymond hat die an ihn gerichtete Frage bejaht, und Referent schliesst sich dieser seiner Beantwortung gern an. Schon Herr Du Bois-Reymond hat allerdings in seinem Vorworte betont, dass neue seit Hankel's Tod gemachte Fortschritte, die natürlich 1869 noch nicht berücksichtigt werden konnten, einer Rede des Charakters, wie Hankel sie damals beabsichtigte, heute ein anders auszusprechendes Ende geben müssten. Man kann getrost hinzufügen, dass nicht minder wesentliche Aenderungen auch in jenen Theilen der Rede, welche auf

frühere Zeiten sich beziehen, vorzunehmen wären, da die heutigen Auffassungen der Geschichte der Mathematik beträchtlich von denen abweichen, welche Hankel sich gebildet hatte. Aber immerhin handelt es sich doch nur um nöthige Aenderungen, oder sprechen wir es mit dem härtesten Worte aus: um kleine Unrichtigkeiten im Einzelnen. Die geschichts-philosophische Idee der Rede bleibt davon unberührt, unberührt also auch der Werth, den diese für den Leser behält und so lange behalten wird, als antike und moderne Mathematik als nicht blos dem Grade, sondern auch der Natur nach verschieden dastehen und eine Darlegung ihres inneren Gegensatzes verlangen. In diesem Sinne ähnelt die Rede manchen Einleitungscapiteln Lagrange'scher Schriften und wird gleich diesen ihre Entstehungszeit weit überdauern.

CANTOR.

---

**Einleitung in die Analysis des Unendlichen.** Von LEONHARD EULER. I. Theil. Ins Deutsche übertragen von H. MASER. Berlin 1885, Julius Springer. X, 319 S.

Der Band, über dessen Erscheinen wir berichten, ist nur der erste einer Sammlung von klassischen Werken, die, im Original längst vergriffen und auch in Uebersetzungen schwer erhältlich, überdies durch die veraltete Form der Uebersetzung fast ungeniessbar, gleichwohl verdienen, auch von Mathematikern der Jetztzeit gelesen und studirt zu werden. Glaube doch ja Niemand, der die Vorlesungen auch unserer berühmtesten Universitätslehrer gehört und ausgearbeitet hat, er sei jetzt so erhaben über dem Standpunkt jener Männer, auf deren Schultern seine Lehrer selbst stehen, dass er von ihnen unmittelbar Nichts mehr lernen könne! Selbst die Mängel, welche er in den Musterschriften vergangener Zeiten zu erkennen im Stande ist, werden ihn belehren, und sei es auch nur über die nothwendige Mangelhaftigkeit der Gegenwart. Wenn so Vieles nicht mehr wahr ist, was die bedeutendsten Schriftsteller der Vergangenheit in unserer Wissenschaft lehrten, wer möchte da so zuversichtlich sein, an die für alle Zeiten gesicherte Wahrheit dessen zu glauben, was manche Eintagsfliege unter den mit uns Lebenden laut ausposaunt? Doch auch die Kehrseite fehlt nicht. Wenn jene Klassiker, trotzdem sie Hilfsmittel und Prüfsteine nicht kannten, die heute jedem Anfänger zu Gebote stehen, so Vieles schufen, was seinen Werth behielt, so wird auch der Zweifelsüchtigste des Trostes nicht entbehren, dass neben dem Wechselnden das Bleibende in unserer Wissenschaft doch weit überwiegt, und dass der Fortschritt, dessen Verdienst wir damit wahrlich nicht zu schmälern beabsichtigen, vielfach nur darin besteht, einen lückenlosen Weg nach Gipfelpunkten zu führen, wohin das Genie über Abgründe und unwegsam steile Wände vorausgeflogen war.

Die Schriften, welche in neuer deutscher Uebersetzung zunächst der Oeffentlichkeit übergeben werden sollen, sind der I. Band der Euler'schen Introductio in analysin infinitorum, Cauchy's Analyse algébrique, Diophant's Arithmetik mit den Fermat'schen Anmerkungen, die Abhandlungen von Vandermonde. Vor einer Uebereilung der Diophant-Ausgabe möchten wir warnen. Von diesem Schriftsteller thut zuerst eine gereinigte Textausgabe Noth, und bevor diese erschienen ist, was, wie wir anzunehmen Grund haben, nicht gar lange mehr anstehen dürfte, ist es sehr gewagt, eine neue Uebersetzung herauszugeben.

Heute haben wir den Euler'schen Band vor uns. Von ihm gilt in ganz hervorragendem Maasse, was wir oben allgemein sagten. Das lateinische Original von 1748 ist ziemlich selten und durch zahlreiche Druckfehler entstellt. Michelsen's Uebersetzung von 1788 ist in einem Deutsch gehalten, dem man Lessing's Einwirkung auf unsere Sprache noch nicht anmerkt. Es gehörte ein Entschluss dazu, das Werk in dieser Gestalt zu lesen. Und doch ist es der Keim, aus welchem die ganze moderne algebraische Analysis hervorgegangen ist und aus welchem noch weitere Folgerungen zu ziehen einem heutigen fachkundigen Leser vielleicht nicht unmöglich, ja nicht einmal allzu schwierig sein dürfte. Die neue Uebersetzung ist, soviel wir sie ansehen konnten, recht geschmackvoll und keineswegs so modernisirt, dass sie eine blosse Bearbeitung darstellte. Auch eine solche hätte ja beabsichtigt werden können, aber wir stimmen dem Uebersetzer und dem Verleger bei, dass es zweckmässiger war, die Treue an das Original vollständig zu wahren. Gestattete man sich einmal Aenderungen, so war es schwer, denselben Grenzen zu ziehen, und der Leser hätte alsdann nicht vor sich gehabt, was er vor sich haben soll: ein Euler'sches Werk.

Warum nur der erste Band übersetzt wurde, der zweite dagegen ausgeschlossen bleibt? Wir können diese Frage nicht genügend beantworten. Uns scheint auch die analytische Geometrie Euler's, und diese bietet der II. Band der Introductio, keineswegs des heutigen Studiums unwürdig, und insbesondere diejenigen Capitel, welche Curven höherer Ordnung gewidmet sind, möchten als vergleichende Nebenstudien dem Lesen der Schriften von Möbius und Plücker vortheilhaft an die Seite gestellt werden.

Cantor.

---

**Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerthe.** Von Emanuel Czuber. Mit 115 in den Text gedruckten Figuren. Leipzig, Verlag von B. G. Teubner. 1884. VII, 244 S.

Vor fünf Jahren hat der Verfasser eine deutsche Bearbeitung der Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung veranstaltet, welche A. Meyer in den Jahren 1849—1857 an der Universität Lüttich gehalten und

welche nach dessen Tode Herr F. Folie ebendaselbst herausgegeben hatte. So reichhaltig der Inhalt jener Vorlesungen war, eine Lücke zeigten sie doch beim ersten Anblick. Es fehlten jene geometrischen Betrachtungen zur Lösung gewisser Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung, welche, von einigen vorzugsweise französischen und englischen Schriftstellern benutzt, eine Brauchbarkeit enthüllten, die ganz geeignet war, das theoretische Interesse an dem geistigen Zusammenhang scheinbar so verschiedener Gebiete zu erhöhen. Das heute in unseren Händen befindliche Buch hat den Zweck, jene Lücke auszufüllen, indem es gerade mit den geometrischen Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen sich ausführlicher beschäftigt, als es möglich und gestattet gewesen wäre, wenn es nur um eine Abtheilung eines grösseren Werkes sich handelt.

Die erste Vorfrage, welche sich aufdrängt, ist die, ob jener Zusammenhang zwischen den geometrischen Gebilden und den Wahrscheinlichkeitsgrössen, die sie zu versinnlichen bestimmt sind, ein nothwendiger oder ein nur hypothetischer ist, und der Verfasser selbst ist ihr nicht aus dem Wege gegangen. Er gesteht S. 7: „Es ist wiederholt vorgekommen, dass Probleme über geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerthe abweichende Lösungen gefunden haben. Der Grund hierfür lag immer in der verschiedenen Auffassung des Begriffes willkürlich, dessen Bedeutung thatsächlich nicht immer so klar zu Tage liegt, um Meinungsverschiedenheiten auszuschliessen.“ Ein willkürlicher Punkt auf einer Curve z. B., erläutert Herr Czuber, kann heissen: entweder ein Punkt, der von dem nächstgelegenen ebenso willkürlichen Punkte eine curvenmässige Entfernung $ds$ besitzt, oder ein Punkt, dessen Abscisse um $dx$ von der des nächstgelegenen willkürlichen Punktes sich unterscheidet, oder ein Punkt, dessen Verschiedenheit von dem nächstgelegenen willkürlichen Punkte durch den Winkel $d\vartheta$ gemessen wird, welchen die beiden vom Coordinatenanfangspunkt dorthin gerichteten Leitstrahlen mit einander bilden u. s. w. Jede dieser Annahmen setzt eine verschiedene Dichtigkeit von gewissen unendlich kleinen Raumgrössen, eine gleiche Dichtigkeit von anderen als nothwendig voraus, aber es sind nicht immer die gleichen Raumbestandtheile, welche die gleiche Rolle spielen. So muss, je nach der getroffenen Wahl, bald dieser, bald jener Werth sich ergeben. Welcher aber ist der richtige? Wir fürchten, es dürfte eine Entscheidung darüber meistens unmöglich und die geometrische Betrachtung dadurch vielfach mehr geistreich als zweckmässig sein. Schon der Satz (S. 6), dass der Inhalt eines Gebietes von $n$ Variabeln als ein Maass für die Anzahl der Werthverbindungen anzusehen sei, welche dieses Gebiet ausmachen, also die Grundlage aller Betrachtungen ist nur dann wahr, wenn die Punkte des Gebietes in einer ganz bestimmten Weise als gleich dicht verbreitet gedacht werden. Freilich hat dieses Bedenken Mathematiker allerersten Ranges nicht abgehalten, den erwähnten Satz als selbstverständlich wahr anzuwenden, und wir benutzen diese Gelegenheit zur

Veröffentlichung einer ähnlichen, so weit uns bekannt, noch nicht gedruckten Notiz, welche aus einer Vorlesung von Gauss über die Methode der kleinsten Quadrate aus dem Jahre 1850 stammt. Der Gegenstand ist zwar in der Recension von Gauss: Einige Bemerkungen zu Vega's Thesaurus Logarithmorum (Astronomische Nachrichten Nr. 756 vom 2. Mai 1851 und Werke, Bd. III S. 257—264) kurz berührt, der Wahrscheinlichkeitsbetrachtung aber dort nicht gedacht.

Gauss verglich die Endziffern von je 900 aufeinander folgenden Logarithmen von Sinus, Cosinus und Tangente der gleichen Winkel auf ihr Geradsein oder Ungeradsein. Zunächst betrachtete er jede Columne für sich und fand, wenn $g$, $u$ gerade und ungerade, I, II, III der Reihe nach die drei Columnen bedeuten, in I: $449g + 451u$, in II: $459g + 441u$, in III: $437g + 463u$, also durchschnittlich ebenso oft $g$ als $u$. Betrachtete er I und II gemeinschaftlich, so fand er, wenn die Stellung der Buchstaben den Columnen entspricht, welchen die jedesmaligen Endziffern angehören: $230gg + 219gu + 229ug + 222uu$, also wieder jede der vier Möglichkeiten annähernd gleich oft; dasselbe traf zu, wenn I und III, sowie wenn II und III gemeinschaftlich betrachtet wurden. Nun untersuchte er die drei Columnen gleichzeitig und fand $173ggg + 167guu + 176ugu + 159uug + 57ggu + 52gug + 53ugg + 63uuu$, also eine so bedeutende Verschiedenheit, dass die vier ersteren Combinationen zusammen 675 mal, die vier letzteren zusammen 225 mal im Häufigkeitsverhältnisse $3:1$ vorkamen. Diese im ersten Augenblick auffallende Abweichung von dem Gleichmaasse der Möglichkeiten beruht auf der Abhängigkeit der in den drei Columnen stehenden Zahlen von einander ($\log\sin = \log\cos + \log\operatorname{tng}$), von welcher auch bei der wirklichen Berechnung Gebrauch gemacht wird. Man müsste sogar infolge dieser Abhängigkeit erwarten, dass nur die Combinationen $ggg$, $guu$, $ugu$, $uug$ vorkommen, und zwar annähernd gleich oft. Dass auch die vier anderen Combinationen vertreten sind, hat seinen Grund darin, dass in allen drei Columnen nicht genaue, sondern abgekürzte Zahlen stehen, mithin die Endziffern $a$, $b$, $c$ dreier nebeneinander befindlicher Zahlen eigentlich $a + \alpha$, $b + \beta$, $c + \gamma$ bedeuten, wo $\alpha$, $\beta$ $\gamma$ das zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ liegende bei der Abkürzung Vernachlässigte bedeutet, und nicht $a = b + c$, sondern $a + \alpha = b + \beta + c + \gamma$ die genaue Beziehung zwischen den Columnen darstellt. Ist $\beta$ mit $\gamma$ verschiedenen Zeichens, so ist sicherlich $|\beta + \gamma| < \frac{1}{2}$, mithin $a = b + c$. Dasselbe $|\beta + \gamma| < \frac{1}{2}$ kann auch eintreten, wenn $\beta$ und $\gamma$ gleichen Zeichens sind, und hat alsdann wieder die Folge $a = b + c$. Aber im Falle gleichgezeichneter $\beta$ und $\gamma$ kann auch $|\beta + \gamma| > \frac{1}{2}$ sein, worauf $a = b + c \pm 1$ entsteht. Diese wohl zu unterscheidenden Fälle zeichnete Gauss in einer Figur. Auf einem rechtwinkligen in $O$ sich schneidenden Coordinatenkreuz ist $OB = \frac{1}{2}$ auf der positiven Seite der Abscissenaxe aufgetragen. Die Stücke gleicher Länge $OB'$, $OC$, $OC'$ sind auf der negativen Seite der Abscissenaxe, auf der posi-

tiven und negativen Seite der Ordinatenaxe abgemessen. Parallel zu den Coordinatenaxen sind durch $B$ die $ED$, durch $C$ die $DD'$, durch $B'$ die $D'E'$, durch $C'$ die $E'E$ gezogen, die das aus vier kleinen Quadraten bestehende grössere Quadrat $DD'E'E$ bilden. Endlich sind die beiden kleinen Diagonalen $BC$, $B'C'$ gezogen. Auf der Abscissenaxe sind die Werthe von $\beta$, auf der Ordinatenaxe die von $\gamma$ aufgetragen. Nun ist sofort klar, dass ungleichgezeichnete $\beta$ und $\gamma$ in den kleinen Quadraten $OBE'C'$ und $OCD'B'$, gleichgezeichnete $\beta$ und $\gamma$ mit der $\frac{1}{2}$ nicht überschreitenden Summe in den Dreiecken $OBC$ und $OB'C'$ stattfinden. Gleichgezeichnete $\beta$ und $\gamma$ mit der zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 wechselnden absoluten Summe finden sich in den Dreiecken $BCD$ und $B'C'E'$. Die beiderlei Gebiete haben daher Flächenräume, die sich wie $3:1$ verhalten, und ebenso verhält sich demnach das Eintreffen von $a=b+c$ zu dem von $a=b+c\pm 1$, d. h. von den vier ursprünglichen Combinationen zu den vier nachträglich hinzugekommenen. Es liegt auf der Hand, dass dabei die nicht ausgesprochene Hypothese mit unterläuft, alle irgend möglichen Werthepaare $\beta$, $\gamma$ seien in genau gleichem Maasse möglich.

Solcherlei Methoden sind es auch, die begreiflicherweise in verschiedenen Abarten, bald durchaus elementargeometrisch, bald Lehren der analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes voraussetzend, die erste Hauptabtheilung des Czuber'schen Buches füllen. Ein zweiter kürzerer Theil (S. 184—244) handelt von den geometrischen Mittelwerthen. Die Berechtigung dieser Aufgaben, an dem gedachten Orte behandelt zu werden, beruht darauf, dass ähnlich wie bei Wahrscheinlichkeiten es sich um einen Quotienten handelt, dessen Zähler die Summe der Einzelwerthe, dessen Nenner deren Anzahl bedeutet. So ist der Mittelwerth einer Function $y=\mathfrak{F}(x)$ im Intervalle $a \leqq x \leqq b$ sofort

$$\frac{\mathfrak{F}(a)+\mathfrak{F}(a+\Delta x)+\mathfrak{F}(a+2\Delta x)+\ldots+\mathfrak{F}(b-\Delta x)}{\frac{b-a}{\Delta x}}=\frac{1}{b-a}\sum_a^b \mathfrak{F}(x)\,.\,\Delta x,$$

und bei stetig aufeinander folgenden $x$ wird der Mittelwerth

$$M=\frac{1}{b-a}\int_a^b \mathfrak{F}(x)\,dx.$$

Analytisch betrachtet, handelt es sich also in diesem Theile um die Auswerthung bestimmter Integrale, und wirklich ist der gleiche Gegenstand von anderen Schriftstellern (z. B. Schlömilch, Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis, II. Theil: Aufgaben aus der Integralrechnung §§ 33 und 34) zur Uebung auf diesem Gebiete benutzt worden. Freilich geht Herr Czuber weiter als diese seine Vorgänger, indem er ein viel reicheres Material an Beispielen zusammenzustellen wusste.

Cantor.

**Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung.** Von J. A. SERRET, membre de l'institut et du bureau des longitudes. Mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von Dr. AXEL HARNACK, Professor am Polytechnikum zu Dresden. Erster Band. Differentialrechnung. Mit in den Text gedruckten Figuren. Leipzig, B. G. Teubner. 1884. X, 567 S.

Nicht leicht wird ein Lehrer an einer Hochschule sich in seinen Vorlesungen an ein im Drucke vorhandenes Werk genau anschliessen, wobei wir nicht einmal den Fall ausnehmen, dass er selbst ein solches verfasste; aber nicht leicht wird er auch darauf verzichten, seinen Schülern ein Druckwerk zu empfehlen, welches ihnen zum Nachlesen und Nachschlagen diene. In kaum irgend einem Gebiete der Mathematik wird dabei die Qual der Wahl eine so grosse sein, als in der Differential- und Integralrechnung. Sollen wir die Wahrheit dieser Behauptung durch Namensnennung empfehlenswerther und vielfach empfohlener Schriften bestätigen? Wohl kein Leser dieser Zeitschrift wird solcher Bestätigung bedürfen. Heute haben wir nun ein Werk anzuzeigen, welches sicherlich bald zu den meistempfohlenen gehören wird. Herrn Serret's Lehrbuch geniesst in Frankreich eines wohlverdienten glänzenden Rufes. In Russland wird es, wenn wir recht berichtet sind, officiell dem Unterrichte in der Differential- und Integralrechnung zu Grunde gelegt. In Deutschland war es, so lange nur der französische Text zugänglich war, vielleicht etwas weniger verbreitet als der gleichfalls nur französisch vorhandene Cours d'analyse von Sturm. Wir glauben, dass ihm damit Unrecht geschah. Gewiss war das Buch von Sturm einmal vortrefflich. Wir bereuen kein Wort, welches wir 1864 im IX. Bande dieser Zeitschrift zu dessen Lob gesagt haben. Gewiss würde Sturm, wenn er nicht im Alter von erst 52 Jahren 1855 durch den Tod aus seiner Schaffenslust gerissen worden wäre, sein Werk in neuen Auflagen auf der Höhe der Wissenschaft erhalten haben. Aber den Herausgebern des nachgelassenen Werkes verbot die Pietät selbst jede wesentliche Aenderung, und so können wir heute nur noch sagen: Sturm's Buch war vortrefflich. Der Lehrer wird stets ein nachahmungswürdiges Muster in demselben erkennen, dem Gebrauche des Schülers aber ist es in einzelnen Capiteln nicht mehr zu genügen im Stande. Herr Serret dagegen hat erst 1879—1880 die II. Auflage seines Werkes neuesten Anforderungen angepasst, und dass die Zusätze, durch welche der deutsche Bearbeiter seine Uebersetzung bereichert hat, die Strenge der Beweisführungen nur zu verstärken dienten, wird Niemand zweifelhaft sein, der Herrn Harnack's Richtung aus seinen Originalarbeiten kennt. Sollen wir aus dem I. Bande, der heute allein fertig vorliegt, besonders gelungene Capitel hervorheben, so bieten sich die Einleitung und die geometrischen Anwendungen der Differentialrechnung von selbst dar. Dort wird namentlich das Unendlichkleine und seine verschiedenen Ordnungen so genügend behandelt,

dass die weitere Rechnung mit Differentialen eigentlichem Bedenken nicht mehr unterliegt, wenn auch Referent nicht verschweigen will, dass er persönlich es vorzieht, Anfänger nur mit Differentialquotienten rechnen zu lassen, und also darin Herrn Serret nicht beipflichten kann. Die geometrischen Anwendungen sind weitaus vollständiger als in irgend anderen Differentialrechnungen und können vorzugsweise empfohlen werden. Der I. Band heisst der der Differentialrechnung und enthält noch kein Integralzeichen; dagegen kommen Integrirungen in grosser Menge ohne jenes Zeichen vor, statthaft gemacht durch den frühe geführten Beweis des Satzes, dass Functionen, welche gleiche Ableitungen besitzen, sich nur um eine constante Differenz unterscheiden können. Die letzten vier Druckbogen enthalten bereits eine Einleitung in die Lehre von den Functionen complexer Veränderlichen.

CANTOR.

---

**Graphisch-mechanische Methode zur Auflösung der numerischen Gleichungen.** Von Dr. C. REUSCHLE, Professor an der technischen Hochschule in Stuttgart. Stuttgart, J. B. Metzler. 1884. IV, 64 S.

Herr Matthiessen hat in seinem bekannten, ungemein reichhaltigen Werke „Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen“ (S. 921—963) eine Anzahl graphischer Methoden zur Construction der Wurzeln von Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades zusammengestellt. Sie alle, so bemerkt Herr Reuschle mit Recht, verlangen für jede besonders gegebene Gleichung eine besondere Construction. Graphisch-mechanisch könnte man dagegen eine Methode nennen, welche gewisse Zeichnungen auf Pauspapier ein für alle Mal herstellen würde, die alsdann über anderen gleichfalls, zum Voraus gezeichneten Figuren verschoben, durch dieses mechanische Verfahren die Gleichungswurzeln kennen lehrte. Eine derartige Methode ist die von Herrn Reuschle erfundene.

Sei die quadratische Gleichung $x^2+bx+c=0$ zu lösen. Ihre Wurzeln stimmen überein mit den $x$-Werthen des Gleichungspaares $y-\left(c-\frac{b^2}{4}\right)=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2$ und $y=.0$ Die zweite Curve ist die Abscissenaxe des rechtwinkligen Coordinatensystems, die erste ist eine Parabel $\eta^2=\xi$, deren Axe der früheren Ordinatenrichtung parallel läuft und deren Scheitelpunkt in $x_0=-\frac{b}{2}$, $y_0=c-\frac{b^2}{4}$ liegt. Zeichnet man also jene Parabel $\eta^2=\xi$ auf Pauspapier, sowie ein rechtwinkliges Coordinatensystem auf Millimeterpapier und legt jene vorgeschriebenermassen auf dieses, so schneidet die Parabel die Abscissenaxe in den beiden die reellen Wurzeln darstellenden Punkten.

Sei die cubische Gleichung $x^3+bx^2+cx=d$ zu lösen. Das Gleichungspaar $y-\left(c-\frac{b^2}{4}\right)=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2$ und $xy=d$ stellt die gleiche Parabel $\eta^2=\xi$

in der gleichen Lage, wie sie eben besprochen wurde, und eine Hyperbel dar, deren Asymptoten unsere Coordinatenaxen sind. Letztere wird auf Millimeterpapier gezeichnet, erstere darauf gelegt. Vier Durchschnittspunkte erscheinen allerdings, von denen aber nur drei die reellen Wurzelwerthe der gegebenen Gleichung als Abscissen besitzen, während der vierte Punkt (der $\infty$-ferne Punkt der Ordinatenaxe) ausser Betracht bleibt.

Sei eine biquadratische, auf die Form $x^4+bx^3+cx^2=e$ gebrachte Gleichung zu lösen. Sie wird wieder durch zwei Curven ersetzt, durch die auf Pauspapier gezeichnete Parabel $y-\left(c-\frac{b^2}{4}\right)=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2$ und durch die auf Millimeterpapier construirten Curven dritten Grades $x^2y=e$. Von den sechs Durchschnittspunkten kommen zwei nicht in Betracht, nämlich der doppelt auftretende $\infty$-ferne Punkt der Ordinatenaxe, welcher Rückkehrpunkt der Unicursalcurven $x^2y=e$ ist. Der algebraische Ursprung dieser beiden und des im vorigen Beispiel erwähnten einen unendlich entfernten Punktes ruht augenscheinlich darin, dass die Gleichungen dritten und vierten Grades hier als Sonderfälle von Gleichungen vierten und sechsten Grades mit Nullcoefficienten des höchsten, beziehungsweise der beiden höchsten Glieder auftreten.

Herr Reuschle begnügt sich selbstverständlich nicht mit den hier gegebenen Andeutungen. Er erörtert genau die verschiedenen Schwierigkeiten, welche sich darbieten können. Er dehnt seine Methode auf Gleichungen fünften, sechsten, siebenten Grades aus, bei denen weniger einfache Curven zum Schnitte gelangen. Er zeigt, wie auch noch anders als hier besprochen, eine Gleichung als Eliminationsresultante zweier Gleichungen aufgefasst werden kann, so dass die Pauspapiercurve anders gestaltet nicht mehr jene einfache Parabel ist. Der Grundgedanke bleibt aber stets unverändert und dürfte in seiner Einfachheit dem anspruchslosen, hübsch ausgestatteten Büchlein Leser und Freunde zu erwerben im Stande sein.

Cantor.

---

**Ueber Beta- und Gammafunctionen.** Von Dr. J. Anton Schobloch. Halle, Louis Nebert. 1884. 4°. 11 S.

Ausgehend von den bekannten Gleichungen und Formeln für die Euler'schen Integrale leitet der Verfasser unter Zuhilfeziehung von $\int_0^\infty\left(e^{-ax}-e^{-bx}\right)\frac{dx}{x}=\log\frac{b}{a}$ einige neue Integralformeln ab, z. B. die für ganzzahlige $a$, $b$ und $k$ giltige Gleichung:

$$\frac{B\left(a,b+\frac{1}{k}\right)\cdot B\left(a,b+\frac{2}{k}\right)\cdots B\left(a,b+\frac{k-1}{k}\right)}{B\left(b,a+\frac{1}{k}\right)\cdot B\left(b,a+\frac{2}{k}\right)\cdots B\left(b,a+\frac{k-1}{k}\right)}=k^{(a-b)k}\left[\frac{(a-1)!}{(b-1)!}\right]^k\frac{\Gamma(bk)}{\Gamma(ak)}.$$

Das Hauptgewicht legt der Verfasser auf eine Function $\psi(m,n) = \int_0^\infty x^{m-1} e^{-x^n} dx$, welche, wie sie eine Verallgemeinerung der Gammafunction ist, in die sie bei $n=1$ übergeht, auch auf Gammafunctionen sich zurückführt. Die Substitution $x^n = y$ führt nämlich jenes Integral in die Form $\frac{1}{n}\int_0^\infty y^{\frac{m}{n}-1} e^{-y} dy$ über, mithin ist $\psi(m,n) = \frac{1}{n}\Gamma\frac{m}{n}$. Für die $\psi$-Functionen wird das Productentheorem bewiesen:

$$\frac{\psi(m,n).\psi(m+k,n).\psi(m+2k,n)\ldots\psi(m+(p-1)k,n)}{\psi(m,k).\psi(m+n,k).\psi(m+2n,k)\ldots\psi(m+(q-1)n,k)} = (2\pi)^{\frac{n-k}{2}}\frac{k^q}{n^p}\left(\frac{k}{n}\right)^{p\cdot\frac{m}{n}+\frac{pq}{2}-\frac{p+q}{2}}.$$

Daraus folgt dann wieder durch Umsetzung in Gammafunctionen

$$\frac{\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{m+k}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{m+(p-1)k}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{k}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{m+n}{k}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{m+(q-1)n}{k}\right)} = 2\pi^{\frac{n-k}{2}}\left(\frac{k}{n}\right)^{p\frac{m}{n}+\frac{pq}{2}-\frac{p+q}{2}},$$

eine Erweiterung des Gauss'schen Productentheorems, aus welcher letzteres durch $q=1$, $k=1$, $p=n$, $m=an$ hervorgeht.

CANTOR.

---

**Ueber die quadratischen und cubischen Gleichungen** mit besonderer Berücksichtigung des irreducibeln Falles bei den letzteren. Von Professor C. HELLWIG, Oberlehrer am Realgymnasium zu Erfurt. Erfurt, Verlag von Carl Villaret. 1884. 41 S.

Wer diese Schrift zu beurtheilen wünscht, ist durch den Mangel jeglicher Vorrede in eine missliche Lage versetzt. Er kann nämlich nicht die Absichten des Verfassers aus dessen eigenen Erklärungen entnehmen, und ebenso wenig gehen dieselben aus dem Schriftchen selbst hervor. Einem Gymnasialschüler wird man nicht leicht ein besonderes Büchelchen als Leitfaden für den Unterricht in einem einzelnen Capitel in die Hand geben. Einem Gymnasiallehrer sagt das Büchelchen zu wenig Neues; soll es ihm aber ein didaktisches Muster geben, wie er vorschlagsweise den behandelten Gegenstand unterrichten solle, so müssten wir ihn doch mahnen, dem Beispiele nur vorsichtig und nicht unter strenger Nachahmung zu folgen. Was braucht es S. 13 eine Reihenentwickelung, um die eine unendlich grosse Wurzel der Gleichung $ax^2 = bx + c$ bei $a=0$ kennen zu lehren, wo die landläufige Umformung der beiden Wurzelwerthe $x = \frac{2c}{\sqrt{b^2+4ac}-b}$ und

$x_2 = \frac{-2c}{\sqrt{b^2+4ac}+b}$ vollkommen ausreicht? Wem soll S. 16 die Ableitung des Moivre'schen Theorems genügen? Beachtenswerth dagegen dürfte die S. 33 gelehrte Herleitung der Ferro'schen Formel sein. Die aufzulösende cubische Gleichung ist in der Gestalt $x^3+3ax=2b$ gegeben, aus welcher auch $x^3+3ax-v^3=2b-v^3$ folgt. Nun ist $(x-v)^3=x^3+3v(v-x)x-v^3$, folglich liefert die Voraussetzung $v(v-x)=a$ die neue Gleichung $(x-v)^3 = 2b-v^3$ und diese $x=v+\sqrt[3]{2b-v^3}$. Der eben gefundene Werth von $x$ giebt aber jener Voraussetzung die Gestalt $-v\sqrt[3]{2b-v^3}=a$, woraus $v^6-2bv^3=a^3$, $v^3=b\pm\sqrt{b^2+a^3}$, $2b-v^3=b\mp\sqrt{b^12+a^3}$ folgt, und diese Werthe wieder in $x=v+\sqrt[3]{2b-v^3}$ eingesetzt, liefert endlich eben die Ferro'sche Formel. Die Auflösung der cubischen Gleichungen mit Hilfe trigonometrischer Functionen S. 38—41 hätte wohl in etwas mannichfaltigerer Weise behandelt werden dürfen, wozu es an Stoff sicherlich nicht fehlt, wie Matthiessen's Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen S. 888—912 beweisen.

CANTOR.

---

**Théorie des approximations numériques.** Notions de calcul approximatif par CH. GALOPIN-SCHAUB, Docteur ès sciences mathématiques (de la Faculté de Paris). Genève, H. Georg. 1884. 50 S.

Wir haben Bd. XXVI, hist.-lit. Abthlg. S. 149—150, über Ruchonnet, Élements de calcul approximatif, berichtet. Ohne mit jenem sehr empfehlenswerthen Büchlein sich zu decken, ist die uns heute vorliegende Abhandlung doch nicht als ganz unabhängig von demselben zu bezeichnen. Herr Galopin verweist sogar wiederholt und mit Recht auf seinen Vorgänger. Wir wollen die Veröffentlichung des Herrn Galopin nicht gerade als überflüssig bezeichnen, allein wir ziehen die ältere Schrift von etwa doppeltem Umfange der jüngeren vor. Letztere ist naturgemäss etwas dürftigeren Inhaltes und empfiehlt sich auch nicht durch die für unseren Geschmack sehr schwerfällige Bezeichnung. Man denke $n.e$ als genauen Werth einer Zahl, $n.a$ als angenäherten Werth derselben, $e.a$ als den absoluten, $e.r$ als den relativen Fehler. Nun kommen Formeln vor wie $e.r < \frac{1}{{}_{10}p.n.a}$ und wie $n.e - n.a < \frac{n.e}{m}$. Es wird wohl jedem Leser schwer fallen, dabei die erwähnten stenographischen Zeichen von den gewöhnlichen Operationszeichen, mit denen vermischt sie auftreten, zu unterscheiden.

CANTOR.

**Saggio di aritmetica non decimale** con applicazioni del calcolo duodecimale e trigesimale a problemi sui numeri complessi. Monografia di VITTORIO GRÜNWALD. Verona 1884, H. F. Münster. 69 pag.

Wir haben im XXVII. Bande dieser Zeitschrift, hist.-lit. Abthlg. S. 192, ein Programm von Herrn Hunrath: „Aufgaben zum Rechnen mit Systemzahlen", angezeigt, mit dessen Inhalt die in italienischer Sprache verfasste Abhandlung des Herrn Grünwald nahezu übereinstimmt, gleichzeitig auch die Fragen behandelnd, welche bei Herrn Haas „Theilbarkeitsregeln" (angezeigt Bd. XXIX hist.-lit. Abthlg. S. 146) zur Sprache kommen. Von dieser Abhandlung gilt in gleichem Maasse, dass sie ganz interessante Sätze in sich schliesst, die der Lehrer an der Mittelschule als Beispiele beim Rechenunterricht zu verwenden in die Lage kommen kann. Auch in einer Vorlesung über Zahlentheorie mögen, falls die Zeit dazu reicht, ein bis zwei Stunden füglich damit auszufüllen sein. Die numeri complessi, von welchen der Titel spricht, sind sogenannte benannte Zahlen und haben mit unseren complexen Zahlen Nichts zu schaffen. Die geschichtlichen Bemerkungen wird man, als einer längst überholten Zeit geschichtlicher Forschung angehörend, am besten überschlagen.

CANTOR.

---

**Tables de logarithmes à six décimales** construites sur un plan nouveau par ADOLPHE BENOIST, docteur en droit, membre de la société mathématique de France. Paris, Librairie Ch. Delagrave. XXXIV, 391 S.

Die zweisprachig, französisch und deutsch, je einen Druckbogen füllende Vorrede erläutert die drei neuen Gesichtspunkte, auf welche der Verfasser sein Augenmerk richtete, und welche ihm wichtig genug schienen, sie im Titel als einer neuen Einrichtung entsprechend ausdrücklich zu erwähnen. Erstlich sind die sogenannten Proportionaltheile im Drucke so angeordnet, dass auch beim Aufsuchen der Zahlen zu gegebenen Logarithmen ihre Benutzung erleichtert erscheint; zweitens sind die Logarithmen der Sinus und Tangenten kleiner Winkel in der den Zahlenlogarithmen gewidmeten ersteren Abtheilung des Bandes abgedruckt, wo ihnen der jeweil sechste Theil jeder Seite unten eingeräumt ist; drittens sind die Logarithmen der trigonometrischen Functionen in Winkelzwischenräumen von $10''$ derart gedruckt, dass für jede Function eine Seite doppelten Eingangs vorhanden ist, die Winkelminuten jedes Grades unter einander, die 10 Secunden-Unterabtheilungen in parallelen Columnen neben einander. Natürlich ist die Seite eines Sinus zugleich die eines entsprechenden Cosinus, z. B. dem Kopfe der Seite *sin* $83^0$ entspricht am Fussende *cos* $6^0$ mit rechts aufsteigenden Minuten und von rechts nach links sich erhöhenden Columnen. Wir können nicht sagen, dass diese Neuerungen uns sehr entzücken, wenn wir damit auch nur, wie bei allen Geschmackssachen, ein persönliches Ur-

theil, keinen Tadel aussprechen wollen. Proportionaltheile schlagen wir überhaupt niemals auf, sondern rechnen sie in jedem einzelnen Falle selbst aus. Die Logarithmen kleiner Bögen, beziehungsweise deren trigonometrischer Functionen scheinen uns in die zweite, nicht in die erste Abtheilung des Bandes zu gehören. Endlich die erwähnte Anordnung dieser zweiten Abtheilung hat allerdings die nicht unbedeutende Bequemlichkeit, dass man proportionelle Zwischenrechnungen fast vollständig zu umgehen im Stande ist, wenn die Winkel, wie dies die Praxis mit sich bringt, höchstens auf Secunden genau bekannt sind; dafür tritt aber die unseres Dafürhaltens grössere Unbequemlichkeit ein, dass, wenn der Cosinus eines Winkels zu suchen ist, der durch seine Tangente etwa gegeben ist, was bei Hilfswinkeln gar nicht so selten vorkommt, regelmässig umgeblättert werden muss. Der Preis der neuen Tabelle beträgt 10 Francs, die Ausstattung ist gut.

CANTOR.

---

**Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln** nebst einer grösseren Anzahl von Hilfstafeln. Herausgegeben von Dr. ADOLF GREVE, Oberlehrer am Karls-Gymnasium zu Bernburg. Bielefeld und Leipzig 1884, bei Velhagen & Klasing. IV, 171 S.

Wenn diese Tafeln an Correctheit ebenso den anderen Tabellenwerken, deren der Schulgebrauch sich zu bedienen pflegt, gleich kommen, wie sie dieselben an vollendeter Ausstattung, zu der wir insbesondere die grossen, fetten, das Auge nicht ermüdenden Typen rechnen, übertrifft, so werden die Greve'schen Logarithmen sich bald verbreiten, um so mehr, als die Verlagshandlung den gebundenen Exemplaren den Preis von nur 2 Mark aufgedruckt hat. Ob die nöthige Correctheit aber vorhanden ist, dass muss die Uebung oder eine mühsame und zeitraubende Vergleichung zeigen, zu der Referent sich nicht eignet. Nur in den ziemlich zahlreichen Hilfstafeln ist uns bei flüchtigem Durchblättern auf S. 36 ein garstiger Druckfehler in der Reihe für $log_a\ (1-x)$ aufgefallen. Hoffen wir, die Correctur der eigentlichen Logarithmen möge sorgfältiger ausgeführt sein.

CANTOR.

---

**Lehrbuch der Experimentalphysik.** Von Dr. WÜLLNER. 2. Band: Lehre vom Licht. 4. Aufl. Leipzig 1883. 704 S.

Die Lehre vom Licht wird in zwei Abschnitten dargestellt: der erste behandelt die Ausbreitung und Wahrnehmung des Lichts, der zweite die theoretische Optik. Zuerst kommt die geradlinige Fortpflanzung des Lichts und seine Geschwindigkeit; wie man sich in der Undulationstheorie die geradlinige Bewegung zu denken hat, wird erst später bei der Beugung auseinandergesetzt. Die Zurückwerfung und Brechung des Lichts wird in

der gewöhnlichen Weise behandelt, ohne Rücksicht auf die geometrische Aenderung der Lichtbüschel, für welche nur in Anmerkungen ein Theil der Literatur angegeben wird. Auch das Bild eines leuchtenden Punktes in einem dichteren Mittel wird immer noch behandelt, als ob nur Strahlen in der Einfallsebene von demselben ins Auge gelangten. Bei der Dispersion werden die neueren Theorien von Sellmeier und Helmholtz auseinandergesetzt und an beobachteten Brechungsexponenten und an den anomalen Spectren geprüft. Die Brechung in einem System centrirter Kugelflächen und die Lehre von den Cardinalpunkten wird analytisch behandelt; doch kommen bei den Linsen auch einige Constructionen vor, wobei nur die Fälle, wo Knotenpunkte und Hauptpunkte zusammenfallen und wo nicht, zu wenig scharf getrennt sind. In den Figuren 84—87 ist bald angenommen, dass beide Punktepaare zusammenfallen, bald nicht; daher ist auch der letzte Absatz S. 249 schwer zu verstehen: soll er eine Correctur oder eine Erweiterung enthalten? In Wirklichkeit hat ja das System der Fig. 87 besondere Knotenpunkte.

Ein folgendes Capitel ist der Absorption und Emission des Lichts gewidmet und der Spectralanalyse, einem Gebiete, auf dem der Verfasser vor Allem zu Hause ist. Daran schliesst sich die Fluorescenz und Phosphorescenz, sowie die chemische Wirkung des Lichts. Es folgt die Wahrnehmung des Lichtes und die Beschreibung des Auges, das Stereoskop wird kurz berührt, auch Einiges über Mikroskop und Fernrohr mitgetheilt (auf 9 Seiten von den 700 des ganzen Bandes). Wir vermissen hier namentlich die Anwendung der Cardinalpunkte, um den optischen Unterschied von beiden klarzulegen.

Der zweite Abschnitt enthält die theoretische Optik. Der Fresnel'sche Spiegelversuch wird gegenüber den Einwendungen von H. F. Weber als reine Interferenzerscheinung festgehalten. Bei den Beugungserscheinungen werden die Beobachtungsarten von Fresnel und Fraunhofer aufgeführt und die Wirkung der durchsichtigen Schirme nach Quincke dargelegt, auch die Grösse der Wellenlängen angegeben. Bei der Polarisation werden die bei der Zurückwerfung und Brechung auftretenden Erscheinungen an durchsichtigen Körpern und an Metallen und stark absorbirenden Mitteln ausführlich besprochen. Dann folgt die Doppelbrechung des Lichts, die Sätze von Huyghens, die Theorie Fresnel's. Das letzte Capitel ist der Interferenz des polarisirten Lichts gewidmet, wozu auch die Circularpolarisation und die Saccharimetrie gezogen wird.

P. Zech.

---

**Repertorium der deutschen Meteorologie.** Von G. Hellmann. Leipzig 1883. 992 Halbseiten.

Diese verdienstliche Arbeit ist aus einem Plane des internationalen Meteorologencongresses in Rom 1879 hervorgegangen, eine allgemeine me-

teorologische Bibliographie herauszugeben. Dr. Hellmann war mit den Vorarbeiten für Deutschland beauftragt und giebt nun seine Arbeit, da der ganze Plan nicht zu Stande kam, als selbstständiges Werk ins Publicum. Der erste Theil enthält den Katalog der Schriften und Erfindungen, und zwar zuerst die Autoren mit kurzen biographischen Angaben, ihre Schriften und Erfindungen; dann ein Sachregister zu den Schriften und Erfindungen. Im zweiten Theile folgt ein Katalog der Beobachtungen, zuerst die Stationen und ihre Beobachtungsreihen, dann ein Sach- und Personenregister, die Beobachtungsstationen und die Beobachter. Der dritte Theil endlich enthält den Umriss einer Geschichte der meteorologischen Beobachtungen in Deutschland.

Bei diesem Umriss wird die Geschichte in drei Perioden getheilt, die Periode der Aufzeichnungen der Witterungserscheinungen ohne Instrumente zu verwenden, bis zur Erfindung von Thermometer und Barometer, also bis gegen die Mitte des 17. Jahrhunderts; die zweite Periode instrumenteller Beobachtungsreihen Einzelner (als erste wird die vom Tübinger Professor Camerarius herrührende seit 1691 angeführt) und die dritte Periode der Organisation des meteorologischen Dienstes durch den Staat, beginnend mit der Societas meteorologica Palatina 1780—1792.

Zum Schlusse sind noch statistische Resultate angehängt über Zahl und Berufsart der Beobachter, die Dauer ihrer Beobachtungsreihen u. s. w.

Das Werk in seiner praktischen Anlage erleichtert jedem Meteorologen seine Aufgabe und giebt ihm häufig Aufschluss, wo alle anderen Mittel fehlgehen. Die meteorologischen Beobachtungen namentlich früherer Zeit sind so zerstreut, dass dem Meteorologen selbst für die ihm nächstliegenden Gebiete ein Quellennachweis hocherwünscht ist.

P. Zech.

---

**Elemente der reinen Mechanik.** Von Dr. Finger. Wien 1884.

Bis jetzt ist erst eine Lieferung ausgegeben von dem Werke, das als Vorstudium für analytische Mechanik und mathematische Physik dienen soll und aus Vorträgen des Verfassers entstanden ist. Der Verfasser betrachtet die Mechanik als physikalische Wissenschaft, die auf den drei empirischen Grundsätzen Newton's fusst, auf dem Princip der Trägheit, dem der unveränderlichen relativen Wirkung und dem der Wechselwirkung. Die erste Lieferung behandelt die Statik und Dynamik des materiellen Punktes.

P. Zech.

---

**Die Function des parabolischen Cylinders.** Von Dr. Baer. Cüstrin 1883. 32 Seiten.

Die Abhandlung enthält die Integration der Potentialgleichung ($\Delta^2 V = 0$) für einen wulstförmigen Körper, der eine Cardioide zur Directrix und ihren

Rückkehrpunkt zum Pol hat, d. h. einen Körper, der durch Kreise, senkrecht zur Ebene der Curve über der Verbindungslinie des Pols mit den Punkten der Curve als Durchmessern beschrieben, gebildet wird. Die bei der Integration verwendeten Functionen werden als Functionen des parabolischen Cylinders bezeichnet.

P. Zech.

---

**Versuch eines allgemeinen Gesetzes über die specifische Wärme.** Von Joachim Sperber. Zürich 1884. 32 S.

Der Verfasser sucht das Gesetz von Dulong und Petit über Atomwärme und specifische Wärme durch ein allgemeineres und allgemeiner geltendes zu ersetzen. Er setzt voraus: jedes Molekel ist eine Kugel, deren Durchmesser ist die Molekelgrösse, d. h. die Anzahl Atome im Molekel. Jedes Molekel ist von einer Aetherhülle von gleichem Durchmesser, wie das Molekel, umgeben (wie das zu verstehen ist, ist nicht gesagt). Einen Körper erwärmen heisst die Aetheratmosphären verdünnen: die dazu nöthige Arbeit ist um so grösser, je grösser die Aetherhülle, um so kleiner, je dichter der Aether ist; denn „dichterer Aether lässt sich leichter verdünnen". Somit ist die specifische Wärme umgekehrt proportional dem Molekulargewicht, und direct proportional dem Quadrat der Molekulargrösse, oder dem Atomgewicht umgekehrt, der Molekulargrösse direct proportional. Dieser Satz wird nun nach verschiedenen Richtungen, insbesondere auf dem Verdampfungsgebiet auszuführen gesucht. Das Schriftchen gehört zu denjenigen, in welchen die Phantasie überwiegt (vergl. auch die Figur am Schlusse).

P. Zech.

---

**Die elektromagnetische Theorie des Lichts.** Von Tumlirz. Leipzig 1883. 158 Seiten.

Das Buch soll dem Studirenden ein möglichst vollständiges Bild von dem gegenwärtigen Stande der elektromagnetischen Theorie des Lichts geben. Dasselbe behandelt die Haupteigenschaften der Dielektrica, die Potentialfunction der elektromagnetischen Kräfte und das elektrodynamische Potential im ersten Theile nach den Arbeiten von Maxwell und Helmholtz. Der zweite, grössere Theil ist dem Lichte gewidmet. Es werden die im ersten Theile gewonnenen Ausdrücke für Strömungen auf die Ausbreitung des Lichts angewendet und die Gleichheit der in Weber's elektrodynamischer Formel enthaltenen Geschwindigkeit mit der des Lichts nachgewiesen, ferner dass das Quadrat des Brechungscoefficienten gleich der Dielektricitätsconstante ist. Es wird die Reflexion und Brechung des Lichts als identisch mit dem Verhalten elektrischer Strömungen an der Grenze zweier Mittel nachgewiesen, es werden die Fresnel'schen Formeln für die Intensität des Lichts aus den elektrischen Formeln abgeleitet, die Continuitäts-

bedingungen und die Erhaltung der Energie untersucht. Den Schluss bildet die Reflexion und Brechung an der Grenze einer senkrecht zur Axe geschnittenen einaxigen Krystallplatte. Bei den noch so weit auseinandergehenden Anschauungen über die Lichtbewegung in krystallinischen Mitteln ist eine Bearbeitung von anderer Seite her zur Aufklärung von grosser Bedeutung. Der Verfasser hat sich das Verdienst erworben, eine solche Aufklärung den Studirenden zugänglicher gemacht zu haben. P. Zech.

---

**Das Mikroskop und seine Anwendung.** Von Dr. Dippel. 2. Auflage, dritte Abtheilung des ersten Theils. Braunschweig 1883. 289 S.

Die zwei ersten Abtheilungen sind früher besprochen worden. Die vorliegende dritte Abtheilung beschäftigt sich mit der Praxis des Mikroskops, mit der Herrichtung der Präparate, Methode der Beobachtung, Messung, Anwendung des polarisirten Lichts und des Spectroskops, endlich der Zeichnung und Aufbewahrung der Präparate, und giebt eine Fülle von Anweisungen für den eigentlichen Praktiker. P. Zech.

---

# Bibliographie

## vom 1. November bis 15. December 1884.

---

### Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der mathem.-phys. Classe der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften zu München. Jahrg. 1884, Heft 3. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, mathem.-naturwissenschaftl. Cl. 48. Bd. Wien, Gerold. 45 Mk.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften, mathem.-naturwissenschaftl. Cl. 2. Abth. 90. Bd., 1. u. 2. Heft. Ebendas. 5 Mk. 60 Pf.

Verhandlungen der vom 15. bis 24. October 1883 in Rom abgehaltenen 7. allgemeinen Conferenz der europäischen Gradmessung, redigirt von A. Hirsch und Th. v. Oppolzer. Berlin, G. Reimer. 30 Mk.

Annalen der Münchener Sternwarte. 14. Supplementband. München, Franz. 4 Mk. 60 Pf.

Beobachtungen, angestellt am astrophysikal. Observatorium in O-Gyalla, herausg. von N. v. Konkoly. 6. Bd. (Beob. v. 1883.) Halle, Schmidt. 18 Mk.

Astronomische Nachrichten, herausgeg. v. A. Krüger. 110. Bd. (24 Nrn.), Nr. 2617. Hamburg, Mauke Söhne. compl. 15 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft, herausgeg. v. E. Schönfeld u. H. Seeliger. 19. Jahrg., 3. Heft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Repertorium der Physik, herausgeg. v. F. Exner. 20. Bd. (12 Hefte), 1. Heft. München, Oldenbourg. compl. 24 Mk.

Mémoires de l'académie de St. Petersbourg. 7. série, t. 32, livr. 6—12. Leipzig, Voss. 11 Mk. 50 Pf.

Mélanges mathématiques et astronomiques, tirés du bulletin de l'académie de St. Petersbourg. T. 6, livr. 2. Leipzig, Voss. 1 Mk. 20 Pf.

Mélanges physiques et chimiques etc. T. 12, livr. 1 et 2. Ebendas. 1 Mk. 60 Pf.

## Geschichte der Mathematik.

Cantor, M., Ueber den sogenannten Seqt der ägyptischen Mathematiker. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

## Reine Mathematik.

Euler, L., Einleitung in die Analysis des Unendlichen; deutsch von H. Maser. 1. Thl. Berlin, Springer. 7 Mk.

Bobek, K., Einleitung in die Theorie der elliptischen Functionen. Leipzig, Teubner. 4 Mk. 80 Pf.

Krüger, L., Die Verwendung des Kettenbruchs zu einer bequemen Berechnung der Quadratwurzelfunction. Wolfenbüttel, Zwissler. 60 Pf.

Gegenbauer, L., Ueber Determinanten höheren Ranges. (Akad.) Wien, Gerold. 50 Pf.

Méray, C., Exposition nouvelle de la théorie des formes linéaires et des déterminans. Paris, Gauthier-Villars. 3 Frs.

Kötter, E., Beiträge zur Theorie der Osculationen an ebenen Curven dritter Ordnung. Berlin, Mayer & Müller. 1 Mk. 80 Pf.

David, M., Ueber eine geometrische Verwandtschaft zweiten Grades und deren Anwendung auf Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten. (Dissert.) Breslau, Preuss & Jünger. 2 Mk.

D'Ovidio, E., Geometria analytica. Parte 1. Turin, Löscher. 10 L.

Fischer-Benzon, R. v., Die geometrische Constructionsaufgabe. Kiel, v. Maack. 1 Mk. 60 Pf.

Wiener, Chr., Lehrbuch der darstellenden Geometrie. 1. Bd. Leipzig, Teubner. 12 Mk.

## Angewandte Mathematik.

Börsch, O., Anleitung zur Berechnung geodätischer Coordinaten. 2. Aufl. Kassel, Freyschmidt. 6 Mk.

Himstedt, A., Ueber Lissajous'sche Curven. (Dissert.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 80 Pf.

KRAFT, F., Sammlung von Problemen der analytischen Mechanik. 4. und 5. Lief. Stuttgart, Metzler. 4 Mk.

OPPOLZER, TH. v., Bahnbestimmung des Planeten Cölestina (237). (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.

GYLDÉN, H., Theoretische Untersuchungen über die intermediären Bahnen der Kometen in der Nähe eines störenden Körpers. (Akad.) Petersburg und Leipzig, Voss. 80 Pf.

STECHERT, C., Definitive Bestimmung der Bahn des Kometen 1881, IV. Kiel, v. Maack. 1 Mk. 20 Pf.

## Physik und Meteorologie.

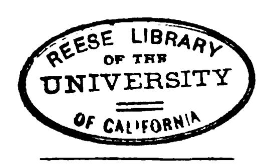
CLAUSIUS, R., Ueber den Zusammenhang zwischen den grossen Agentien der Natur. Bonn, Cohen & S. 1 Mk.

SECCHI, A., Die Einheit der Naturkräfte; ein Beitrag zur Naturphilosophie. Uebers. v. R. L. SCHULZE. 2. Aufl. 5. Lief. Leipzig, Frohberg. 2 Mk.

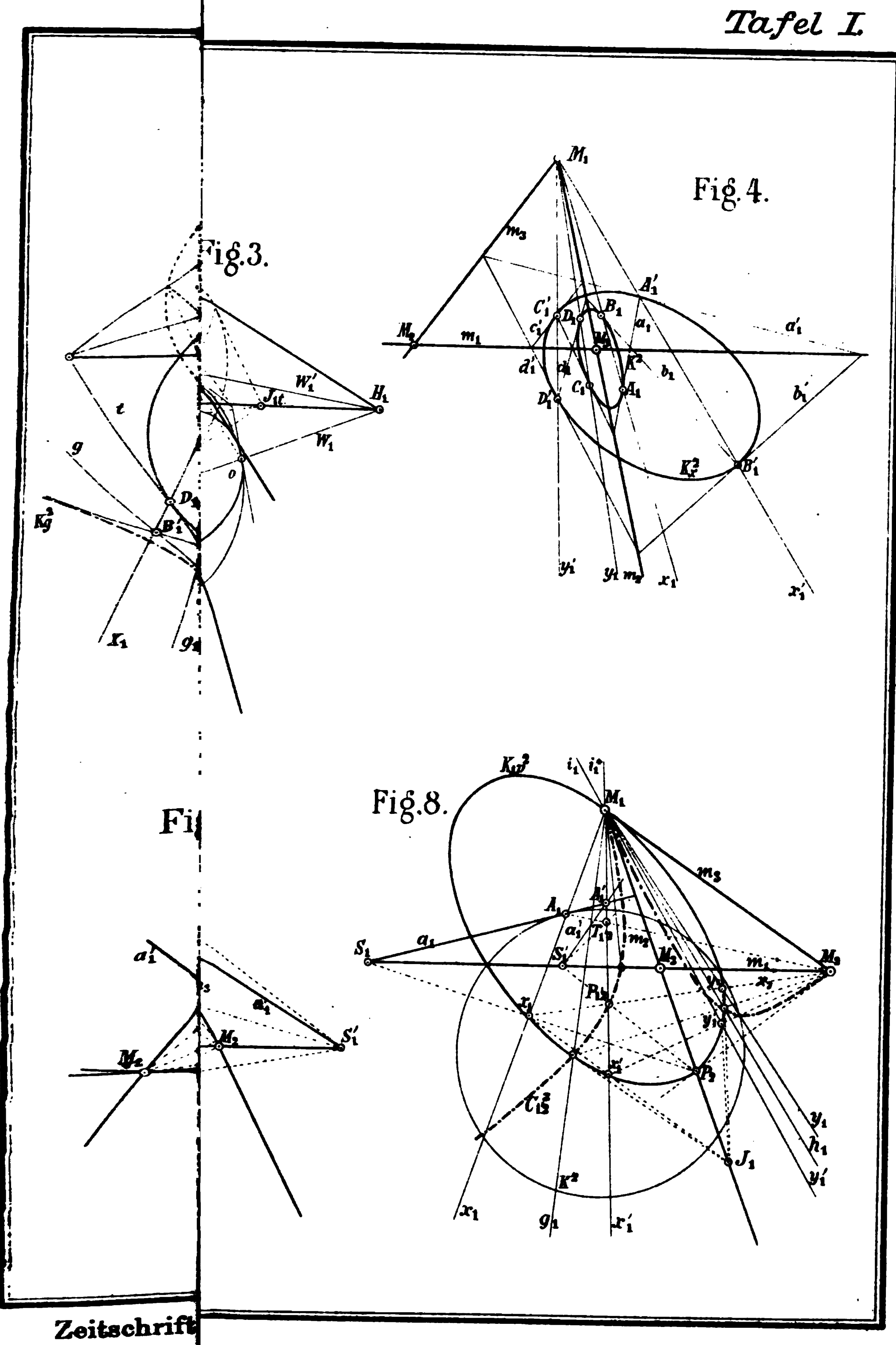
FLEISCHEL, E. v., Die doppelte Brechung des Lichts in Flüssigkeiten. (Akad.) Wien, Gerold. 35 Pf.

LINDEMANN, E., Helligkeitsmessungen der Bessel'schen Plejadensterne. (Akad.) Petersburg und Leipzig, Voss. 80 Pf.

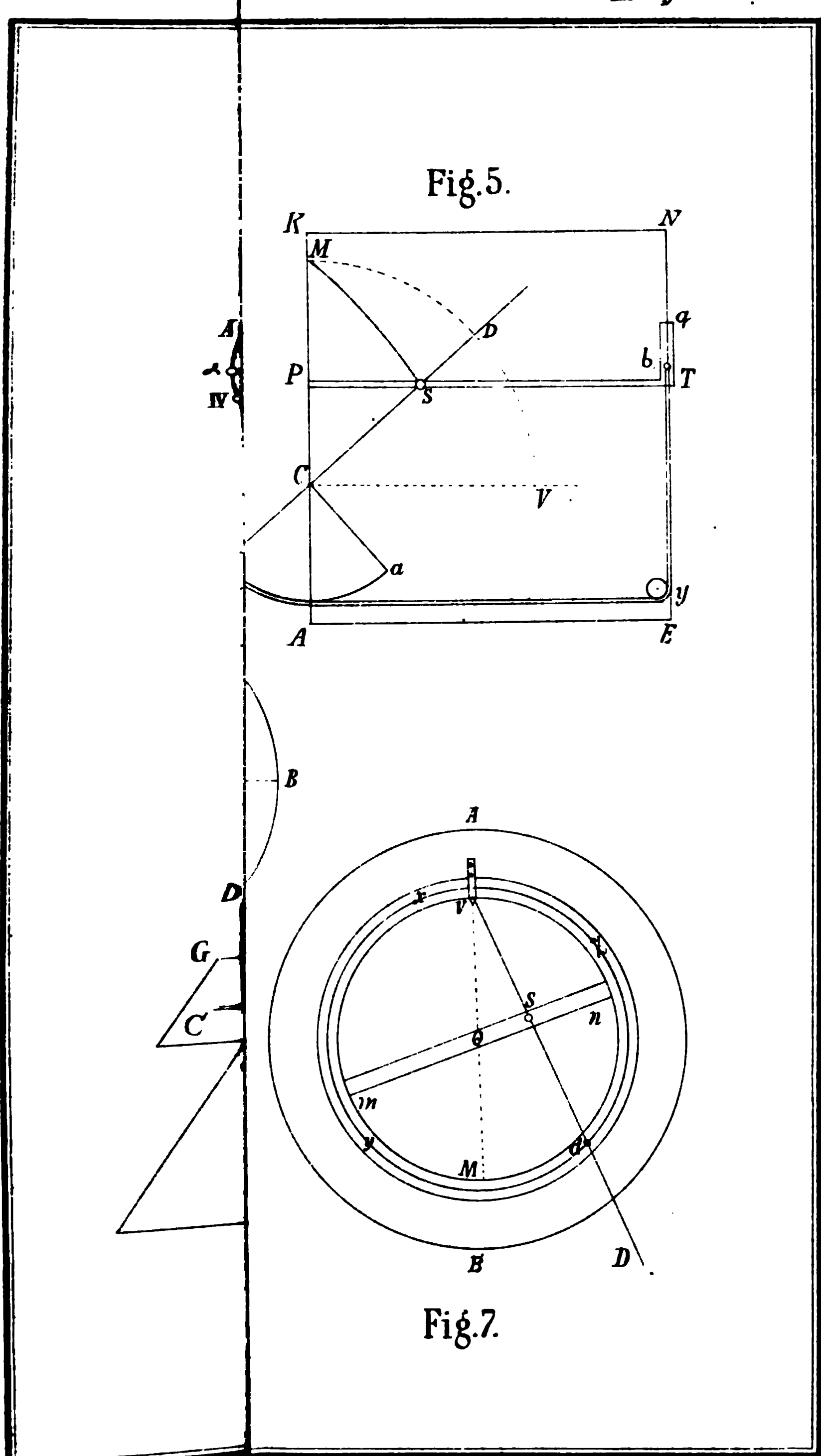
ABENDROTH, W., Leitfaden der Physik mit Einschluss d. einfachsten Lehren d. Chemie u. d. mathem. Geographie. 2. Bd. (Cursus d. Prima). Leipzig, Hirzel. 4 Mk.



Tafel I.




Zeitschrift


Fig. 5.
K
N
M
q
D
b
P
T
S
C
V
a
y
A
E
B
A
D
G
C
v
x
S
n
O
m
y
M
d
B
D
Fig. 7.



# Historisch-literarische Abtheilung.

## Die Ferrari-Cardanische Auflösung der reducirten Gleichung vierten Grades.

Von

K. HUNRATH.

Die „Ars magna" hat mir in zwei Ausgaben vorgelegen:

1. H. Cardani, ... opus novum de proportionibus numerorum ... praeterea artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus ... item de aliza regula liber ..., Basileae, 1570, und
2. H. Cardani, ... operum tomus quartus, quo continentur arithmetica, geometrica, musica, ... Lugduni, 1663.

Wenn letztere Ausgabe sich auf dem Titel „editio et caeteris elegantior ita et accuratior" nennt, für die „Ars magna" kann sie das Lob grösserer Genauigkeit nicht beanspruchen: hier bringt sie dieselben Druckfehler und Redactionsversehen, wie die ältere Ausgabe, und noch einige mehr.* Da die Baseler Ausgabe nicht die älteste ist, so ist es denkbar, dass auch sie die gedankenlose Wiedergabe eines früheren Druckes ist. Es ist ferner nicht ausgeschlossen, dass die Leydener Ausgabe unabhängig von der Baseler ist, dass beide auf derselben früheren Ausgabe beruhen.

Die Darstellung von Ferrari's Methode giebt Cardan im 39. Capitel, das im Index die Ueberschrift: „De regula duplici, qua per iteratã positionem inuenimus ignotam quantitatem, ubi habentur 20 capitula, alia generalia q̄d q̄d. & q̄d. & rerum & numeri", im Text die verkürzte Ueberschrift: „De regula qua pluribus positionibus inuenimus ignotam quantitatem" trägt.** Die dort gegebene Regula I kommt ihrem Inhalt nach für meinen Zweck nicht in Betracht. Die Regula II beginnt mit den einleitenden Worten:

---

* Ausser den bei der Anführung von Textstellen angebrachten Verbesserungen siehe das Verzeichniss am Schlusse des Aufsatzes.

** In der Baseler Ausgabe; in der Leydener enthält der Index dieselbe kürzere Inhaltsangabe, wie der Text.

2 *„Alia est regula nobilior pręcedente, & est Ludouici de Ferrarijs, qui eam me rogante inuenit, & per eam habemus omnes aestimationes fermè capitulorum q̄d' quadrati & quadrati, rerum & numeri, uel q̄d' quadrati cubi, quadrati & numeri, & ego ponam ea per ordinem, hoc modo ut uides.“*

Es folgt dann die Aufzählung der Capitula, die in beiden Ausgaben das Capitulum

*q̄d' quad. aequale rebus & numero*

doppelt bringt, unter 4 und unter 5. Dafür fehlt das Capitulum

*q̄d' quad. cum cubis aequalia quad. & numero.*

Wo das erstere Capitulum an seiner Stelle steht, ergiebt sich äusser aus der ganzen Anordnung aus den Schlussworten:

*„In his igitur omnibus capitulis, quae quidem sunt generalissima, ut reliqua omnia sexaginta septem* superiora, oportet reducere capitula, in quibus ingreditur cubus, ad capitula, in quibus ingreditur res ut septimum ad quartum, & secundum ad primum, deinde quaeremus demonstrationem hoc modo.“*

Die hier geforderte Umwandlung lehrt C. im 7. Capitel (De capitulorum transmutatione); sie kommt darauf hinaus, den mit einem passenden Factor versehenen reciproken Werth der Unbekannten als neue Unbekannte einzuführen, $\frac{m}{x} = y$ zu setzen; an Stelle des Gliedes mit $x^3$ tritt dann ein solches mit $y$. Nun ist das siebente Capitulum

*q̄d' q̄d. cum cubis aequalia numero*, d. h. $x^4 + ax^3 = d$;

setzt man $x = \frac{m}{y}$, so erhält man

$y^4 = \frac{am^3}{d} \cdot y + \frac{m^4}{d}$, also *q̄d' quad. aequale rebus et numero.*

Diesem Capitulum ist mithin die Ordnungszahl 4, dem ausgefallenen die Zahl 5 zu geben. Die so verbesserte Uebersicht der Capitula hat folgende Gestalt:

1. *q̄d' quad. aequale quad. rebus & numero;*
2. *q̄d' quad aequale q̄d. cubis & numero;*
3. *q̄d' quad. aequale cubis & numero;*
4. *q̄d' quad. aequale rebus & numero;*
5. *q̄d' quad. cum cubis aequalia quad. & numero;*
6. *q̄d' quad. cum rebus aequalia quad. & numero;*
7. *q̄d' q̄d. cum cubis aequalia numero;*
8. *q̄d' q̄d. cum rebus aequalia numero;*

---

* In beiden Ausgaben statt *sexaginta sex.* Gemeint sind die im 2. Capitel aufgeführten 22 *capitula primitiua* und 44 *capitula deriuatiua;* erstere enthalten die Formen der Gleichung zweiten und dritten Grades, letztere entstehen aus ersteren, wenn man für die Unbekannte das Quadrat, bezw. den Cubus einer neuen Unbekannten einführt.

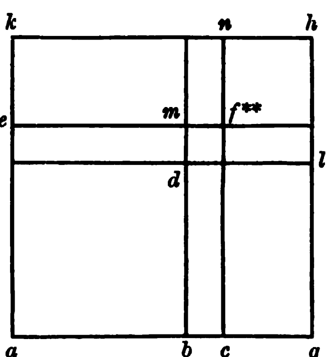
9. *$\bar{q}d'$ $\bar{q}d$. cum $\bar{q}d$ aequalia cubis & numero;*
10. *$\bar{q}d'$ $\bar{q}d$. cum $\bar{q}d$ aequalia rebus & numero;*
11. *$\bar{q}d'$ $\bar{q}d$. cum $\bar{q}d$ & rebus aequalia numero;*
12. *$\bar{q}d'$ $\bar{q}d$. cum $\bar{q}d$ & cubis aequalia numero;*
13. *$\bar{q}d'$ $\bar{q}d$. cum $\bar{q}d$ & numero aequalia cubis;*
14. *$\bar{q}d'$ quad. cum quad. & numero aequalia rebus;*
15. *$\bar{q}d'$ quad. cum numero aequalia cubis & quad.;*
16. *$\bar{q}d'$ quad. cum numero aequalia cubis;*
17. *$\bar{q}d'$ quad. cum numero aequalia rebus & quad.;*
18. *$\bar{q}d'$ quad. cum numero aequalia rebus;*
19. *$\bar{q}d'$ quad. cum cubis & numero aequalia quad.;*
20. *$\bar{q}d'$ quad. cum rebus & numero aequalia quad.*

Diese 20 Formen führen wir auf folgende vier zurück:

I. $x^4 + bx^2 + cx + d = 0$ [1, 6, 10, 11, 14, 17, 20],
II. $x^4 + ax^3 + bx^2 + d = 0$ [2, 5, 9, 12, 13, 15, 19],
III. $x^4 + cx + d = 0$ [4, 8, 18],
IV. $x^4 + ax^3 + d = 0$ [3, 7, 16],

von denen durch die Substitution $x = \frac{m}{y}$ II auf I, IV auf III zurückgeführt wird. Bemerkenswerth ist, dass C. offenbar nicht das Verfahren kennt, die allgemeine Gleichung vierten Grades $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ durch die Einführung von $y = x + \frac{a}{4}$ auf die Form I zurückzuführen, während er (17. Capitel) die allgemeine Gleichung dritten Grades zu reduciren versteht.

Die an die oben wiedergegebenen Schlussworte sich unmittelbar anschliessende Demonstratio zerfällt in drei Regeln, die am Rande mit 3, 4, 5 bezeichnet sind. Die erste lautet:




3* „*Sit quadratum* af, *diuisum in duo quadrata,* ad *&* df, *& duo supplementa,* dc *&* de, *& uelim addere gnomonem* kfg *circuncirca, ut remaneat quadratum totum* ah, *dico, quòd talis gnomo constabit ex duplo* gc *additae lineae, in* ca, *cum quadrato* gc, *nam* fg *constat ex* gc *in* cf, *ex diffinitione data in initio secundi Elementorum, &* cf *est aequalis* ca, *ex diffinitione quadrati, et quia per 44 primi Elementorum,* kf *est aequalis* fg, *igitur duae superficies* gf *&* fk,

* Diese Zahl fehlt in beiden Ausgaben, in der jüngeren Ausgabe auch die Zahl 4; unter 5 nimmt C. Bezug auf 3.

** Steht in beiden Ausgaben verkehrt, am Durchschnitt von *cn* und *dl*, freilich auch bei **Matthiessen**, Grundzüge der antiken u. modernen Algebra, S. 542.

*constant ex* gc, *in duplum* ca, *& quadratum* gc *est* fh, *per cor^m 4 secundi Elementorum, igitur patet propositum, si igitur* ad *sit 1 q̄d' quadratum &* cd *ac* de *3 quadrata, &* df *9, erunt* ba *1 quadratum &* bc *3 necessario. cum igitur uoluerimus addere quadrata aliqua, ad* dc *&* de, *et fuerint* cl *&* km *erit ad complendum quadratum totum necessaria superficies* lnm, *quae ut demonstratum est, constat ex quadrato* gc *numeri quxdratorum dimidiati, nam* cl *est superficies ex* gc *in* ab, *ut ostensum est, &* ab *est 1 quadratum, quia ponimus,* ad *1 q̄d' quadratum,* fl *uero &* mn, *fiunt ex* gc in cb, *ex 42^a* primi Elementorum, quare superficies* lnm, *& est numerus addendus, fit ex* gc *in duplum* cb, *id est in numerum quadratorum, qui fuit 6, &* gc *in se ipsum, id est numero quadratorum addito, & haec demonstratio nostra est.*"

In diesem geometrischen Beweise, dessen Urheberschaft C. für sich in Anspruch nimmt, sagt er:

Die Maasszahl für die Fläche des Quadrats $ad$ sei eine vierte Potenz, $x^4$, also die für die Seite $ab$ eine zweite Potenz, $x^2$, die Flächen $cd$ und $de$ seien jede $3x^2$, also die Fläche $df = 9$, die Strecke $bc = 3$. Dann ist die Fläche des Quadrats $af = x^4 + 6x^2 + 9$, oder, wenn man statt der willkürlich gesetzten 6 das allgemeine Zahlzeichen $m$ einführt, $= x^4 + mx^2 + \frac{m^2}{4} = \left(x^2 + \frac{m}{2}\right)^2$. Darauf werde an das Rechteck $dc$ das Rechteck $cl$, an $de$ das $cl$ gleiche $km$ angesetzt, also Rechtecke mit der einen Seite $= x^2$ (die Summe der Flächen der beiden angesetzten Rechtecke bezeichne ich mit $yx^2$). Die neue Figur wird zu einem Quadrat vervollständigt durch den Gnomon $lnm$, der aus dem Quadrat der Strecke $gc = \frac{y}{2}$ [*ex quadrato* gc *numeri quadratorum dimidiati*] und den Rechtecken $mn$ und $fl$ zusammengesetzt ist, deren Fläche zusammen $6 . gc = 6 \cdot \frac{y}{2} = 3y$, allgemein $\frac{m}{2} y$ beträgt.

Die Worte „*id est numero quadratorum addito*", die auf „*& (ex)* gc *in se ipsum*" sich beziehen, enthalten eine Ungenauigkeit; es ist, wie oben, der *numerus quadratorum* ***dimidiatus*** zu verstehen.

Bis jetzt hat C. bewiesen, dass man, wenn man zu

$$x^4 + mx^2 + \frac{m^2}{4} \text{ oder } \left(x^2 + \frac{m}{2}\right)^2 \qquad yx^2 + \frac{m}{2} y + \frac{y^2}{4}$$

addirt, ein vollständiges Quadrat

$$\left(x^2 + \frac{m}{2} + \frac{y}{2}\right)^2$$

erhält. Er fährt fort mit der Anweisung:

4 „*Hoc opere peracto, semper reduces partem q̄d' quadrati ad* ℞, *id est addendo tantum utrique parti, ut 1 q̄d' quadratum cum quadrato et numero*

* Gemeint ist, wie oben, 44.

*habeant radicem, hoc facile est, cum posueris dimidium numeri quadratorum, radicem numeri, item facias, ut denominationes extremae sint plus, in ambabus aequationibus, nam secus, trinomium seu Binomium reductum ad trinomium, necessariò careret radice.*"

Ich fasse diese Anweisung so auf: Die Gleichung

$x^4 + bx^2 \pm cx \pm d = 0$ forme um in $\left(x^2 + \frac{m}{2}\right)^2 = (m - b)x^2 \mp cx \mp d$

und

$x^4 - bx^2 \pm cx \pm d = 0$ in $\left(x^2 - \frac{m}{2}\right)^2 = (b - m)x^2 \mp cx \mp d,$

wobei darauf zu sehen ist, dass der Coefficient des $x^2$ auf der rechten Seite positiv werde. Meine Auffassung stützt sich hauptsächlich auf die Behandlung der Aufgabe

$$x^4 + 8 = 10x^2 - 4x\ ^* \text{ (Quaestio IX des 39. Capitels).}$$

Dort sagt C.: „*quia uidemus numerum quadratorum esse magnum, & rerum paruum, ideo conabimur minuere numerum quadratorum potius, quam augere, & faciemus ut diminutio sit ex utraque parte 2 quad. nam à minori imò a 2 quadratis semper fermè est incipiendum, quia non oportet ut venias ad m: q̄d ex parte rerum, quia sic non haberent radicē, subductis igitur 2 quadratis ex utraque parte...*".

Der Coefficient des Gliedes mit $x^2$, 10, ist C. zu gross; er ist daher darauf bedacht, ihn zu verkleinern, dadurch dass er beiderseits eine Anzahl Quadrate subtrahirt, z. B. $2x^2$, also umformt in

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 8x^2 - 4x - 7,$$

oder durch beiderseitige Subtraction von $6x^2$ umformt in

$$x^4 - 6x^2 + 9 = 4x^2 - 4x + 1 \text{ (a. a. O. im „Notandum").}$$

Dabei soll man darauf achten, dass man nicht auf der rechten Seite einen negativen Coefficienten am $x^2$ bekomme.

Sehen wir uns nun die übrigen von C. im 39. Capitel behandelten Beispiele an.

1) $$x^4 + 6x^2 + 36 = 60x \text{ (Quaestio V}^{**}\text{).}$$

Hier addirt C., um links ein vollständiges Quadrat zu erhalten, beiderseits $6x^2$:

$$x^4 + 12x^2 + 36 = 6x^2 + 60x^{***},$$

wohl bestimmt durch den Umstand, dass das absolute Glied 36 ein vollständiges Quadrat, $6^2$, ist.

2) $$x^4 = x + 2 \text{ (Quaestio VI),}$$

hier nicht zu besprechen, da das Glied mit $x^2$ fehlt.

---

* Beide Ausgaben haben im Text *1 q̄d' quadratum p: 8, aequale 20 quadratis m: 4 positionibus*, im Rechnungsschema richtig *10 q̄d m: 4 pos.*

** Die vier ersten Quaestiones des Capitels sind Beispiele zur Regula I.

*** In beiden Ausgaben steht *p: 90 positionibus* statt *p: 60 positionibus*.

3) $x^4+6x^3=64$ (Quaestio VII).

C. verwandelt nach der bereits erwähnten Regel diese Gleichung in $y^4=6y+4$, setzt also $x=\frac{4}{y}$; die Gleichung in $y$ kommt aus demselben Grunde wie 2) hier nicht in Betracht.

4) $x^4+32x^2+16=48x$ (Quaestio VIII).

C. addirt beiderseits 240 und erhält $x^4+32x^2+256^*=48x+240$. Auch hier ist, wie in 1), das absolute Glied der gegebenen Gleichung eine Quadratzahl, $16=4^2$; doch formt C. nicht um in

$$x^4+8x^2+16=-24x^2+48,$$

da er dann auf der rechten Seite negative $x^2$ erhalten würde.

5) $x^4+8=10x^2-4x$ (Quaestio IX) ist oben besprochen.

6) $x^4=x^2+1$ (Quaestio X).

Cardan löst diese Gleichung als quadratische nach $x^2$ auf und berechnet $x$ aus $x^2$.

7) $x^4-3x^2=64$ (Quaestio XI)

wird unten eine besondere Besprechung finden.

8) Von $x^4+3=12x$ (Quaestio XII) gilt das von 2) Gesagte.

9) $x^4+2x^3=x+1$ (Quaestio XIII).

C. zeigt, dass diese Aufgabe gleichbedeutend ist mit der: drei in stetiger Proportion stehende Zahlen zu finden, so dass die Summe aller drei Zahlen zur Summe der zweiten und dritten Zahl dasselbe Verhältniss habe, wie letztere Summe zur ersten Zahl:

$$(1+x+x^2):(x+x^2)=(x+x)^2:1$$

[die erste Zahl ist $=1$, die Verhältnisszahl $=x$ gesetzt]; $x+x^2$ sei dann wieder der grössere Theil einer nach dem Verhältniss des goldenen Schnittes getheilten Zahl, deren kleinerer Theil 1 bekannt sei; $x+x^2$ sei $=\sqrt{1\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}$, also $x=\sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}}+\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}$.

Seine Anweisung führt C. folgendermassen zu Ende:

5 *„Quibus iam peractis, addes tantum de quadratis, & numero uni parti, per tertiam regulam, ut idem additum alteri parti, in qua erunt res, faciat trinomium, habens* ℞ *quadratam per positionem, & habebis numerum quadratorum, & numeri addendi utrique parti, quo habito, ab utroque extrahes* ℞ *quadratam, quae erit in una, 1 quadratum* p: *numero, uel* m: *numero, ex alia, 1 positio uel plures* p: *numero, uel* m: *numero, uel numerus* m: *positionibus, quare per quintum capitulum huius, habens** propositum."*

* In beiden Ausgaben im Text *p*: 156 statt *p*: 256; im Rechnungsschema richtig.

** So in der älteren Ausgabe, in der jüngeren *„habes"*; ursprünglich *„habebis"*?

Wie oben, unterscheide ich wieder folgende Formen der reducirten Gleichung vierten Grades:

$$x^4 + bx^2 \pm cx \pm d = 0 \quad \text{und} \quad x^4 - bx^2 \pm cx \pm d = 0,$$

Die erstere nur umgeformt in

$$\left(x^2 + \frac{m}{2}\right)^2 = (m - b)\,x^2 \mp cx \mp d,$$

die letztere in

$$\left(x^2 - \frac{m}{2}\right)^2 = (b - m)x^2 \mp cx \mp d,$$

wobei für jene die Bedingung $m \geqq b$, für diese die Bedingung $m \leqq b$ gilt. Es soll nun im ersteren Falle gebildet werden

$$\left(x^2 + \frac{m}{2}\right)^2 + 2zx^2 + mz + z^2 = (2z + m - b)\,x^2 \mp cx + z^2 + mz \mp d - \frac{m^2}{4},$$

im letzteren

$$\left(x^2 - \frac{m}{2}\right)^2 - 2zx^2 + mz + z^2 = (b - m - 2z)x^2 \mp cx + z^2 + mz \mp d - \frac{m^2}{4}$$

[s. unten Beispiel 5a)].

Hier habe ich im Anschluss an Cardan* $2z$ statt des oben gebrauchten $y$ eingeführt. Wir haben dann links

$$\left(x^2 + \frac{m}{2} + z\right)^2, \quad \text{bezw.} \quad \left(x^2 - \frac{m}{2} - z\right)^2,$$

ein vollständiges Quadrat, und rechts einen Ausdruck, für den die Forderung gestellt wird, dass er ein vollständiges Quadrat sei (... *„ut idem additum alteri parti, in qua erunt res, faciat trinomium habens* ℞ *quadratam per positionem"* ...). Die nothwendige Folge dieser Forderung giebt C. in Quaestio V an: *„secunda quantitas (habet radicem) ex supposito, igitur ducta prima parte trinomii in tertiam fit quadratum dimidiae secundae partis"*. Es wird also im einen Falle

$$(2z + m - b)\left(z^2 + mz \mp d - \frac{m^2}{4}\right),$$

im andern

$$(b - m - 2z)\left(z^2 + mz \mp d - \frac{m^2}{4}\right)$$

$= \left(\frac{c}{2}\right)^2$ gesetzt. In beiden Fällen ergiebt sich für $z$ eine Gleichung dritten Grades, nach deren Auflösung die Quadratwurzel aus der rechten Seite sich angeben lässt. Dieselbe sei, sagt C., von der Form $px + q$ oder $px - q$ oder $q - px$ (*„1 positio uel plures* p: *numero, uel* m: *numero, uel numerus* m: *positionibus"*). Dies hängt selbstverständlich vom Vorzeichen des mit $x$ multiplicirten Gliedes, des $c$, ab. Zu bemerken ist, dass C. die $px + q$ entsprechende Wurzel $-px - q$ nicht aufführt, weil er grundsätzlich nega-

* In Quaestio V: *„ponam numerum quadratorum addendorũ semper 2 positiones"*.

tive Wurzeln als „*fictae*" ausschliesst*; das hindert [s. unten 5b)] freilich C. nicht, für dasselbe Beispiel sowohl $px - q$, als auch $q - px$ zuzulassen, obwohl nur Eines positiv sein kann.

In der Ausführung macht sich bei Cardan die Sache so:

1) In $x^4 + 12x^2 + 36 = 6x^2 + 60x$ addirt er auf beiden Seiten $2zx^2 + 12z + z^2$ und erhält $(x^2 + 6 + z)^2 = (2z + 6)x^2 + 60x + z^2 + 12z$, also die Resolvente $(2z + 6)(z^2 + 12z) = 30^2$ oder $z^3 + 15z^2 + 36z = 450$.

2) $x^4 = x + 2$; hier, wo $c = 0$ ist, addirt C. beiderseits $2zx^2 + z^2$ und erhält $(x^2 + z)^2 = 2zx^2 + x + z^2 + 2$, dann aus $2z(z^2 + 2) = \frac{1}{4}$ die Resolvente $z^3 + 2z = \frac{1}{8}$.

NB. C. giebt auch noch die Lösung $x^4 - 1 = x + 1$, $\frac{x^4 - 1}{x + 1} = 1$, $x^3 - x^2 + x - 1 = 1$, $x^3 + x = x^2 + 2$.

3) $y^4 = 6y + 4$; wird von C. nicht nach Ferrari's Regel gelöst, da man — siehe NB. zu 2) — $y^4 - 16 = 6(y - 2)$, $\frac{y^4 - 16}{y - 2} = 6$ u. s. w. transformiren kann.

4) $x^4 + 32x^2 + 256 = 48x + 240$; C. addirt zu beiden Seiten $2zx^2 + 32z + z^2$ und erhält $(x^2 + 16 + z)^2 = 2zx^2 + 48x + z^2 + 32z + 240$; Resolvente: $z^3 + 32z^2 + 240z = 288$.

5a) $x^4 - 2x^2 + 1 = 8x^2 - 4x - 7$; durch beiderseitige Addition von $-2zx^2 + 2z + z^2$ erhält C. $(x^2 - 1 - z)^2 = (8 - 2z)x^2 - 4x + z^2 + 2z - 7$; Resolvente: $z^3 + 30 = 2z^2 + 15z$.

5b) $x^4 - 6x^2 + 9 = 4x^2 - 4x + 1$; auch die rechte Seite ist ein vollständiges Quadrat, daher ist $x^2 - 3 = 2x - 1$ und auch $= 1 - 2x$.

Für 5a) liefert $z = 2$ dasselbe Quadrat $4x^2 - 4x + 1$ auf der rechten Seite (beides nach C.).

6) ist oben erledigt, desgleichen 9).

8) $x^4 + 3 = 12x$; C. addirt beiderseits $2zx^2 + z^2$ und leitet die Resolvente $z^3 = 3z + 18$ ab.

7) $x^4 - 3x^3 = 64$ verdient ganz besondere Beachtung, weil das der Methode zu Grunde liegende Princip ganz frei angewandt wird. Es ist 64 eine Quadratzahl. C. fügt auf der rechten Seite, „*ubi sunt res*", wie er sagen würde, eine beliebige Anzahl $x^2$ hinzu, $2zx^2$, und, wobei ihm zu

---

* So sagt C. im 1. Capitel unter 3 von der Gleichung $x^4 + 12 = 6x^2$: „*quia non potest aequationem ueram habere, carebit etiam ficta, sic eñ uocamus eam, quae debiti est seu minoris*", d. h. eine Gleichung von der Form $x^4 + a = bx^2$ müsse eine positive Wurzel (*vera aequatio*) haben, um eine negative Wurzel (*ficta aequatio*) haben zu können; von der Gleichung $x^4 = 2x^2 + 8$ (in beiden Ausgaben 80 statt 8) sagt er, sie habe eine „*uera*" und eine dieser gleiche „*ficta aequatio*", $+2$ und $-2$; die Gleichung $x^4 + 12 = 7x^2$ habe zwei „*uerae*" und zwei diesen gleiche „*fictae aequationes*", $+2$, $+\sqrt{3}$ und $-2$, $-\sqrt{3}$.

statten kommt, dass 64 eine Quadratzahl ist, vervollständigt die rechte Seite $64 + 2zx^2$ durch Hinzufügung von $\frac{1}{64}z^2x^4$ zu einem Quadrat. Auf der linken Seite erhält er so $(\frac{1}{64}z^2 + 1)x^4 - 3x^3 + 2zx^2$, stellt die Forderung, dass auch dieser Ausdruck ein vollständiges Quadrat sei, und findet aus $(\frac{1}{64}z^2 + 1).2z = (1\frac{1}{2})^2$ die Resolvente $z^3 + 64z = 72$.

Soviel dürfte die vorstehende Darstellung gezeigt haben, dass Cardan weit entfernt ist, eine Methode zu befolgen, die sich für die reducirte Gleichung vierten Grades $x^4 + bx^2 + cx + d = 0$ in das Schema

$$\left(x^2 + \frac{b}{2} + z\right)^2 = 2zx^2 - cx + z^2 + bz + \frac{b^2}{4} - c \qquad \text{[Beispiel 4)]}$$

oder das Schema

$$(x^2 + b + z)^2 = (b + 2z)x^2 - cx + z^2 + 2bz + b^2 - c \qquad \text{[Beispiel 1)]}$$

zwingen liesse. Sehe ich von dem ganz frei behandelten Beispiel 7) ab, so glaube ich, dass der Gedankengang C.'s in unserer Formelsprache am besten so wiedergegeben wird:

„Für

$$x^4 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (b \gtrless 0, \ c \text{ und } d \gtrless 0)$$

setze

$$\left(x^2 + \frac{m}{2} + \frac{y}{2}\right)^2 = (y + m - b)x^2 - cx + \frac{y^2}{4} + \frac{m}{2}y + \frac{m^2}{4} - d,$$

mache die Wahl von $m$ von den Umständen abhängig und lass die rechte Seite ein vollständiges Quadrat werden oder setze

$$(y + m - b)(y^2 + 2my + m^2 - 4d) = c^2.\text{“}$$

Zu der sich so ergebenden Resolvente

$$y^3 + (3m - b)y^2 + (3m^2 - 2bm - 4d)y + m^3 - bm^2 - 4dm + 4bd - c^2 = 0$$

bemerke ich noch, dass, wenn man das absolute Glied als eine Function von $m$ ansieht, als $f(m)$, so ist der Coefficient des $y = f^1(m)$, der von $y^2 = \frac{f^2(m)}{1.2}$, der von $y^3 = \frac{f^3(m)}{1.2.3}$. Bemerkenswerther ist, dass für $m = \frac{b}{3}$ die Resolvente in die reducirte Gleichung

$$y^3 - \left(\frac{b^2}{3} + 4d\right)y - \frac{2}{27}b^3 + \frac{8}{3}bd - c^2 = 0$$

übergeht.

Beide Bemerkungen gelten für die Resolvente, die man auf gleichem Wege für die allgemeine Gleichung vierten Grades

$$\text{I.} \qquad x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

ableitet; denn aus

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{m}{2} + \frac{y}{2}\right)^2$$
$$= \left(y + m + \frac{a^2}{4} - b\right)x^2 + \left(\frac{a}{2}y + \frac{a}{2}m - c\right)x + \frac{y^2}{4} + \frac{my}{2} + \frac{m^2}{4} - d$$

ergiebt sich die Resolvente

$$y^3+(3m-b)y^2+(3m^2-2bm+ac-4d)y$$
$$+m^3-bm^2+acm-4dm-a^2d+4bd-c^2=0.$$

Wählt man nun $m=\frac{b}{3}$ oder bildet

$$\left(x^2+\frac{a}{2}x+\frac{b}{6}^*+\frac{y}{2}\right)^2$$
$$=\left(y+\frac{a^2}{4}-\frac{2}{3}b\right)x^2+\left(\frac{ay}{2}+\frac{ab}{6}-c\right)x+\frac{y^2}{4}+\frac{b}{6}y+\frac{b^2}{36}-d$$

und setzt

$$\text{II. } x^2+\frac{a}{2}x+\frac{b}{6}^*+\frac{y}{2}=\pm\left[\sqrt{y+\frac{a^2}{4}-\frac{2}{3}b}.x+\frac{\frac{ay}{2}+\frac{ab}{6}-c}{2\sqrt{y+\frac{a^2}{4}-\frac{2}{3}b}}\right],$$

so erhält man als Resolvente

$$\text{III. } y^3+\left(ac-\frac{b^2}{3}-4d\right)y-a^2d+\frac{1}{3}abc-\frac{2}{27}b^3+\frac{8}{3}bd-c^2=0.$$

Setzt man in derselben $y=2z$, so geht sie über in

$$z^3-\tfrac{1}{12}(b^2-3ac+12d)z+\tfrac{1}{216}(72bd+9abc-27a^2d-27c^2-2b^3)=0,$$

die Resolvente Strehlke's [Matthiessen, Grundzüge der antiken und modernen Algebra, § 81, XXX]. Ueber ihre Bedeutung und ihre Beziehung zu den anderen Resolventen hat Matthiessen im genannten Werke ausführlich gehandelt, siehe § 81 im Ausgang, § 53, 3. Beispiel (S. 130), § 79 Nr. (29) und (31), § 217 unter 2 (S. 580) und unter 3h) (S. 585), ferner die §§ 227—229, 233, 234 (S. 651), 237, 241, 242, 261, 321, 327, 329. — Ich beschränke mich daher darauf, die Wurzeln der Resolvente III als Functionen der Wurzeln von I darzustellen. In II sind folgende beide quadratische Gleichungen enthalten:

$$x^2+\left[\frac{a}{2}-\sqrt{y+\frac{a^2}{4}-\frac{2}{3}b}\right]x+\frac{b}{6}+\frac{y}{2}-\frac{\frac{a}{2}y+\frac{ab}{6}-c}{2\sqrt{y+\frac{a^2}{4}-\frac{2}{3}b}}=0$$

und

$$x^2+\left[\frac{a}{2}+\sqrt{y+\frac{a^2}{4}-\frac{2}{3}b}\right]x+\frac{b}{6}+\frac{y}{2}+\frac{\frac{a}{2}y+\frac{ab}{6}-c}{2\sqrt{y+\frac{a^2}{4}-\frac{2}{3}b}}=0.$$

Das absolute Glied jeder dieser Gleichungen ist daher das Product zweier Wurzeln der Gleichung I, und zwar sind, wenn man das absolute Glied der ersten Gleichung der Reihe nach

---

* $x^2+\frac{a}{2}x+\frac{b}{6}=\frac{f''(x)}{4.3}$, wenn man $x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ mit $f(x)$ bezeichnet.

$$= x_1 x_2,\ x_1 x_3,\ x_1 x_4,\ x_2 x_3,\ x_2 x_4,\ x_3 x_4$$

setzt, die zugeordneten Werthe für das absolute Glied der zweiten Gleichung

$$x_3 x_4,\ x_2 x_4,\ x_2 x_3,\ x_1 x_4,\ x_1 x_3,\ x_1 x_2.$$

Addirt man je zwei zusammengehörige Werthe, so erhält man für die Summe der absoluten Glieder, für $\frac{b}{3} + y$, drei von einander verschiedene Werthe

$$x_1 x_2 + x_3 x_4,\quad x_1 x_3 + x_2 x_4,\quad x_1 x_4 + x_2 x_3,$$

es ist also

$$y_1 = x_1 x_2 + x_3 x_4 - \frac{b}{3} = \frac{2}{3}(x_1 x_2 + x_3 x_4) - \frac{1}{3}(x_1 x_3 + x_2 x_4 + x_1 x_4 + x_2 x_3),$$

$$y_2 = x_1 x_3 + x_2 x_4 - \frac{b}{3} = \frac{2}{3}(x_1 x_3 + x_2 x_4) - \frac{1}{3}(x_1 x_2 + x_3 x_4 + x_1 x_4 + x_2 x_3),$$

$$y_3 = x_1 x_4 + x_2 x_3 - \frac{b}{3} = \frac{2}{3}(x_1 x_4 + x_2 x_3) - \frac{1}{3}(x_1 x_2 + x_3 x_4 + x_1 x_3 + x_2 x_4).$$

Man erkennt dann leicht, dass $3y_1$, $3y_2$, $3y_3$ die Wurzeltypen sind, die Hermite (s. Matthiessen a. a. O. § 327) zur Auflösung der Gleichung vierten Grades verwandt hat:

$$z_1 = 3y_1 = 2x_1 x_2 - (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + 2x_3 x_4$$
$$= (x_1 - x_3)(x_2 - x_4) + (x_1 - x_4)(x_2 - x_3) \text{ u. s. w.}$$

Zum Schlusse stelle ich zusammen, was ich sonst an Fehlern in den benutzten Ausgaben der „Ars magna" bemerkt habe.

7. Cap., 12. Regel lies *q̄d' quadratum* p: *8 quadratis* p: *64* statt ... p: *46* und *inde diuiso 8 radice 64* statt ... *radice 84*.

11. Cap. im ersten Rechnungsschema lies 2. Zeile 2 10 statt 2 20 und 3. Zeile 8 100 statt 8 10, und im zweiten Schema 1. Zeile lies m: ra: v. *cubica* ra: *26* m: *5* statt ... ra: *27* ..., 4. Zeile lies p: ℞: *2600* statt p: ℞: *2900*, 5. Zeile lies ℞: v. *cub: 1377* statt ... *1277*, 6. Zeile lies *1895400* statt *1865400*.

39. Cap., Quaestio IX, 2. Rechnungsschema, 3. Zeile lies p: *9* statt p: *1*, und 8. Zeile links lies m: *4 pos.* statt m: *4 quad.*;

ebenda, Quaestio XI, einige Zeilen unter dem Rechnungsschema, lies *& habebis* $\frac{1}{64}$ *quadrati* p: *1* statt ... $\frac{1}{46}$ *quadrati* ...

Vorstehende Verbesserungen beziehen sich auf beide Ausgaben; in der jüngeren,

39. Cap., Quaestio XIII 2. Zeile lies noch *sit 1* p̃. *ipso numero* statt *sit* p̃. *ipso numero*.

Die Zahl der zu verbessernden Stellen ist sicherlich auch hiermit nicht erschöpft; wer sich die Mühe machen will, alle Aufgaben der „Ars magna" nachzurechnen, kann eine reiche Nachlese halten.

## Königl. Akademie der Wissenschaften zu Turin.

# Programm
für den
# fünften Bressa'schen Preis.

Die königl. Akademie der Wissenschaften zu Turin macht hiermit, den testamentarischen Willensbestimmungen des Dr. Cäsar Alexander Bressa und dem am 7. December 1876 veröffentlichten diesbezüglichen Programm gemäss, bekannt, dass mit dem 31. December 1884 der Concurs für die im Laufe des Quadrienniums 1881—84 abgefassten wissenschaftlichen Werke und in diesem Zeitraum geleisteten Erfindungen, zu welchem nur italienische Gelehrte und Erfinder berufen waren, geschlossen worden ist.

Zugleich erinnert die genannte Akademie, dass vom 1. Januar 1883 an der Concurs für den fünften Bressa'schen Preis eröffnet worden ist, zu welchem, dem Willen des Stifters entsprechend, **die Gelehrten und Erfinder aller Nationen** zugelassen sein werden.

Dieser Concurs wird bestimmt sein, den Gelehrten oder Erfinder beliebiger Nationalität zu belohnen, der im Laufe des Quadrienniums 1883—86,

„nach dem Urtheil der Akademie der Wissenschaften in Turin, die wichtigste und nützlichste Erfindung gethan oder das gediegenste Werk veröffentlicht haben wird auf dem Gebiete der physikalischen und experimentalen Wissenschaften, der Naturgeschichte, der reinen und angewandten Mathematik, der Chemie, der Physiologie und der Pathologie, ohne die Geologie, die Geschichte, die Geographie und die Statistik auszuschliessen".

Der Concurs wird mit dem 31. December 1886 geschlossen sein.

Die zum Preise bestimmte Summe wird 12000 (zwölftausend) Lire betragen.

Keinem der, sei es in Turin oder ausserhalb dieser Stadt ansässigen, inländischen Mitglieder der Turiner Akademie wird der Preis zuerkannt werden können.

**Turin**, 1. Januar 1885.

Der Präsident
**A. Fabretti.**

Der Secretär
der Classe für physikalische und mathematische Wissenschaften
**A. Sobrero.**

Der Secretär
der Classe für ethische, historische und philologische Wissenschaften
**Gaspar Gorresio.**

# Recensionen.

---

**Der Raum und seine Erfüllung.** Von HULLMANN. Berlin 1884. (60 S.)

Das Weltall ist von zwei gleichberechtigten, beziehentlich entgegengesetzten Materien ausgefüllt, von Körperpunkten und Aetherpunkten; jene ziehen sich gegenseitig an, diese stossen sich ab; Körperpunkte ziehen Aetherpunkte an, Aetherpunkte stossen Körperpunkte ab. Wie sich die zwei letzten Annahmen vereinigen lassen, ist nicht gesagt; jedenfalls widersprechen sie den Axiomen der Mechanik. Es wird dann der Druck des Aethers auf einen Punkt im Raume unter der Voraussetzung, dass er dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional sei, bestimmt und gefunden, dass er Null sei, wenn der ganze Raum mit gleich dichtem Aether gefüllt ist, wie natürlich. Dagegen werde das Aethertheilchen, auf welches der gesammte Aether wirkt, gepresst. Die Einwirkung einer Schicht Aether zwischen zwei parallelen Ebenen auf einen Punkt ausserhalb ergiebt sich zu $2\pi m h \delta_0 \int dy$, wo $m$ die Masse des Punktes sein wird (es ist darüber nichts gesagt), $h$ der Abstossungscoefficient, $\delta_0$ die Dichte des Aethers ist; $\int dy$ ist also der Abstand der Grenzebenen. Damit soll nun bewiesen werden, dass der Druck eines begrenzten Theiles des Aethers gleich dem des unbegrenzten bei gleicher Dichte sei, was offenbar dem vorigen Ausdruck direct widerspricht. Der Beweis wird in unverständlicher Weise mit Anspielung auf das hydrostatische Gesetz gegeben. Ebenso unklar ist die Ableitung der Beschleunigung eines Aethertheilchens, die aus demselben Ausdruck $2\pi m h \delta_0 \int dy$ sich ergeben soll. Dann wird von der Aetherhülle der Atome gesprochen, die sich bis ins Unendliche erstrecke, und von rotirenden Dynamiden, die in § 18 plötzlich ohne jede Erklärung auftreten und deren verschiedene Rotation die Ursache der Aggregatzustände und der chemisch-elektrischen Erscheinungen sein soll. Es ist eine peinliche Arbeit, durch das sonderbar zusammengestapelte Material sich durchzuarbeiten.

P. ZECH.

---

**Ueber die Beziehungen zwischen zwei allgemeinen Strahlensystemen,** von welchen das eine durch beliebige Reflexionen und Brechungen aus dem andern hervorgegangen ist. Dissertation von BLASENDORFF. Berlin 1883. (34 S.)

Der erste Theil beschäftigt sich mit dem Nachweis des Satzes von Kummer, dass ein unendlich dünnes Strahlenbündel mit seinen beiden Focalebenen aus der Wellenfläche, deren Mittelpunkt in der Axe liegend angenommen wird, zwei conjugirte Curven ausschneidet. Der zweite Theil behandelt die Frage, ob es Strahlensysteme mit „nicht kugelförmiger" Wellenfläche giebt, deren Strahlen Normalen einer Fläche sind. Es finden sich als entsprechende Flächen eine Anzahl von Monge in seiner „Application de l'analyse à la géometrie" behandelter Flächen.

P. Zech.

---

**Latente Wärme der Dämpfe.** Von Puschl. 3. Aufl. Wien 1883. (76 S.)

Die erste Auflage wurde im 25. Jahrgang dieser Zeitschrift besprochen. Eine wesentliche Aenderung ist nicht eingetreten, nur eine Erweiterung der Darstellung.

P. Zech.

---

**Die Elemente der Mechanik und mathematischen Physik.** Von Helm. Leipzig 1884. (221 S.)

Das Buch ist für Mittelschulen bestimmt, es benützt nur elementar-mathematische Hilfsmittel. Gleich anfangs wird auf die Bezeichnung der Dimension physikalischer Grössen hingewiesen, was sehr zu billigen ist, da der Schüler von Anfang an damit sich vertraut machen muss, wenn er sich ganz an diese Anschauung gewöhnen soll. Die gleichförmige und die gleichförmig beschleunigte Bewegung werden zuerst erklärt, es folgt dann das Parallelogramm der Kräfte und Bewegungen, die Erklärung der freien und unfreien Bewegung, die Arbeit und Energie. Nach dieser Einleitung in die allgemeinen Begriffe wird in den folgenden drei Abschnitten die Mechanik des starren, des elastischen und des flüssigen Körpers behandelt.

Die Darstellung ist vielfach nur eine andeutende, durch den Lehrer zu vervollständigen. Um so schärfer sollte der Ausdruck sein. Es lässt sich das zuweilen vermissen, z. B. S. 108, wo von den Axen gleicher Schwingungsdauer die Rede ist. Es fehlt hier das Beiwort parallel und nachdem von zwei Axen gesprochen ist, heisst es weiter: „der eine dieser Punkte heisst Schwingungspunkt". Es handelt sich ja nur um Axendrehung, nicht um Drehung um einen Punkt. Warum nicht „Schwingungsaxe"? Auf derselben Seite steht zweimal „nur in Paris", während es natürlich für jede gleiche Breite und Höhe gilt.

In der Mechanik der starren Körper wird der Schwerkraft und drehenden Bewegung die Magnetnadel, in der der elastischen Körper bei der harmonischen Bewegung die Akustik in kurzen Zügen angereiht und dann die Grundlagen der Optik.

Die Mechanik des vollkommen flüssigen Körpers behandelt den Druck, den Auftrieb und die Druckvertheilung in der atmosphärischen Luft, und

endlich die Erscheinungen der Strömung, den elektrischen Strom mit eingeschlossen.

Das Werk giebt dem Lehrer Anweisung, wie er den Schüler in den Zusammenhang der Naturerscheinungen, soweit sie in der Physik behandelt werden, einzuführen hat.

P. Zech.

---

**Analytische Theorie der Wärme.** Von M. Fourier, deutsch von Weinstein. Berlin 1884. (476 S.)

Die „Théorie analytique de la chaleur“ war in der letzten Zeit nur schwer zu bekommen. Da ein grosser Theil des Werkes mit Reihen zu thun hat, die auch sonst in der mathematischen Physik vielfach verwendet werden — die Fourier'schen Reihen —, und da deren Theorie ausführlich auseinandergesetzt wird, so war es erfreulich, dass ein neuer Abdruck des Werkes im vorigen Jahre erschien. Allein es war dies nur ein Abdruck ohne Durchsicht, mit den vielen Druckfehlern des Originals, die häufig das Studium erschwerten. Es hat nun Herr Weinstein, dessen Uebersetzungen uns von früher bekannt sind, die verdienstliche Aufgabe übernommen, das Werk ins Deutsche zu übersetzen und die Formeln correct darzustellen. Die Ausstattung des Buches ist sehr zu loben.

P. Zech.

---

**Die mathematische Geographie in Verbindung mit der Landkartenprojection.** Von Gustav Wenz. München 1883. (297 S.)

Das Werk enthält eine mathematische Einleitung (ein Viertel des Ganzen), eine mathematische Geographie mit Projectionslehre, eine Art populäre Astronomie und eine Anzahl Tafeln trigonometrischer Functionen. Welcher Art die mathematische Einleitung ist, zeigen Formeln wie: $\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = lg\, 9{,}69897$, oder Ausdrücke wie: „Kreis und Ellipse sind zwei curvische Linien“, „die Ellipse ist eine ebene Curve, bei welcher die Abstände von den beiden Brennpunkten für einen Peripheriepunkt gleich der grossen Axe sind“, und ähnliche S. 125 wird von der Integralrechnung Gebrauch gemacht, so dass es scheint, diese sei vorausgesetzt, aber die Elementarmathematik nicht. Ein wunderbarer Satz findet sich S. 181: „Das Foucault'sche Pendel deutet an, dass für die Darstellung von Ländern der gemässigten Zone die Kegelprojection, für Polarkarten das kreisförmige Netz und für aequatoreale Gegenden die Cylinderprojection am geeignetsten ist; wäre man nicht schon mit diesen Projectionsweisen bekannt gewesen, wahrlich, das Foucault'sche Pendel hätte auf sie führen müssen.“ Interessant ist auch die Beschreibung des Antipassats auf der folgenden Seite und die Darstellung der elliptischen Bahn der Planeten S. 187. Dann wird kühn behauptet: „Am 21. März erblickt man die Sonne im Sternbild des Widders.“

Lesenswerth ist die Berechnung der Dämmerung aus einer trigonometrischen Formel mit den nöthigen Anweisungen zur Umrechnung in Anmerkungen. In einer dieser Anmerkungen wird bewiesen, dass $(-m)=(0-m)$ ist, in einer andern, dass $(-\cos d)=\cos d$, weil gleiche entgegengesetzte Winkel gleiche positive Cosinus haben. Man sieht aus diesen Beispielen, welcher Art dieses Buch ist, und es wäre nur zu wünschen, dass der Beisatz auf dem Titel: „Expedition des königl. Central-Schulbücherverlags" wenigstens im vorliegenden Falle nicht zur Wahrheit werde.

P. Zech.

---

Jansen, **Physikalische Aufgaben.** Freiburg 1883.

Vorliegende Aufgabensammlung schliesst sich in ihrem Gange an das Lehrbuch der Physik von Münch an. Der erste Theil enthält 276 Aufgaben aus der Mechanik, der zweite 282 Aufgaben aus der Lehre von der Molecularbewegung der Körper; dabei ist den schwierigeren Aufgaben eine kurze Anleitung beigefügt. Gerade die Kleinheit des Werkchens dürfte bei seiner Reichhaltigkeit manchen Lehrer bestimmen, es in seiner Schule einzuführen.

B. Nebel.

---

F. Kohlrausch, **Leitfaden der praktischen Physik.** 5. Aufl. Leipzig, Teubner. 1884.

Die innerhalb kurzer Zeit erschienene neue Auflage lässt deutlich erkennen, wie sehr sich dieses Buch in den physikalischen Laboratorien eingebürgert hat. Demselben wurden wieder mehrere neue Artikel, namentlich aus dem Gebiete des Galvanismus, hinzugefügt, sodann wurden die Tabellen mit den inzwischen von Landolt und Börnstein herausgegebenen in Uebereinstimmung gebracht. Weshalb der Verfasser die vom Pariser Elektrikercongress festgesetzten Bezeichnungen „Ampère" und „Coulomb" nun „Amper" und „Culom" schreibt, ist mit Rücksicht auf die angestrebte Einheit der Bezeichnung nicht recht erklärlich.

B. Nebel.

---

Ch. Aug. Vogler, **Grundzüge der Ausgleichungsrechnung.** Braunschweig. Vieweg & Sohn. 1883.

Dieses Buch dürfte wohl das erste sein, das die Formeln der Ausgleichungsrechnung durchaus elementar entwickelt, ohne dabei weitschweifig zu werden. Es muss deshalb besonders von den Geometern, welche der höheren Mathematik ferner stehen, mit grossem Interesse begrüsst werden. — In dem ersten Capitel, das über vermittelnde Beobachtungen mit gleicher Genauigkeit handelt, findet die Methode der kleinsten Quadratsummen ihre Erläuterung und Anwendung auf einige Beispiele; das zweite Capitel be-

schäftigt sich mit der Auffindung des mittleren Fehlers von Beobachtungen und Functionen derselben, und bildet denselben bei zahlreichen Beispielen, worunter sich auch das Pothenot'sche Problem als Ausgleichungsaufgabe befindet. Das dritte Capitel zeigt, wie man vermittelnde Beobachtungen ungleicher Genauigkeit, d. h. solche von verschiedenem Gewicht, zurückführt auf solche mit gleichem Gewicht, deren weitere Ausführung schon im ersten Capitel ihre Erledigung fand. Schliesslich wird im vierten Capitel die verschiedenartige Behandlung bedingter Beobachtungen dargethan und an Ausgleichungen von Polygonen zur Anwendung gebracht.

Dem Ganzen ist als Anhang eine Copie der Jordan'schen Quadrattafeln hinzugefügt. — Da das Buch für Solche berechnet ist, die nur der Elementarmathematik mächtig sind, so dürfte auf S. 9 wohl gesagt sein, dass man unter $\Delta x$ etc. eine sehr kleine Grössenänderung von $x$ verstehen wolle; sodann gewährt S. 63 die Anwendung der Bézout'schen Methode diesem ebenerwähnten Leserkreise nicht den vollen Einblick in das Wesen derselben. In dem zweiten Gliede der Formel 7* S. 74 fehlt die Unbekannte $y$.

Der Hauptvorzug dieses Buches besteht wohl darin, dass das Lesen desselben durch die zahlreich durchgeführten Beispiele wesentlich erleichtert wird.

B. Nebel.

---

Dr. Stein, **Sonnenlicht und künstliche Lichtquellen** für wissenschaftliche Untersuchungen zum Zwecke photographischer Darstellung. Halle 1884, Verlag von W. Knapp.

Vorliegendes Buch bildet das erste Heft des in sechs Heften erscheinenden Handbuches: „Das Licht im Dienste wissenschaftlicher Forschung", welches 1876 in erster Auflage erschienen und nunmehr völlig umgearbeitet und erweitert worden ist. — Dieses Heft, welches die allgemeine Vorbereitung für die fünf folgenden Hefte sein soll, bringt nach einer etwas grossen Einleitung zuerst einen geschichtlichen Theil der Photographie, an welchen sich die Entwickelung der Ansichten über die Natur des Lichtes anschliesst. Sodann wird die Brechung des Lichtes an Prismen erläutert und bei den Linsen darauf hingewiesen, dass diese gleichsam als Combinationen von Prismen und einem planparallelen Glase aufzufassen seien. Nach Anführung der verschiedenen Linsensysteme, speciell der bei der Photographie verwendeten Objective, bespricht der Verfasser die übrigen Theile des photographischen Apparates, die Camera und die Kasette, und macht auf den wissenschaftlichen Nutzen des Stereoskops aufmerksam. — Im letzten, zugleich grössten Theile dieses Heftes werden die chemischen Wirkungen des Lichtes, namentlich der in den verschiedenen Regionen des Spectrums erörtert, wobei näher auf die Spectralanalyse und die sonstigen Eigenschaften des Spectrums eingegangen wird. Daran reiht sich die Photometrie und die sehr ausführ-

liche Besprechung der künstlichen Lichtquellen, die z. B. bei dem elektrischen Lichte nicht nur die verschiedenen Lampensysteme, sondern auch die elektrischen Maschinen hereinzieht. — Im Texte, sowie in den Figuren haben sich leider einige störende Fehler eingeschlichen, z. B. S. 97 zweimal $AgONO_5$ statt $AgNO_3$; S. 138 Fig. 148 Verwechselung von + und —; S. 151 Fig. 167 Indicesfehler bei den Leitungsdrähten.

Da die Kunst zu photographiren infolge des Trockenplattenprocesses weit einfacher geworden und daher leichter zu erlernen ist, ferner die Photographie bei wissenschaftlichen Untersuchungen immer unentbehrlicher wird, so werden die Meisten, die sich mit Photographie beschäftigen, in diesem Werke die dazu nöthigen Fingerzeige finden, indem hauptsächlich die Photographie für wissenschaftliche Zwecke eingehend behandelt wird.

B. Nebel.

---

**Die physikalischen Grundlagen der Mechanik.** Von Prof. Streintz. Leipzig, Verlag von Teubner. 1883.

Im ersten Capitel wird das Galilei'sche Princip einer geschichtlichen und zugleich kritischen Betrachtung unterzogen, insbesondere wird die Unbestimmtheit der Newton'schen Fassung hervorgehoben, wobei der Verfasser die Vorschläge für die Ergänzung dieses Textes von Seiten mehrerer Autoren einer näheren Kritik unterwirft. Das zweite Capitel behandelt die Ermittelung des den Gleichungen der Physik zu Grunde liegenden Coordinatensystems und zeigt, dass die Lösung dieser Aufgabe sich auf die Newton-sche Auseinandersetzung über die Absolutheit der Drehbewegungen zurückführen lässt. An dieses reiht sich die Aufzählung der Merkmale, die der Bezugskörper haben muss; letzterer wird in der Folge Fundamentalkörper und das mit ihm fest verbundene Coordinatensystem Fundamentalcoordinatensystem genannt. Nach diesen Erörterungen erfolgt die Aufstellung der endgiltigen, vervollständigten Fassung des Galilei'schen Princips. Das dritte Capitel bietet eine historisch-kritische Umschau, deren Zweck ist, einmal auf die bis jetzt gemachten Bestrebungen zur Auffindung eines physikalischen Bezugsystems aufmerksam zu machen, sodann zu zeigen, wie sich auf Grund einer mangelnden Basis Unklarheiten in die Mechanik eingeschlichen haben. — Im vierten Capitel wird die Frage der Zeitmessung an der Hand von Poisson's Mechanik besprochen, deren Ideengang schon bei d'Alembert zu finden ist, die aber in den neueren Werken keine Aufnahme gefunden hat. — Nach den im Früheren dargelegten Bewegungsarten werden im fünften Capitel die Begriffe von Kraft und Masse aufgestellt und auf verschiedene Weisen definirt, wobei auch der Inhaltslosigkeit der Definition: „Masse ist die Quantität der Bewegung" Erwähnung geschieht. Nachdem im sechsten Capitel das Unabhängigkeitsprincip ausgesprochen ist, wird gezeigt, dass dasselbe einer Erfahrungsthatsache ent-

spricht und nicht eines Beweises fähig ist; dabei wird auf die Ansicht Poisson's in der ersten Auflage seiner Mechanik hingewiesen, die aber in der zweiten Auflage ganz entgegengesetzter Natur ist. Bei der Besprechung des Princips der Wechselwirkung in dem siebenten Capitel zeigt der Verfasser, wie dasselbe mit dem Trägheitsprincip zusammengezogen werden kann, erwähnt auch, dass manche Autoren es als Princip anzuführen nicht für nöthig erachteten. — In den ergänzenden Bemerkungen, die das achte Capitel enthält, wird auf eine in manchen Fällen zweckmässige Voraussetzung über den Fundamentalkörper hingewiesen, sodann gezeigt, dass die Zahl der aufgestellten Principien wohl vermehrt, aber nur auf Kosten der Klarheit vermindert werden könne. Schliesslich wird noch der Gedankengang für die Entwickelung der Grundlagen der Mechanik skizzirt.

B. Nebel.

---

Dr. W. Abendroth, **Leitfaden der Physik.** I. Band. Cursus der Unter- und Obersecunda. Leipzig 1884, Verlag von Hirzel.

Veranlasst zur Herausgabe eines Leitfadens der Physik wurde der Verfasser durch den neuen Lehrplan, wie er für den physikalischen Unterricht in den norddeutschen Gymnasien vorgeschrieben ist. — In Untersecunda wird zuerst eine allgemeine Einleitung in die Physik gegeben, an welche sich dann die einfachsten Lehren der Chemie anreihen; den zweiten Theil bilden Magnetismus und Reibungselektricität. Die Obersecunda beginnt mit Galvanismus und behandelt ausführlich die Wärmelehre.

Dass der neue Lehrplan, welcher von dem bisherigen durchaus verschieden ist, wohl nicht ganz der richtige sein dürfte, lässt vorliegender Leitfaden am deutlichsten erkennen. Ueberall vermisst man die Mechanik, so dass der Schüler stets auf später vertröstet werden muss; infolge dessen bauen sich seine Kenntnisse in der Physik dermassen lückenhaft auf, dass er davon keineswegs befriedigt sein kann. — Von diesem Hauptfehler abgesehen, zeichnet sich aber dieses Buch vor vielen gleichartigen durch seinen wissenschaftlichen Charakter aus, insbesondere durch die Erwähnung der Gesetze in der Lehre vom Galvanismus. Wegen dieses Vorzugs erlaube ich mir, noch einige Aenderungen für die Zukunft vorzuschlagen.

§ 2 der Einleitung scheint mir mehr für eine populäre Physik, als für den Unterricht in Untersecunda zu passen. S. 123 Z. 20 v. u. ist „und sich" gemäss des § 5 S. 113 unrichtig und deshalb zu entfernen. S. 196 muss der mittlere Punkt des Tasters nicht mit der oberirdischen Leitung, sondern mit der Erde verbunden werden; dadurch wird an der zeichengebenden Station der Receptor ausgeschaltet, was einfacher ist und der Praxis entspricht.

Zum Selbststudium ist dieses Buch an manchen Stellen, namentlich in der mechanischen Wärmetheorie, für den Schüler zu schwierig, ist aber für

den Unterricht, in welchem der Lehrer die einzelnen Theile bespricht und erläutert, von grossem Nutzen und deshalb sehr zu empfehlen.

B. Nebel.

---

G. Krebs, **Die Physik im Dienste der Wissenschaft, der Kunst und des praktischen Lebens.** Stuttgart, Enke. 1884.

Vorliegendes Buch umfasst in 13 Abhandlungen, die ihre eigenen Verfasser haben und von dem Herausgeber zusammengestellt sind, die gesammte Physik, wie sie fruchtbringend in das menschliche Leben und Treiben eingreift. Der Zweck dieses Buches ist, das grosse Publicum, welches der Physik als Studium nicht nachkommen kann, sich wohl aber für deren Erfolge interessirt, in thunlichster Kürze mit den Hauptanwendungen vertraut zu machen, und damit dieses Werk seinen Zweck möglichst erfülle, ist jeder Zweig von einem speciellen Fachmanne ausgearbeitet worden.

Der erste Aufsatz: „Im photographischen Atelier", macht uns zuerst mit dem Entwickelungsgange der Photographie bekannt, sodann erhalten wir einen tiefen Einblick in das Wesen des Negativ- und Positivprocesses, dem sich schliesslich die Erläuterung des immer mehr sich verbreitenden Trockenplattenprocesses anschliesst, durch welchen die Photographie auch weiteren Kreisen zugänglich gemacht wird.

Der zweite Aufsatz: „Spectrum und Spectralanalyse", geht von der zuerst von Newton hervorgebrachten Zerlegung des Lichtes aus, bespricht sodann die verschiedenen Theile des Sonnenspectrums und deren Eigenthümlichkeiten. Eingehende Auseinandersetzung findet bei der Spectralanalyse und deren Anwendungen statt, so dass hierdurch der Leser ein vollkommenes Bild von dieser grossen Entdeckung der Neuzeit erhält.

Der dritte Aufsatz: „Eine meteorologische Station", bildet gleichsam einen Abschnitt des folgenden Aufsatzes, was vielleicht für den Umfang des Buches auch besser gewesen wäre; denn das Ganze enthält nur eine etwas ausführliche Beschreibung der Messinstrumente einer meteorologischen Station.

Grosses Interesse verdient der vierte Aufsatz: „Auf der deutschen Seewarte"; denn gerade in dem Binnenlande findet man meistens unklare Vorstellungen über die Wirksamkeit dieses Instituts. Nach Erklärung der im Gebäude der Seewarte selbst untergebrachten Abtheilungen und deren Thätigkeit wird noch der Verkehr der Seewarte mit den ihr unterstellten Küstenstationen, sowie auch der mit anderen meteorologischen Stationen geschildert.

Der fünfte Aufsatz beschäftigt sich mit der nie oft genug zu besprechenden Frage der „Heizung und Ventilation". Zuerst bespricht der Verfasser die Wärmeverhältnisse des Menschen, an die sich die Wärmeerzeugung durch Verbrennung anreiht. Dabei werden die dazu nöthigen Einrichtungen, wie sie in den einzelnen Ländern und wie sie für besondere Zwecke eingerichtet sind, einer näheren Kritik unterzogen. Auch die ver-

schiedenen Centralheizungssysteme werden auf ihre Güte hin geprüft, und dabei aufmerksam gemacht, wie zugleich für Ventilation gesorgt ist. Den Schluss bilden die Verbrennungsproducte und deren schädlicher Einfluss bei ungenügender Beseitigung.

Der sechste Aufsatz trägt den Titel: „Die Akustik in ihren Hauptbeziehungen zu den musikalischen Instrumenten.“ Zunächst wird auf die Entstehung der Töne im Allgemeinen und sodann auf die bei den einzelnen Instrumenten hingewiesen; darauf wird das Wesen der Töne erläutert, nach welchem die musikalischen Instrumente in drei Hauptgruppen zerfallen. Nach der Angabe, wie Töne verstärkt, und überhaupt wie grössere Effecte in der Musik erzielt werden können, kommt der Verfasser auf den Bau und die Einrichtung der Violine zu sprechen, welche er die Königin der Instrumente nennt.

Der siebente Aufsatz behandelt „die Motoren des Kleingewerbes“. Der Verf. spricht zuerst über die Bedeutung der Dampfmaschine und geht sodann über zur erklärenden Beschreibung von Feder-, Wasser- und Gasmotoren, ferner der Heissluft- und kleineren Dampfmaschinen. Bei der Besprechung der Dynamomaschine scheint dem Verf. fremd zu sein, dass auch bei gleichbleibender Stromrichtung die Maschine als Motor die entgegengesetzte Drehbewegung von der annimmt, welche sie als Stromerzeuger hatte; denn sonst hätte er nicht gesagt: „wenn man den elektrischen Strom in der „umgekehrten Richtung“ durch die Maschine sendet etc.“. Fig. 131 ist dem Aufsatz nicht einverleibt.

Bei den „elektrischen Maschinen“, welchen der achte Aufsatz gewidmet ist, sind leider mehrere störende Fehler vorhanden. Gleich zu Anfang ist die Induction in Fig. 150 unrichtig angegeben, so dass der Laie die Vorgänge in den nachstehenden Maschinen nicht mehr verstehen kann; in Fig. 157 ist ein Fehler in der Pfeilrichtung, u. s. w.; überhaupt findet man an diesem Aufsatze, dass auf Verbesserung der Druckfehler nur geringe Sorgfalt verwendet ist.

Der neunte Aufsatz: „Kerzen und Lampen“, geht zuerst auf die chemische Zusammensetzung der Beleuchtungsstoffe ein, sodann behandelt er die Natur der Flamme und den Verbrennungsprocess, dem sich unmittelbar die Photometrie anschliesst. Hierauf macht uns der Verfasser mit der Constitution der Fette und deren Verwendung bei der Bereitung der Kerzen bekannt und geht dann zu der Beschreibung der Oellampen über. Den Schluss bildet die Leuchtgasfabrikation und die Theorie der Gassparbrenner.

Der zehnte Aufsatz: „Der Kampf des elektrischen Lichtes mit dem Gaslichte“, enthält zuerst die Fortschritte der Leuchtgasbrenner, nämlich die Regenerativlampen; diesen werden sodann die verschiedenen Bogenlampen- und Glühlampensysteme gegenübergestellt.

Der elfte Aufsatz: „In der galvanoplastischen Werkstätte“, geht zunächst von der Elektrolyse aus, welche gestattet, zusammengesetzte Körper

zu zerlegen. Diese Eigenschaft des elektrischen Stromes bildet die Grundlage der Galvanoplastik, deren verschiedene Verfahren und Anwendungen für das praktische Leben ausführlich erörtert werden.

Der zwölfte Aufsatz: „Die Telephonie und ihre Verwendung im Verkehrsleben der Gegenwart“, führt zuerst die verschiedenen Telephone und Mikrophone an, wie sie für die nachher beschriebene Einrichtung von Sprechstellen nothwendig sind.

Der dreizehnte Aufsatz: „Auf der Sternwarte“, giebt zunächst einen geschichtlichen Ueberblick der Sternwarten und ihrer Instrumente und geht dann zur Betrachtung der Strassburger Sternwarte, einer der neuesten und grössten, über.

B. Nebel.

---

Dr. O. Tumlirz. **Das Potential und seine Anwendung zu der Erklärung der elektrischen Erscheinungen.** Wien, Verlag von A. Hartleben.

Um vorliegendes Buch auch dem Laien zugänglich zu machen, setzt der Verfasser nur Elementarmathematik voraus, weshalb er einige Hilfssätze aus der Mechanik an die Spitze stellt. Sodann zerfällt das Ganze in vier Abschnitte, wovon der erste das Potential der Schwere, der zweite das Potential mit Bezug auf Elektrostatik, der dritte das Potential mit Bezug auf Elektrodynamik und der vierte Magnetismus, Elektrodynamik, Elektromagnetismus und Induction behandelt. Dem Ganzen ist noch ein kleiner Theil über elektrische Einheiten beigegeben. Der Verfasser giebt die Definitionen der Quantität, des Potentials etc. nach elektrostatischem Maasse und fügt unmittelbar daran die in der Praxis üblichen Maasseinheiten, so dass es den Anschein hat, als ob diese Einheiten dem elektrostatischen Maasssysteme angehören würden. Die Tabelle der Stromeinheiten ist der Fehler wegen mit Vorsicht zu gebrauchen.

B. Nebel.

---

**Lehrbuch der Arithmetik** zum Gebrauch an niederen und höheren Lehranstalten und beim Selbststudium. Von B. E. Richard Schurig. In drei Theilen. Erster Theil: Specielle Zahlenlehre. (Zugleich ein Handbuch für Volksschullehrer.) Leipzig, Friedrich Brandstetter. 1883. Preis 3 Mk. 60 Pf.

Es ist eine nicht ganz seltene Sache, dass ein Schriftsteller für die schwachen und starken Seiten seines Buches ein unrichtiges Urtheil zeigt. Oft bedarf es gerade eines vorurtheilsfreien fremden Blickes, um dem Schriftsteller zu zeigen, dass die Eigenschaften seines geistigen Eigenthums, welche er für ganz besondere Tugenden hält, wenig werth sind und andere Dinge, welchen er keine besondere Aufmerksamkeit schenkt, gerade die Hauptstärke seines Werkes ausmachen.

Mit diesem Eindrucke, den wir eben wiedergegeben haben, legen wir das oben angezeigte, 18 Bogen starke Buch aus der Hand. Der Verfasser glaubt sich früheren Erscheinungen gegenüber besonders durch logische Schärfe im Vortheil. Er betont dies — zwar nicht in unbescheidener Weise — im Vorworte mit einigem Nachdruck und kommt auch an anderen Stellen seines Buches auf diesen Punkt zurück. Ja, auf S. 235 lasen wir mit starkem Befremden in einer Fussnote den Ausdruck „bisherige unlogische Mathematik“. Nichtsdestoweniger können wir in den Schritten, die der Verfasser in dieser Richtung gethan hat, keine Fortschritte sehen. Vielleicht wird er selbst in dieser Ueberzeugung von der Ueberlegenheit seines Buches erschüttert, wenn er sich die Mühe geben will, dasselbe mit anderen, z. B. mit den Lehrbüchern von Heilermann-Diekmann oder V. Schlegel, die uns gerade zur Hand sind, vorurtheilsfrei zu vergleichen.

Dennoch haben wir von dem Buche einen im Ganzen recht angenehmen Eindruck empfangen und empfehlen es insbesondere den Lehrern, welche an höheren Lehranstalten den Rechenunterricht in den unteren Classen zu ertheilen haben; denn der Verfasser versteht praktisch zu rechnen. Diese Kunst ist aber für den Mathematiker von Fach, der auf den untersten Stufen die vier Species einexerziert oder auf höheren Classen über frühere Versäumnisse zu seufzen Gelegenheit hat, eine sehr wichtige, aber darum noch lange nicht selbstverständliche Sache.

Bei dem vorwiegend wissenschaftlichen Charakter dieser Zeitschrift müssen wir uns bei diesem rein didaktischen Punkte der grössten Kürze befleissen. Allein wir würden nicht im Stande sein, dem Leser von der trefflichen Methode des Herrn Verfassers ein klares Bild zu entwerfen, wenn wir nicht wenigstens ein Beispiel in einiger Vollständigkeit wiedergäben. Wir wählen S. 105 die Regeln für die Addition. Dort lesen wir:

1. Setze die gleichen Ordnungen, z. B. die Einer, genau senkrecht unter einander.

2. Zeige in gleichmässigem Takte nach und nach auf 9, 2, 7, 4, dabei die Summen 15, 17, 24, 28 denkend. (6 steht über 9.) Also nicht $6+9=15$. $15+2=17$ u. s. w.

3. Bei gleichen Summanden wende die Multiplication an, also statt einer dreimal vorkommenden 6 sprich 18.

4. Suche diejenigen Ziffern heraus, welche sich zu 10 ergänzen. Statt $7+3$ denke 10 u. s. w.

In dieser Weise giebt der Verfasser elf wahrhaft goldene Regeln.

Doch auch der Mathematiker, besonders der Zahlentheoretiker, findet des Ansprechenden in dem Buche recht viel. So die allerliebsten Sätzchen über die Theilbarkeit der Zahlen durch 7, 13, 17, 101 u. s. w., und es ist nicht der kleinste Vorzug des Buches, dass die Beweise dieser Sätze trotz ihrer Strenge gleichsam wie Inductionen aus Beispielen sich darbieten.

Selbstverständlich fehlt die Neuner- und Elferprobe nicht. Als Ausnahme wollen wir hervorheben, dass das Beweisverfahren S. 206 der Strenge gänzlich entbehrt. Ein gleiches Urtheil würden wir über den Vortrag der *regula falsi* S 268 fällen müssen, wenn nicht mit Recht angenommen werden könnte, dass hier nur ein interessantes Rechnungsverfahren mitgetheilt werden soll.

Die Lehre von den „entgegengesetzten Grössen" S. 271 hat uns nicht besonders gefallen wollen, insbesondere nicht die Herleitungen S. 281. Der Vergleich mit Hesse, „Die vier Species. Teubner 1872" fällt nicht glänzend für unsern Verfasser aus.

Fassen wir unser Urtheil zusammen, so haben wir ein Buch vor uns, dessen Fehler den Mathematiker von Fach nicht zu Irrthümern verleiten werden. Der Zahlentheoretiker wird in dem Werke viel Ansprechendes finden, wenn es auch einfach und vielleicht nicht ganz neu ist. Dem Fachlehrer des Rechnens auf den unteren und mittleren Classen höherer Lehranstalten hat der Verfasser eine sehr dankenswerthe Gabe dargeboten.

Coesfeld, im October 1884. K. Schwering.

---

**Leitfaden** zum Unterricht in der **Arithmetik** und **Algebra** an Gymnasien und verwandten Anstalten. Von Dr. Joh. Chr. Walberer, Professor am königl. Gymnasium in Amberg. Zweite, durchgesehene und mit Uebungsaufgaben versehene Auflage. München, Theodor Ackermann. 1884. Preis 1 Mk. 60 Pf.

Es kann nicht oft und eindringlich genug betont werden, dass bei jedem für Lernende bestimmten Buche zwei Dinge wesentlich ins Auge gefasst werden müssen. Erstlich soll von wissenschaftlichem Standpunkte aus der Verfasser insoweit mindestens tadellos erscheinen, dass er nicht längst erkannte und verworfene Irrthümer seinen harmlosen Lesern wiederum neu auftischt. Zweitens soll der Stoff in didaktischer Rücksicht gut gewählt, geordnet und klar vorgetragen werden. Gern fügten wir noch einen dritten Wunsch hinzu; doch findet ihn der Leser erst am Schlusse dieser Anzeige.

In den Anfangsgründen der Arithmetik und Algebra findet sich für Lehrer und Lernende eine Klippe, die wir zunächst kennzeichnen wollen. Die Definitionen des Productes und der Potenz gelten — wie sie gewöhnlich gegeben werden — nur für positive ganze Zahlen als Multiplicator bez. Exponent. Demnach gelten die aus denselben geschöpften Beweise auch nur, wenn die eben genannten Zahlen ganz und positiv sind. Wenn nun die gewonnenen Sätze über diesen Geltungsbereich hinaus angewandt werden, so darf das sicher nicht stillschweigend geschehen. Man hat dem Lernenden beispielsweise zu sagen, dass $(-b).a$ nach der bisherigen Definition

keinen Sinn hat, dass man es also verwerfen oder ihm einen bestimmten Sinn beilegen kann. Diesen Weg hat Hesse eingeschlagen. Andere Mathematiker haben dagegen die Definitionen z. B. der Multiplication so gefasst, dass sie auch negative und gebrochene Multiplicatoren zulässig finden.

Der Verfasser unseres Buches kennt zwar, wie die S. 100 stehende Bemerkung: „Gehen wir umgekehrt davon aus, dass die complexen Zahlen den formalen Zahlengesetzen ebenso unterworfen sind wie die reellen, so u. s. w." zu beweisen scheint, sehr wohl die oben von uns erwähnte Begriffserweiterung. Dennoch übergeht er S. 17 die Sache mit lautlosem Schweigen. Dasselbe Verfahren beobachtet er S. 32, wo er ohne irgendwelche Ausführung behauptet, dass $a^m : a^n = a^{m-n}$, der für positive ganze $m$, $n$ auf S. 31 bewiesen ist, unbeschränkt giltig sei.

Falsch und irreführend ist es, wenn der Herr W. S. 41 behauptet, dass die Cubikwurzel aus einer positiven wie negativen Zahl stets möglich und eindeutig sei. Den Ausdruck „möglich" wollen wir uns merken. Denn auf S. 52 lesen wir: „Da sowohl $b^x$ als auch $b^{-x}$ für ein positives $b$ stets positiv ausfällt, so kann eine negative Zahl $-a$ überhaupt nicht durch $b^x$ ausgedrückt werden; folglich ist $log(-a)$ unmöglich, d. h. der Logarithmus einer negativen Zahl ist imaginär." Hiernach scheint dem Verfasser der Vorwurf, dass er imaginär und unmöglich für gleiche oder synonyme Begriffe hält, leider nicht erspart werden zu können. Unter diesem unangenehmen Eindrucke blieben wir, als wir auf der folgenden 53. Seite lasen: „jede endliche Zahl hat nur einen Logarithmus und umgekehrt jedem reellen Logarithmus entspricht nur eine Zahl $a$". Die Unterstreichung in diesem Sätzchen rührt vom Referenten her. Wir können ferner die Begriffe „unbestimmte" und „diophantische" Gleichung, wie es der Verfasser S. 72 thut, nicht durch ein tonloses „oder" verbinden.

Es scheint nicht ganz verständlich, wenn der Verfasser S. 98 schreibt: „Da jede gerade Wurzel sich auf eine Quadratwurzel reduciren lässt, so kann auch überhaupt jede imaginäre Wurzel auf $\sqrt{-1}$ zurückgeführt werden." Aber einen gewissen und zwar sehr traurigen Sinn kann man ohne Mühe hineinlegen. Als Kleinigkeit mag erwähnt werden, dass die imaginäre Einheit $i$ auch in der Druckschrift durch ein besonderes Zeichen hervortreten sollte. Endlich findet sich ein Versehen in Formel 2 S. 102, welche die Quadratwurzel aus $a+bi$ liefern soll

Glücklicherweise sind wir nun mit unseren Ausstellungen zu Ende und wollen nicht verfehlen zu bemerken, dass im Uebrigen das Buch in manchen Dingen ebenso gut ist wie andere Schulbücher. Ja, gewisse Abschnitte, wie z. B. der die Reihen behandelnde, sind recht gut vorgetragen. Auch die Aufgabensammlung scheint ziemlich reichhaltig und zweckmässig zu sein.

Der erste Satz der Vorrede lautet: „Nicht um einem längst gefühlten Bedürfnisse abzuhelfen, sondern um der Schule zu dienen, übergebe ich dieses Büchlein der Oeffentlichkeit."

Möge diese Bescheidenheit nicht ohne Nachfolge bleiben und sich sogar bei manchen Herren Verfassern zu dem Schlusssatze verdichten, den man erhält, wenn man den sechs letzten Worten des Verfassers das Wörtlein „nicht" beifügt.

Coesfeld, im October 1884. K. Schwering.

---

**Lehrbuch der ebenen Geometrie.** Von Julius Hoch, Lehrer der Mathematik an der v. Grossheim'schen Realschule in Lübeck. Erster Theil: Linien, Winkel, Congruenz und Gleichheit der Figuren. Mit 126 in den Text gedruckten Holzschnitten. Halle, H. W. Schmidt. 1884.

Das vorliegende, 164 Seiten starke Buch ist besonders für berechtigte höhere Bürgerschulen bestimmt, obwohl es auch für andere höhere Lehranstalten sich eignen wird.

Als besonderen Vorzug dieser Schrift kann man die sorgfältige und anschauliche Zeichnung der Figuren hervorheben.

Der Vortrag ist im Ganzen klar, die Beweisführung sehr ausführlich. Beispielsweise zählten wir in der Darstellung des Satzes vom Paralleltrapez 26 Zeilen die als Gleichungen ohne verbindenden Text erscheinen. Das Letztere wird nicht als Mangel empfunden, da kurze, in Parenthese stehende Hinweise für leichtes Verständniss sorgen. Diese Methode des Verfassers hat für die Betonung des logischen Beweisganges in seinen einzelnen Schritten einen unleugbaren Vorzug. Aber der Hauptschritt, der eigentliche Nerv des Beweises dürfte doch in Etwas verhüllt werden.

Die Eintheilung der Dreiecke (S. 26), der Vierecke (S. 49) ist recht hübsch tabellarisch vorgeführt.

Fehler sind uns nicht aufgefallen. Nur würden wir nicht, wie es der Verfasser S 21 thut, eine Ebene durch eine einzige krumme Linie begrenzen lassen. Auch dürfte es nicht mehr richtig sein, Pythagoras als Autor des Satzes von der Winkelsumme des Dreiecks zu citiren. In der „Geschichte der Mathematik" von Cantor, S. 119 flgg., hat diese Frage eine, wie es scheint, abschliessende Entscheidung gefunden. Auch sollte man die Jahreszahlen der griechischen Mathematiker nicht genauer angeben, als man sie, leider, mit Gewissheit kennt.

Die Parallelentheorie gründet der Verfasser im Wesentlichen auf den Begriff des Richtungsunterschiedes. Referent hat gelegentlich seiner Promotion eine dahin lautende These in gleichem Sinne „vertheidigt" und benutzt die Gelegenheit, um Widerruf zu leisten. Diese Darstellung ist nämlich schon deshalb zu tadeln, weil sie die wirkliche, vorliegende Schwierigkeit dem Lernenden gar nicht zum Bewusstsein kommen lässt.

Coesfeld, im October 1884. K. Schwering.

**Lehrbuch der Elementar-Geometrie.** Von Dr. M. Glinzer, Lehrer der allgemeinen Gewerbeschule und der Schule für Bauhandwerker in Hamburg. Erster Theil: Planimetrie Mit 185 Figuren und einer Sammlung von 250 Aufgaben. Zweite verbesserte und vermehrte Auflage. Hamburg, F. H. Nestler & Melle's Verlag. 1884.

Es darf dem vorbezeichneten Büchlein von vornherein zur Empfehlung gereichen, dass es aus dem Unterricht an den im Titel erwähnten Anstalten hervorgewachsen ist. Diesen Ursprung erfährt der kundige Leser nicht aus der Vorrede allein. Vielmehr ist es der Geist einer gesunden Praxis, der aus den Erklärungen in die Theorie hinein und aus der Theorie zu zweckmässigen Anwendungen hinaus wie ein frischer Hauch belebend empfunden wird. So finden wir S. 10 beim ersten eigentlichen Beweise, der im Lehrgange auftritt, nicht sofort das bekannte Schema: „Voraussetzung, Behauptung, Beweis“, sondern der Verfasser hat es mit Grund für dienlich erachtet, die Nothwendigkeit dieser Gedankenstufen dem Schüler kurz und bündig zu erklären. Demselben richtigen Lehrgrundsatze verdanken wir die Anmerkung S. 16: „Die bei der Parcellirung ausgetauschten Stücke Land sollen bei gleich gutem Boden nur gleich, der genaue Grundriss eines Grundstückes demselben nur ähnlich, dagegen bei der fabrikmässigen Herstellung von Maschinen die Theile gleicher Bestimmung womöglich gleich und ähnlich, d. i. congruent sein.“ Ebenso angenehm sind uns die Beispiele zu den Aehnlichkeitssätzen aufgefallen, denen eine recht bündige Darstellung der Proportionssätze vorausgeht. Interessant sind ferner S. 85 und im Anhang einige Aufgaben, welche ohne Zuhilfenahme des Lineals gelöst werden. Die eine derselben, die Auffindung des Mittelpunktes eines gegebenen Kreises, wird, was dem Referenten neu war, Napoleon I. zugeschrieben. Auswahl, Anordnung und Behandlung des Stoffes zeichnen sich im Uebrigen mehr durch den bereits lobend erwähnten Geist einer gesunden, nüchternen Praxis, als durch Originalität aus.

Die Parallelentheorie verschmäht die von Neueren zur Ueberbrückung der bekannten Schwierigkeit angewandten Mittel sämmtlich, obschon S. 33 von der Umschreitung des Polygons Gebrauch gemacht wird. Wenn der Verfasser aber den Satz: „Werden zwei Geraden von einer dritten Geraden so geschnitten, dass ein Paar Gegenwinkel zusammen weniger als zwei Rechte beträgt, so müssen sich die Geraden auf dieser Seite schneiden“ mit der Anmerkung begleitet: „Wenn auch bisher für diesen Satz kein bündiger Beweis gefunden ist u. s. w.“, so erweckt er durch dies „bisher“ Hoffnungen, die er als Mathematiker sicherlich nicht theilt. Ebenso fanden wir den Satz S. 85: „Man muss hierzu den Umfang des Kreises in die gegebene Anzahl gleicher Theile theilen können. Diese noch nicht allgemein gelöste Aufgabe u. s. w.“ Das „noch nicht“ ist ebenso volksverführerisch wie das obige „bisher“. Ebenda ist der Ausdruck „Apotheme“ (?) recht

entbehrlich. Auch sollte in der Definition des Kreises S. 46 jedes Zuviel vermieden und S. 94 die harmonische Theilung anders definirt sein.

Im Uebrigen sei das handliche Büchlein mit seinem schönen Papier, seinen hübschen Figuren und seinem saubern Druck bestens empfohlen.

Coesfeld, im October 1884. K. Schwering.

---

**Lehrbuch der Elementar-Geometrie.** Von Dr. E. Glinzer, Lehrer u. s. w. Zweiter Theil: Stereometrie. Hamburg, F. H. Nestler & Melle.

Dieser zweite Theil ist ebenso angelegt wie der erste. Wir wollen daher auf unser früheres Referat verweisen und nur hervorheben, dass die kurze Darstellung der Kegelschnittslehre gewiss manchem Lehrer der Stereometrie, welcher das Büchlein seinem Unterricht zu Grunde legt, eine willkommene Gabe sein wird. Bemerkenswerthe Unrichtigkeiten sind uns nicht aufgefallen.

Coesfeld, im October 1884. K. Schwering.

---

**Lehrbuch der Elementar-Geometrie.** Von Dr. E. Glinzer. Dritter Theil: Trigonometrie. Hamburg, Verlag von F. H. Nestler & Melle.

Von den drei Theilen des Werkes scheint dieser letzte der bedeutendste zu sein. Die Darstellung ist klar, der Stoff in reicher Fülle ohne ermüdende Weitläufigkeit vorgetragen. Dabei ist jedes trockene Theoretisiren sorgfältig vermieden und eine innige Beziehung zwischen Sätzen und Aufgaben durchweg angestrebt und erreicht. Zum Schlusse erhalten wir eine recht wohlgelungene Darstellung der Grundlehren der sphärischen Trigonometrie. Dem Buche ist eine Sammlung von Aufgaben beigegeben, die zum Theil ein nicht geringes sachliches Interesse darbieten. So finden sich Aufgaben, die gelegentlich der Landesvermessung wirklich vorgekommen sind.

Möge dieser Geist gesunder Praxis sich recht weite Gebiete im Schulleben erobern. Unser Buch bietet dazu eine treffliche Hilfe.

Coesfeld, im October 1884. K. Schwering.

---

**Darstellende und projective Geometrie** nach dem gegenwärtigen Stande dieser Wissenschaft, mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse höherer Lehranstalten und das Selbststudium. Von Dr. Gustav Ad. v. Peschka. II. Band. XVIII und 576 S. gr. 8°. Mit einem Atlas von 11 Tafeln. — III. Band. VIII und 792 S. gr. 8°. Mit einem Atlas von 42 Tafeln. — Wien 1884, Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn. (Vergl. die Recension zu Bd. I d. Jahrg. XXVIII S. 109.)

Wir werden jeden Band für sich behandeln und zur Gewinnung einer Uebersicht jedesmal die Capitelüberschriften unter Angabe des Inhalts besonders wichtiger und charakteristischer Paragraphen vorausschicken.

**Band II: Theorie der Curven und Flächen.**

Erster Abschnitt: Curvenlehre. *I. Capitel: Fundamentaleigenschaften algebraischer Curven.* Einleitung. Hilfsmittel der Analysis, Princip der Anzahl und dessen Anwendungen. Singularitäten ebener Curven. Princip der Dualität. — *II. Capitel: Allgemeine Eigenschaften ebener algebraischer Curven.* Sätze über die Anzahl der gemeinschaftlichen Punkte und Tangenten zweier Curven. Curvenbüschel. Erzeugung von Curven. Die Plücker'schen Formeln. — *III. Capitel: Theorie der polaren algebraischen Curven.* — *IV. Capitel: Der Correspondenzsatz. Anwendung desselben und der Polarentheorie auf die Untersuchung der Eigenschaften algebraischer Curvensysteme.* Steiner'sche, Hesse'sche und Jacobi'sche Curve. Plücker'sche Formeln. Geschlecht der algebraischen Curven. Ein- und mehrdeutige Transformationen. — *V. Capitel: Eigenschaften der Raumcurven und ihrer Projectionen.* Definitionen. Developpable Flächen. Singuläre Elemente. Plücker-Cayley'sche Gleichungen über die Charaktere der Raumcurven.

Zweiter Abschnitt: Allgemeine Theorie der krummen Flächen und Flächensysteme. *VI. Capitel: Allgemeine Eigenschaften algebraischer Flächen.* Definitionen und Erzeugungsarten. Ordnung einer Fläche. Tangentenebenen. Haupttangenten, Punkte verschiedener Krümmung. Singuläre Punkte und Curven. Durchschnitt zweier und dreier Flächen. Anzahl der eine $F_n$ bestimmenden Bedingungen. — *VII., VIII. und IX. Capitel: Lineare Flächensysteme erster, zweiter und dritter Stufe und deren Eigenschaften.* Erzeugnisse derselben. — *X. Capitel: Sätze über die gemeinschaftlichen Curven zweier und über die gemeinschaftlichen Punkte dreier Flächen.* — *XI. Capitel: Projectivische Erzeugung algebraischer Flächen und ihrer Schnittcurven;* durch projectivische Flächen und Raumcurvenbüschel und reciproke Netze. — *XII. und XIII. Capitel: Theorie der Polaren algebraischer Flächen und deren Anwendung auf die Entwickelung projectivischer Eigenschaften von Flächen und Systemen derselben.* — *XIV. Capitel: Projectivische lineare Flächensysteme $\mu^{ter}$ Stufe und symmetrische Flächencomplexe.* — *XV. Capitel: Eigenschaften der Hessiana und Steineriana oder der conjugirten Kernflächen einer* $F_n$. — *XVI. Capitel: Bestimmung der Charaktere und Singularitäten einiger Flächen, welche sich aus gegebenen ableiten lassen.* Die Fläche der Haupttangenten in den Punkten eines ebenen Schnittes. Die zwei Flächen gemeinschaftlich umschriebene Developpabele.

Dritter Abschnitt: Theorie der Flächen zweiten Grades. *XVII. Capitel: Definitionen und Fundamentaleigenschaften.* Regelflächen und Nichtregelflächen. Polarentheorie. Hauptaxen. Schnittcurve zweier Flächen und gemeinschaftlich umschriebene Developpable.

Vierter Abschnitt: Constructive Theorie der krummen Linien und Flächen. *XVIII. Capitel: Graphische Darstellung der ebenen und der Raumcurven.* — *XIX. Capitel: Constructive Theorie der Kegel- und Cylinderflächen im Allgemeinen.* Darstellung dieser Flächen in den verschiedenen Projectionsarten. Ebene Schnitte und Tangentialebenen. Abwickelung und geodätische Linien. — *XX. Capitel: Kegel- und Cylinderflächen zweiten Grades.* — *XXII. und XXIII. Capitel: Developpable Flächen, welche zwei Curven oder Flächen umschrieben sind.*

Als wesentlichste Eigenthümlichkeit der Behandlungsweise algebraischer Curven im vorliegenden Werke ist wohl die Benutzung des Princips von der Erhaltung der Anzahl und des Correspondenzprincips als synthetische Hilfsmittel anzusehen. Zugestanden, dass die Anwendung statthaft sei, so hätte jedenfalls die geometrische Existenz der imaginären Elemente in der Weise nachgewiesen werden müssen, wie es v. Staudt in seinen Beiträgen zur Geometrie der Lage und später Lüroth im VIII. Bande der Math. Ann. gethan haben. Aber von alledem ist nichts zu bemerken. Obgleich bei der gewählten Behandlungsweise ohne Frage die imaginären Elemente stets mitgezählt werden, fügt der Verfasser zuweilen (z. B. Seite 112 Satz 114) das Wort „höchstens" hinzu, was den Lernenden verwirren muss. Der Verfasser zeigt übrigens, dass ihm sehr wohl der grosse Unterschied zwischen synthetischem Aufbau und analytischer Entwickelung bewusst ist, indem er § 8 sagt: „Selbstverständlich *(sic!)* giebt es auch Curven von unendlich hoher Ordnungszahl. Auf dieselben sind unsere diesfallsigen Entwickelungen nicht anwendbar. (Warum? wird nicht gesagt.) Wir werden uns daher veranlasst sehen, diese seinerzeit in einem selbstständigen Capitel einer näheren Betrachtung zu unterziehen." Auf dieses Capitel hätte man gespannt sein dürfen, aber — leider existirt es im Buche nicht.

Gehen wir nun zur Besprechung der einzelnen Capitel über.

In der Einleitung wird auf die verschiedenen Mannichfaltigkeiten oder geometrischen Oerter hingewiesen, welche sich aus den Elementen: Punkt, Gerade, Ebene aufbauen lassen, und werden jene erstens nach ihren erzeugenden Elementen, zweitens nach ihrer Dimension oder Stufe eingetheilt. Hierbei wird die Curve irrthümlich (§§ 4 und 5) zu den Ebenenörtern erster Stufe gerechnet. Linienörter zweiter Stufe werden als „Congruenzen", Linienörter dritter Stufe, „Complexe", aber gar nicht aufgeführt, sie scheinen nicht untersucht werden zu sollen.

Nun wird an der Hand analytischer Betrachtungen das „Erhaltungsprincip" entwickelt, an einfachen Beispielen erläutert und dann zur Bestimmung der Anzahl der Schnittpunkte zweier Curven, der Anzahl ihrer gemeinschaftlichen Tangenten etc. benutzt.

Ein falscher Schluss, der zu bedenklichen Fehlern führen würde, befindet sich auf S. 10 § 11: Hat eine Curve $C_m$ mit einer Ebene mehr als

$m$ Punkte gemein, so hat sie mit dieser Ebene unendlich viele, d. h. alle Punkte gemein etc. Die Curve braucht aber nicht alle Punkte mit der Ebene gemein zu haben, sondern nur in eine ebene Curve und eine andere Raumcurve zu zerfallen, und dies tritt in der Regel gerade bei darstellend geometrischen Untersuchungen ein.

Der Fehler findet sich dann auch in den dualen Betrachtungen. (Vergl. ferner § 197.)

Die §§ 24 flgg. haben als Gegenstand die Singularitäten der ebenen Ordnungscurven Doppel-, Rückkehr- und mehrfache Punkte. Die Bestimmung der Anzahl von Schnittpunkten der Curventangente, welche in die Singularitäten rücken, ist eine sehr oberflächliche und auch fehlerhafte. Erstens wirft nämlich der Verfasser die beiden Arten des Rückkehrpunktes zusammen und nennt dann diesen beiden gegenüber den Selbstberührungspunkt eine Singularität höheren Ranges, während die Schnabelspitze die höchste von den dreien ist. Das vom isolirten Punkte Gesagte ist uns in der gebotenen Form unverständlich. Eine gleichzeitige Behandlung der Ordnungs- und Classencurven wäre wohl zweckmässig gewesen. Die Art und Weise, wie die reellen Berührungspunkte einer Doppeltangente sich beim Uebergang zum Wendepunkt vereinigen und dann imaginär werden, scheint dem Verfasser nicht klar zu sein, wenigstens berechtigen die zur Erklärung dieses Uebergangs ganz ungeeigneten Figuren Taf. I: 9, 10, 11 zu dieser Vermuthung.

In Capitel II finden wir auf S. 34 im Satz 27 Folgendes: „Ist ein Punkt $A$ ein $r$-facher Punkt einer $C_n$ und ein $s$-facher Punkt einer $C_p$, und besitzen beide in $A$ $t''$ gemeinschaftliche Tangenten, so ist die Anzahl der in $A$ vereinigten Schnittpunkte der Curven $rs+t''$." Man sieht, dass es „mindestens" so viele Punkte heissen muss. Tiefer wird auf die Frage nicht eingegangen. Eine ähnliche Correctur bedürfen die Sätze 92 und 93, S. 100, welche sich auf die Classenerniedrigung durch einen $r$-fachen Punkt mit einer Reihe vereinigter Zweige bezieht. Diese Fragen sind in Wahrheit viel verwickelter, als es nach der vorliegenden Darstellung erscheint, in der die neueren Arbeiten von Cayley, Smith, Halphen, Brill etc. gar nicht berücksichtigt sind. Es würde zu weit führen, wollten wir die folgenden Capitel mit ähnlicher Ausführlichkeit wie die bisherigen behandeln. Mit gewisser Vorsicht wird man auch die weiteren derartigen Anzahlbestimmungen aufzunehmen haben. (Vergl. die Betrachtung § 199 am Anfange.) Die Darstellung im Allgemeinen, namentlich die Behandlung der verschiedenen Erzeugungsarten einer Curve ist recht ansprechend.

Eine willkommene Neuerung ist die Bestimmung der Classe einer $C_n$ nach der Methode von Beck (Math. Ann., Bd. 14 S 217): Die Curve $C_n$ wird unendlich wenig nach einer Richtung verschoben und erhält die Lage $C'_n$. Dadurch bleiben die $n$ unendlich fernen Punkte derselben ungeändert und die übrigen $n(n-1)$ Schnittpunkte beider Curven sind ersichtlich die

Berührungspunkte der Tangenten in der Richtung der Verschiebung, d. h. ihre Anzahl ist die Classe. Die Erniedrigung der Classe, welche durch das Auftreten von Singularitäten herbeigeführt wird, lässt eine ähnliche Bestimmung zu. —

Die Polarentheorie wird im III. Capitel nach der Methode Schur's vorgetragen, nämlich durch Induction mit Hilfe des Schlusses von $n$ auf $n+1$ aus der Kegelschnittlehre gewonnen, „wodurch diese Theorie mehr an Anschaulichkeit gewinnt, als es bei Anwendung der im $r^{ten}$ Grade harmonisch getheilten Radien vectoren, deren Cremona sich bedient, erreichbar ist.“ (Vorrede VIII.)

In Capitel IV, S. 125, nennt der Verfasser die Tangenten, welche von einem Punkte an seine konische Polare gezogen werden können, „Indicatricen“ des Punktes, um dann später S. 26 sagen zu können: Die Fundamentalcurve bildet mit der Hesse'schen Curve zusammen den Ort der Punkte, deren Indicatricen sich auf eine einzige Gerade reduciren.

In Capitel V § 139 heisst es: „Unter „Rang“ einer Raumcurve verstehen wir die Anzahl der Tangentialebenen derselben, welche durch eine beliebige Gerade gehen, oder, was dasselbe ist, die Anzahl ihrer Tangenten, welche eine beliebige Gerade im Raume schneiden. Die Anzahl der Schmiegungsebenen einer Raumcurve, welche durch einen beliebigen Punkt gehen, nennen wir „Classe“ der Raumcurve. Nebenbei sei bemerkt, dass viele Autoren, namentlich die englischen, mit „Classe einer Raumcurve“ dasjenige bezeichnen, was wir als Rang definirt haben, und umgekehrt.“ Was sagt der Verfasser dazu, dass sich unter den „vielen Autoren“ auch Herr Peschka befindet, wie aus Bd. II § 6 von dessen „Darst. u. project. Geometrie“ zu ersehen ist? Eine angefügte Note 24 weist auf Note 1 (zu § 6) zurück und hier heisst es: Die Definition der „Classe“ einer Curve, als Zahl ihrer geradlinigen Erzeugenden, welche eine feste Gerade schneiden, ist aus der Definition der Ordnung (der Anzahl der Schnittpunkte mit einer Ebene) **reciprok** abgeleitet. Sind solche Fehler schliesslich noch als Flüchtigkeitsfehler zu betrachten?

Capitel VI. In § 166 wird definirt: „Eine krumme Fläche ist der geometrische Ort der Lagen einer Curve, welche nach einem bestimmten Gesetze entweder ihre Lage allein oder gleichzeitig ihre Form stetig ändert.“ „Die am häufigsten (?) vorkommenden Flächen sind folgende: A. Krumme Flächen, welche durch eine Curve erzeugt werden können, deren Gestalt unveränderlich bleibt; B. Flächen, welche durch Lagenveränderung einer der Grösse und Form nach veränderlichen Curve entstehen.“ Welche Flächen giebt es denn ausser diesen beiden Arten noch, und wie soll man den Ausspruch: „Die Mannichfaltigkeit, welche bei dieser Erzeugungsart (B) auftritt, ist so unendlich gross, dass man keine besonderen Typen für derartig erzeugte Flächen aufgestellt hat“ deuten? In den Flächen unter B sind eben alle denkbaren enthalten.

Man findet im Weitern sehr viele Sätze über Schnitte von Flächen unter einander und mit Curven, von denen manche wenig interessant und überdies äusserst evident sind; auf manche andere sehr wichtige Dinge geht der Verfasser nicht ein, z. B. ist nirgends dargethan, dass ein Berührungspunkt dreier Flächen im Allgemeinen für vier Schnittpunkte zählt.

Die folgenden Capitel VII—XVI sind den allgemeinen Flächen gewidmet. Der Verfasser verweist auf Cremona's „Theorie der Oberflächen", Reye's Arbeit „Die algebraischen Flächen, ihre Durchdringungscurven, Schnittpunkte und projective Erzeugung" in Math. Ann. Bd. III, und Salmon-Fiedler, „Analytische Geometrie des Raumes". Diese Capitel haben uns von allen am besten gefallen. Da die Behandlungsweise sich an diejenige der citirten Schriften anlehnt, so haben wir nichts weiter zu bemerken.

Die Theorie der Flächen zweiten Grades — der Inhalt des dritten Abschnittes — soll der Vorrede nach zum Vorstudium der Theorie der allgemeinen Flächen, im vorliegenden Bande in den Grundzügen gegeben werden. Es wäre aber dann entschieden besser gewesen, die $F_2$ an die Spitze des zweiten Abschnittes zu stellen; denn es macht einen merkwürdigen Eindruck, wenn nach der Entwickelung von complicirtesten Schnittpunktsätzen so einfache wie 448 S. 423 mit grosser Breite bewiesen werden, namentlich da S. 242 in 226 ein viel allgemeinerer als bekannt vorausgesetzt wird. Die Umkehrung von 448, nämlich 449: „Berühren sich zwei Flächen zweiten Grades in zwei Punkten, so besitzt die Durchschnittscurve vierter Ordnung dieser beiden Flächen zwei Doppelpunkte, d. h. dieselbe zerfällt in zwei Kegelschnitte, deren jeder durch die beiden Berührungspunkte geht", ist zudem nicht correct, denn die Flächen können sich auch in einer Geraden und einer Raumcurve dritter Ordnung durchsetzen. In den Elementen sind auch hier Ungenauigkeiten. Wenn einmal gesagt wird, dass eine Fläche von jeder Ebene in einem Kegelschnitte, der auch imaginär sein kann, getroffen wird, so darf nicht gleich darauf der andere Satz stehen, dass eine Nichtregelfläche keine einzige Gerade enthalte, denn imaginäre Gerade enthält sie auch. Die Polarentheorie ist ähnlich wie bei Fiedler, nur viel breiter entwickelt. Auf S. 409 ist der sonderbare Schluss gemacht: „Da es nur eine unendlich ferne Ebene giebt, so besitzt eine Fläche zweiten Grades nur einen einzigen Mittelpunkt." Der Verfasser wende nicht ein, dass es sich hier nur um allgemeine Flächen handle, denn die Argumentation hat damit nichts zu thun und überdies wird hin und wieder gesagt, dass die Sätze „selbstverständlich" für Cylinder- und Kegelflächen gelten. In § 408 wird das Hauptaxenproblem in der üblichen Weise gelöst. Die Hauptaxen ergeben sich als Schnitte zweier Kegel zweiter Ordnung. Jeder derselben wird erzeugt von allen Durchmessern, die gleichzeitig senkrecht zu allen Durchmessern einer Ebene stehen und ihnen conjugirt sind. Mit Ausnahme einer einzigen der vier gemeinschaftlichen

Erzeugenden beider Kegel, nämlich derjenigen, welche der Schnittlinie der beiden benutzten Durchmesserebenen zugeordnet ist, müssen jene Erzeugenden Hauptaxen sein, da sie auf zwei Durchmessern senkrecht stehen und ihnen conjugirt sind. Wir finden nun in keinem Lehrbuche bestimmt ausgesprochen, selbst bei Fiedler (vergl. Darst. Geometrie S. 358) und Reye (vergl. Geometrie d. Lage II, 45) nicht, dass die Schnittlinien der Kegel stets alle reell sind. Immer schliesst die Beweisführung ähnlich, wie in dem vorliegenden Werke S. 422: „... Diese Kegel müssen demnach mindestens noch eine reelle Erzeugende $\delta a$ gemein haben, können aber auch noch drei reelle Erzeugende $\delta_a$, $\delta_b$, $\delta_c$ gemeinschaftlich besitzen.“ Im erstern Falle ergeben sich dann die beiden anderen Axen als Hauptaxen des Kegelschnittes in der zu $\delta_a$ conjugirten Durchmesserebene. Und nun sollte gesagt sein, dass die Unterscheidung der beiden Fälle überflüssig sei, da jetzt ersichtlich die Hauptaxen als Kegelseiten den Schnittlinien der zugehörigen Durchmesserebene mit den drei Hauptebenen entsprechen: Dem ganzen Bündel der Durchmesserebenen entspricht ein Kegelnetz mit drei stets reellen Basisstrahlen, den Hauptaxen.

Bedauerlich ist es, da doch einmal metrische Beziehungen (entgegen dem im Vorworte VIII Gesagten) besprochen werden, dass die Specialisirung für Paraboloide mit keinem Worte erwähnt ist.

Capitel XVIII—XX bewegen sich mehr auf dem Gebiete der darstellenden Geometrie im engern Sinne, auf sie bezieht sich der grösste Theil der Figurentafeln. Wenn manche so sehr einfache weggeblieben wären, so hätte es nichts geschadet; wäre jedoch andererseits ein etwas schwierigeres Beispiel, wie etwa die Untersuchung der Durchdringungscurve zweier Kegel zweiter Ordnung, in Bezug auf ihre unendlich fernen Elemente vollständig constructiv durchgeführt worden, so hätte der Verfasser etwas geboten, was nicht überall zu finden ist.

Viele der folgenden Capitel sind wahre Muster von Weitschweifigkeit. Man lese z. B. die §§ 458—463 (acht Seiten), die wahrlich nichts enthalten, als was sich direct für Kegelflächen aus den Sätzen von Pascal und Brianchon der Ebene ablesen lässt. § 485: Zwei Seiten über die Aufgabe, einen Kegel so zu schneiden, dass die Projection der Schnittcurve ein Kreis wird. § 514: Die zweien Kreisen auf der Kugelfläche doppelt umschriebene Developpable soll bestimmt werden. Nach zwei Seiten langen Entwickelungen gelangt man zu dem Resultat, dass besagte Kreise centrisch collinear sind. Wenn im I. Bande nicht angeführt ist, dass zwei sich in zwei Punkten schneidende Kegelschnitte immer centrisch collinear sind, so ist das schlimm.

Die letzten Untersuchungen beziehen sich auf die Developpable, welche zweien Kegelschnitten mit gemeinschaftlicher Tangente doppelt umschrieben werden kann, — und die Flächen derselben Erzeugungsart für zwei all-

gemein liegende Kegelschnitte. Die Charaktere werden mit Hilfe früher entwickelter Formeln bestimmt.

**Band III: Die Flächen zweiten Grades.**

Erster Abschnitt: Windschiefe Flächen. *I. Capitel: Erzeugung und Fundamentaleigenschaften windschiefer Flächen im Allgemeinen.* — *III. Capitel: Das windschiefe Hyperboloid.* Projectivische Eigenschaften, verschiedene Erzeugungsarten, Mittelpunkt, Asymptotenkegel etc. Besondere Erzeugungsarten. Kreisschnitte. — *III. Capitel: Das orthogonale Hyperboloid.* — *IV. und V. Capitel: Der gleichseitige Kegel und das gleichseitige Hyperboloid.* Behandlung nach Schröter's Oberflächen zweiter Ordnung. Die Sätze über das Tetraeder sind reproducirt. — *VI. und VII. Capitel: Das hyperbolische Paraboloid und das gleichseitig-hyperbolische Paraboloid.* — *VIII. Capitel: Das windschiefe Rotationshyperboloid.* — *IX. Capitel: Darstellung des windschiefen Hyperboloids in verschiedenen Projectionsarten und Lösung einiger dasselbe betreffenden Aufgaben.* Darstellung in orthogonaler Projection durch zwei Hauptschnitte. Kegelschnittconstructionen vermittelst windschiefer Hyperboloide. — *X. Capitel: Aufgaben und Constructionen, das hyperbolische Paraboloid betreffend.* — *XI. Capitel: Die Strictionslinien der Regelflächen zweiten Grades.*

Zweiter Abschnitt: Die Nichtregelflächen zweiten Grades. *XII. — XVI. Capitel: Die Kugelfläche, das Kugelgebüsch, das Princip der reciproken Radien, das Kugelbündel und das Kugelbüschel, Theorie der Kugelberührung und der Aehnlichkeitspunkte.* — *XVII. Capitel: Die Dupin'sche Cyclide.*

Dritter Abschnitt: Die Rotationsflächen zweiten Grades. *XVIII.—XXI. Capitel: Collineare Verwandtschaft der Flächen mit der Kugel.*

Vierter Abschnitt: Die dreiaxigen Flächen zweiten Grades. *XXII. — XXIX. Capitel: Constructive Behandlung der Kugeln, Rotationsflächen und allgemeinen Flächen.* — *XXX. und XXXI. Capitel: Der gegenseitige Schnitt zweier Flächen und die ihnen gemeinschaftlich umschriebene Developpable.* Schaaren von Flächen zweiten Grades. Confocale Flächen. — *XXXII. Capitel: Die stereographische Projection, ihre Verallgemeinerung für Flächen zweiten Grades und ihre specielle Anwendung als Kartenprojection.*

Bei der aus vorstehender Uebersicht zu entnehmenden Vertheilung des Stoffes ist es von vornherein zu erwarten, dass dieselben, oder wenigstens eng verwandten Dinge doppelt und mehrfach entwickelt werden, was denn auch in der That der Fall ist. Kommt nun noch hinzu, dass die Breite der Darstellung, die uns schon im ersten Bande nicht angenehm berührte, aber damals sich mit dem Bestreben des Verfassers, für den Anfänger deutlich zu sein, rechtfertigen liess, eher zu- als abgenommen hat, so wird für's Erste erklärlich, wie mit den „Flächen zweiten Grades“ sich die

ungeheure Zahl von fast 800 Seiten ausfüllen liess. Man denke sich nur, dass alle Aufgaben über Schnitte der Flächen mit Ebenen und Geraden, über Tangentenebenen, Tangentenkegel etc. der Reihe nach an den verschiedenen Gattungen der $F_2$ durchgeführt werden, Aufgaben, bei denen Jeder sofort nach Lösung von ein paar instructiven Beispielen sieht, worauf es ankommt, und die in keiner Weise weiter führen können! — So wichtig und unerlässlich die graphische Durchführung in einzelnen Fällen ist, so zwecklos erscheint es uns, ganze Serien ähnlichster Aufgaben in der Weise zu lösen.

Wir haben redlich nach Dingen gesucht, die zu einer besondern Hervorhebung geeignet sein möchten; unsere Ausbeute war gering. Neu und schön sind die Constructionen doppelt berührender Kegelschnitte mit Hilfe der Methode der darstellenden Geometrie. Um z. B. den Kegelschnitt zu finden, der durch drei Punkte geht und einen andern doppelt berührt, betrachte man den letztern als Contour einer Rotationsfläche, die drei gegebenen Punkte als eine Projection dreier Punkte dieser Fläche, dann lässt sich die zweite Projection leicht ermitteln. Die Ebene der drei Punkte schneidet die Fläche in einer Curve, deren Projection die Contour doppelt berührt, womit die Aufgabe gelöst ist. Die Erklärung des Zusammenhangs zwischen dieser Lösung und der Steiner'schen* wäre am Platze gewesen. Man sieht sehr leicht, dass die Kegelschnitte nur dann reell sind, wenn die Punkte entweder sämmtlich innerhalb oder sämmtlich ausserhalb des Kegelschnittes liegen, da in jedem andern Falle die zu ermittelnden räumlichen Punkte theilweise und damit die schneidenden Ebenen immer imaginär sind. Der Verfasser macht ohne Angabe des Grundes, weshalb andere Annahmen auszuchliessen sind, stets solche, welche reelle Kegelschnitte liefern.

Einen guten Maassstab für die Unvollständigkeit des vorliegenden Werkes werden wir durch Anführung derjenigen Dinge finden, die nicht darin behandelt sind. Wir nennen die folgenden: Kegelschnittbüschel und Netze, d. h. die wichtigen Constructionen, welche sie liefern; — ebene und räumliche Polarsysteme, namentlich auch als reelle Repräsentanten imaginärer Gebilde zweiter Ordnung; — Flächen zweiter Ordnung als Erzeugnisse reciproker Bündel; — reciproke Systeme, insbesondere das Nullsystem und der lineare Complex mit den Beziehungen zur Raumcurve dritter Ordnung, — lauter Dinge von fundamentaler Wichtigkeit.

Diese Lücken machen sich denn auch zuweilen recht fühlbar, so z. B. sieht sich der Verfasser gelegentlich der Kugeltheorie veranlasst, den imaginären Kugelkreis einzuführen (obgleich die imaginären Kreispunkte nirgendwo erwähnt sind). Zu dem Endzwecke werden sämmtliche Poldreiecke der unendlich fernen Ebene in Bezug auf ihre Schnittcurve mit der Kugel als „Polarsystem“ bezeichnet und es wird bewiesen, dass eine zweite Kugel

* Crelle Bd. XLV S. 222, oder Steiner-Schröter, Synth. Geom., S. 365.

einen unendlich fernen Kreis mit demselben Polarsystem besitzt. Endlich heisst es: „Aus der Theorie der Kegelschnitte ist aber bekannt, dass zu einem Polarsystem nur ein einziger Kegelschnitt gehört etc.“ Es klingt dies einfach unglaublich, wenn man weiss, dass die Theorie der Polarsysteme sich im Buche gar nicht findet. Nur schwer können wir uns versagen, den ganzen Inhalt des § 183 wiederzugeben; derselbe schliesst mit der hier gänzlich unmotivirten Eintheilung der geometrischen Sätze in projectivische und metrische, je nachdem dieselben Beziehungen zum Kugelkreise haben oder nicht. Der Verfasser kann „diese Eigenthümlichkeit (des Kugelkreises) an dieser Stelle noch nicht beweisen“. Man fragt sich mit Recht, wo und bei welcher Gelegenheit das später geschehen wird, da der Verfasser im vorliegenden Bande nicht wieder auf den Gegenstand zurückkommt.

Man traut seinen Augen nicht, wenn man auf S. 748 liest: Eine Raumcurve dritten Grades kann nie als Schnitt zweier Cylinder zweiten Grades erhalten werden.

Bei der Bestimmung des gemeinschaftlichen Polartetraeders zweier $F_2$, S. 760, ist nirgends bewiesen, dass die auftretenden Raumcurven dritter Ordnung sich wirklich in vier Punkten, den Ecken des gesuchten Tetraeders schneiden. Die „früheren Erörterungen“, aus denen das folgen soll, können wir wenigstens nicht finden.

In Bezug auf die beigegebenen sehr schön gezeichneten Tafeln ist zu bemerken, dass trotz deren Menge keine Figur vorkommt, aus welcher man eine Vorstellung von der Gestalt der verschiedenen Flächen zweiter Ordnung gewinnen könnte. Ausstattung vorzüglich.*

Hannover. Dr. Carl Rodenberg.

---

**Kritische Bemerkungen zur Einführung in die Anfangsgründe der „Géometrie descriptive“.** Von Franz Tilšer, Professor an der k. k. böhmischen technischen Hochschule in Prag. Erstes Heft. Mit einer lithographirten Tafel. XLIV u. 96 S. Wien 1883, Alfred Hölder.

In dem vorliegenden Hefte ist so ziemlich von allen Naturwissenschaften die Rede, nur nicht von dem, was man erwartet, nämlich einer Verbesserung der Lehrmethode der darstellenden Geometrie. Diese Wissenschaft ist nach des Verfassers Ansicht nicht identisch mit der „Géometrie descriptive“ Monge's. Worin der Unterschied eigentlich bestehe, ist nirgends klar gesagt; wenigstens war es uns nicht möglich, aus den bunten

* Im Referat zu Band I ist ein von Schwarz herrührender Beweis des Pohlke'schen Satzes (vergl. Crelle LXIII. Bd.) irrthümlich Pohlke selbst zugeschrieben, was wir hierdurch richtigstellen.

Reihen von Citaten und Deductionen heterogenster Natur den Kern herauszuschälen. Hoffentlich sagt der Verfasser in den folgenden Heften irgendwo kurz und bündig, wie seiner Ansicht nach die qu. Doctrin gelehrt werden muss und was er mit dem vorliegenden Buche bezwecken will.

Hannover. Dr. Carl Rodenberg.

---

# Bibliographie

## vom 16. December 1884 bis 15. Februar 1885.

---

### Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften. Jahrg. 1885, Nr. 1—3. Berlin, Dümmler. compl. 12 Mk.

Abhandlungen der königl. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen. 31. Bd. v. J. 1884. Göttingen, Dieterich. 48 Mk.

Annalen der Münchener Sternwarte. 10. Supplementbd. München, Franz. 3 Mk.

Journal für reine und angewandte Mathematik (begr. v. Crelle), herausgeg. v. L. Kronecker und A. Weierstrass. 98. Bd. 1. Heft. Berlin, G. Reimer. compl. 12 Mk.

Mathematische Annalen, herausgeg. v. F. Klein und A. Mayer. 25. Bd. (4 Hefte). 1. Heft. Leipzig, Teubner. compl. 20 Mk.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftl. Unterricht, herausgeg. v. V. Hoffmann. 16. Jahrg. (1885). 1. Heft. Ebendas. compl. 12 Mk.

Annalen der Physik und Chemie (begr. v. Poggendorff), herausgeg. von G. Wiedemann. Jahrg. 1885 (12 Hefte). 1. Heft. Leipzig, Barth. compl. 31 Mk.

Beiblätter zu den Annalen der Physik und Chemie, herausgeg. von G. und E. Wiedemann. 9. Bd. (12 Hefte). 1. Heft. Ebendas. compl. 16 Mk.

Zeitschrift zur Förderung des physikal. Unterrichts. 1. Jahrg. (12 Hefte). 1. und 2. Heft. Berlin, Lisser & Benecke. compl. 12 Mk.

Die Fortschritte der Physik, dargestellt von der physikal. Gesellschaft in Berlin. 34. Jahrg. (Jahr 1878), 3. Abth.: Physik der Erde; redigirt von Neesen. Berlin, G. Reimer. 12 Mk.

Zeitschrift für Vermessungswesen, herausgeg. von W. Jordan. 14. Jahrg. 1. Heft. Stuttgart, Wittwer. compl. 9 Mk.

Zeitschrift für Instrumentenkunde, redigirt v. A. Leman und A. Westphal. 5. Jahrg. (12 Hefte). 1. Heft. Berlin, Springer. compl. 18 Mk.

Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica, ed. R. v. Hanstein. 34. Jahrg. 1. Heft, Januar—Juni 1884. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk. 40 Pf.

Connaissance des temps ou des mouvements célestes pour l'an 1886. Paris, Gauthier-Villars. 4 Frs.

## Reine Mathematik.

Weierstrass, K., Formeln und Lehrsätze zum Gebrauch der elliptischen Functionen. Nach Vorlesungen bearbeitet von H. Schwarz. Bogen 1—10. Berlin, Friedländer & S. 6 Mk.

Hamilton, W., Elemente der Quaternionen; deutsch von P. Glan. 2. Bd. 2. Hälfte (Schluss). Leipzig, Barth. 7 Mk. 30 Pf.

Spitzer, S., Untersuchungen im Gebiete linearer Differentialgleichungen. 2. Bd. Wien, Gerold. 3 Mk.

Winckler, A., Ermittelung der Grenzen für die Werthe bestimmter Integrale. (Akad.) Ebendas. 20 Pf.

Simon, M., Die Elemente der Arithmetik als Vorbereitung auf die Functionentheorie. Strassburg, Schultz & Co. 1 Mk. 20 Pf.

Kaiser, H., Die Determinanten für den ersten Unterricht in der Algebra. Wiesbaden, Bergmann. 1 Mk.

——, Analytische Auflösung der isoperimetrischen Aufgaben Steiner's für ein Polygon. (Dissert.) Jena, Deistung. 60 Pf.

Quensen, C., Analytische Betrachtungen über die Raumformen, für welche das Congruenzaxiom gilt. Braunschweig, Göritz & Putlitz. 1 Mk. 20 Pf.

Weingarten, J., Ueber die Theorie der auf einander abwickelbaren Oberflächen. Berlin, Mayer & Müller. 2 Mk. 80 Pf.

Gusserow, C., Leitfaden für den Unterricht in der Stereometrie und den Elementen der Projectionslehre. Berlin, Springer. 1 Mk. 20 Pf.

Spieker, Th., Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Potsdam, Stein. 1 Mk. 40 Pf.

## Angewandte Mathematik.

Czuber, E., Zur Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten. (Akad.) Wien, Gerold. 50 Pf.

Kraft, F., Sammlung von Problemen der analytischen Mechanik. 6. Lief. Stuttgart, Metzler. 2 Mk.

Kick, F., Das Gesetz der proportionalen Widerstände und seine Anwendungen. Leipzig, Felix. 6 Mk.

Herrmann, G., Die graphische Behandlung der mechanischen Wärmetheorie. Berlin, Springer. 1 Mk. 20 Pf.

Siemens, W., Ueber die Erhaltung der Sonnenenergie. Uebers. v. E. Worms. Ebendas. 4 Mk.

Israel-Holzwart, K., Elemente der theoretischen Astronomie. 1. Abth.: Theorie der elliptischen Bewegung und der Bahnbestimmung. Wiesbaden, Bergmann. 6 Mk. 40 Pf.

Oppolzer, Th. v., Ueber die Länge des Siriusjahres und der Sothisperiode. (Akad.) Wien, Gerold. 50 Pf.

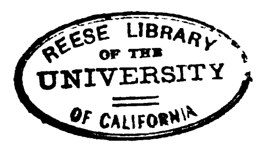
Zehden, F., Methode der directen Rechnung einer wahren Monddistanz aus beobachteten. (Akad.) Ebendas. 20 Pf.

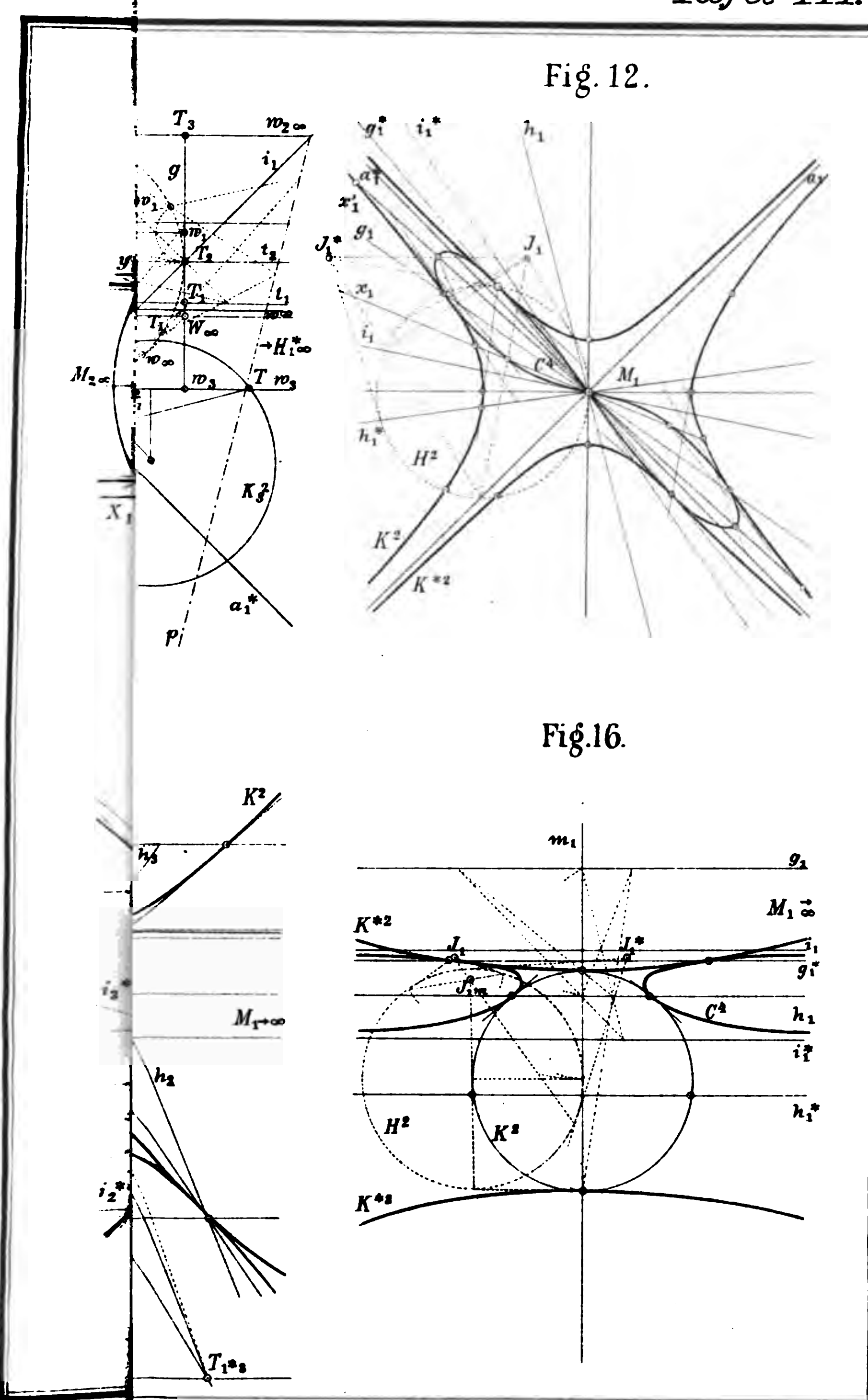
**Physik und Meteorologie.**

Dechant, E., Ueber den Gang der Lichtstrahlen durch Flüssigkeiten in Glasröhren und die Bestimmung der Brechungsexponenten condensirter Gase. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

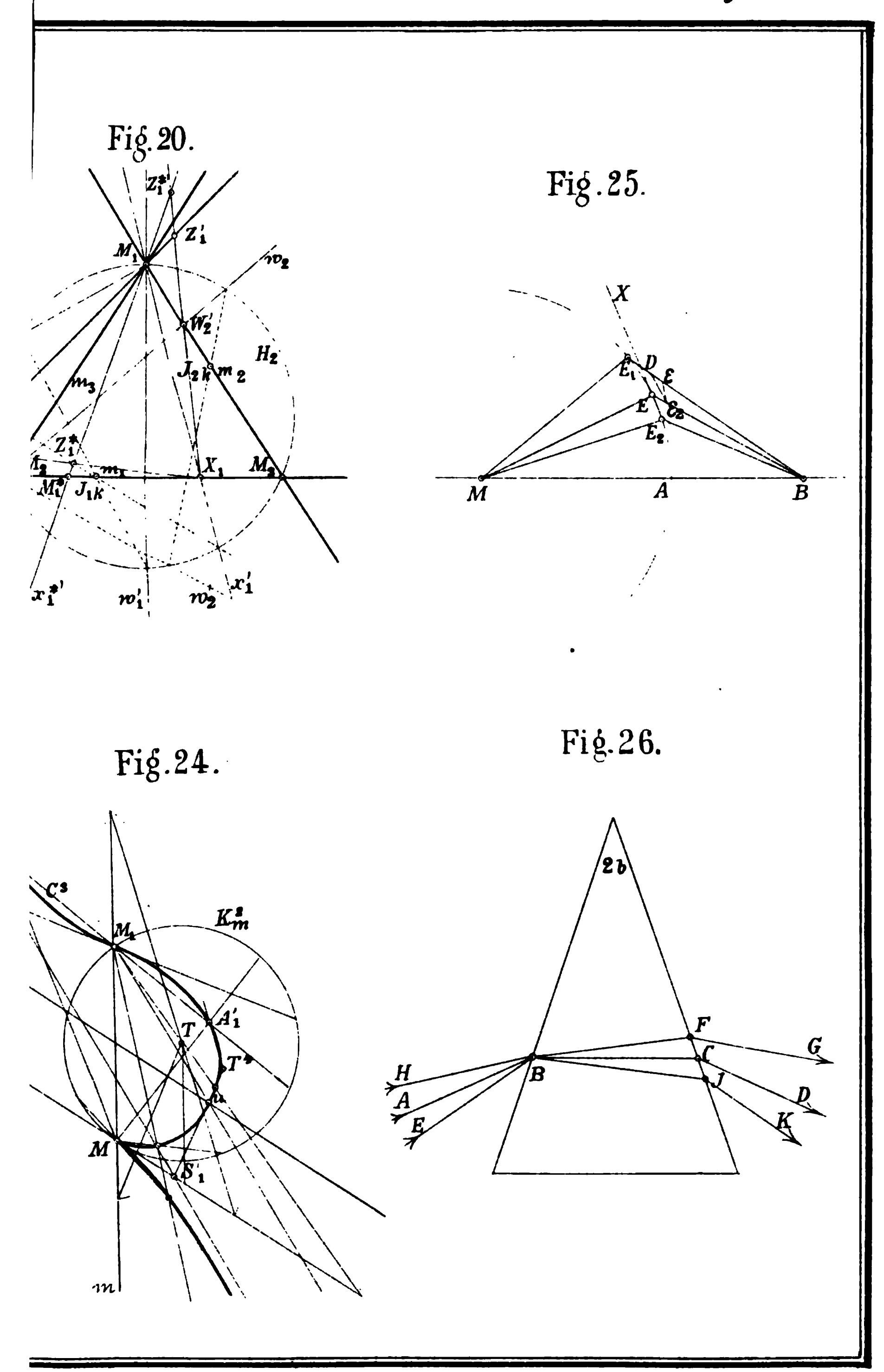
Häbler, Th., Zur Bestimmung der Intensität des Erdmagnetismus. (Dissert.) Jena, Deistung. 60 Pf.

Mascart, E., Handbuch der statischen Elektricität; deutsch von G. Wallentin. 1. Bd. 2. Abth. Wien, Pichler. 9 Mk.




Fig. 12.
Fig. 16.

*Tafel IV.*





# Historisch-literarische Abtheilung.

## Die von Diophant überlieferten Methoden der Berechnung irrationaler Quadratwurzeln.

Von

W. SCHOENBORN

in Krotoschin.

Hierzu Taf. V Fig. 3.

Die Verfasser der in den letzten Jahren über quadratische Irrationalitäten der Alten und deren Entwickelungsmethoden erschienenen Abhandlungen sind sämmtlich der Ansicht, dass in den uns erhaltenen Werken zwar einzelne Näherungswerthe irrationaler Quadratwurzeln erwähnt werden, dass aber in keinem derselben, wenn von dem auf den sechzigtheiligen Calcul gegründeten Verfahren abgesehen wird, Methoden zu ihrer Berechnung mitgetheilt sind. Auch der unterzeichnete Verfasser war derselben Ansicht, wie sich aus seiner in Bd. XXVIII dieser Zeitschrift enthaltenen Mittheilung über diesen Gegenstand ergiebt. Erst nach dem Erscheinen derselben begann er einzelne Schriften der griechischen Mathematiker genauer zu durchlesen und stiess dabei auf Stellen, aus denen sich bestimmte Methoden der Berechnung der Quadratwurzeln ergeben, so dass die vorher erwähnte Ansicht doch nicht als recht begründet erscheint. Die Stellen finden sich in der Schrift des Diophantos *ἀριϑμητικά*. —

Diophant behandelt in derselben V, 12 eine Aufgabe, bei der es darauf ankommt, 13 in zwei Quadrate zu theilen, deren jedes grösser als 6 ist. Er nimmt die Hälfte von 13, also $6\frac{1}{2}$, und sucht einen Bruch, der zu $6\frac{1}{2}$ addirt die Summe zu einem Quadrate macht, multiplicirt $6\frac{1}{2}$ mit 4 und sucht einen quadratischen Bruch, der zu 26 addirt ein Quadrat giebt; ist $26+\frac{1}{x^2}$ ein Quadrat, so ist es auch $26x^2+1$, die Grösse wird gleich gesetzt $(5x+1)^2$; er erhält $x=10$. Mithin ist $26+\frac{1}{100}=\frac{2601}{100}$ das gesuchte Quadrat, somit ist auch $6\frac{1}{2}+\frac{1}{400}$ ein Quadrat, dessen Seite $\frac{51}{20}$ ist. Dass hierdurch $\frac{51}{10}$, $\frac{51}{20}$ als Näherungswerthe von $\sqrt{26}$, $\sqrt{6\frac{1}{2}}$ gefunden sind, ist wohl nicht zu bestreiten. Allerdings sagt Diophant nicht, dass $\sqrt{6\frac{1}{2}} \sim \frac{51}{20}$ sei, aber die von ihm behandelte Aufgabe verlangt das auch nicht.

Es dürfte zu beachten sein, dass Diophant bei $6\frac{1}{2}$ den Bruch durch Multiplication mit 4 beseitigt, dass er $\sqrt{26}$ berechnet und das Resultat durch 2 dividirt, um $\sqrt{6\frac{1}{2}}$ zu erhalten.

Wendet man das angegebene Verfahren an, um $\sqrt{A^2 \pm B}$ zu bestimmen, setzt also $(A^2 \pm B)x^2 + 1 = (Ax \pm 1)^2$, so ergiebt sich $x = \frac{2A}{B}$, mithin erhält man $\sqrt{A^2 \pm B} \backsim A \pm \frac{B}{2A}$, d. h. eine Formel, nach der sich ein Theil der überlieferten Wurzelwerthe sehr gut herleiten lässt. — Dass die Methode nur anwendbar ist, wenn $x > 1$ wird, ist wohl kaum nöthig zu erwähnen. Die nach ihr berechneten Wurzelwerthe sind stets grösser als der wahre Werth; die nun folgende Methode giebt zwei oder mehr Werthe, zwischen denen der wirkliche Werth liegt.

Diophant behandelt V, 14 die Aufgabe: die Eins so in drei Theile zu theilen, dass, wenn man zu jedem 3 addirt, die drei Summen Quadrate werden. Er bemerkt, man habe somit 10 in drei Quadrate zu theilen, deren jedes $> 3$ sei; die Aufgabe sei also zu lösen nach τῇ τῆς παρισότητος ἀγωγῇ. Was unter dieser Führung, Anweisung zu verstehen sei, zeigt die weitere Rechnung.

Da der dritte Theil von $10 = 3\frac{1}{3}$ ist, so ist $x$ so zu bestimmen, dass $3\frac{1}{3} + \frac{1}{x^2}$, oder indem man $3\frac{1}{3}$ mit 9 multiplicirt, dass $30 + \frac{1}{x^2}$ ein Quadrat sei. Aus $30x^2 + 1 = (5x+1)^2$ wird $x = 2$, also $30 + \frac{1}{4} = (\frac{11}{2})^2$ und $3\frac{1}{3} + \frac{1}{36} = (\frac{11}{6})^2$ gefunden. Jetzt zerlegt Diophant 10 in die Summe dreier Quadrate; da er weiss, dass $(\frac{4}{5})^2 + (\frac{3}{5})^2 = 1$ ist, so ergiebt sich $10 = 3^2 + (\frac{4}{5})^2 + (\frac{3}{5})^2$; es bleibt übrig, die Seite jedes dieser Quadrate nahe gleich zu machen (πάρισον παρασκευάσαι) mit $\frac{11}{6}$. Um einen Theil der Brüche fortzuschaffen, werden 3, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{11}{6}$ mit 30 multiplicirt, man erhält 90, 24, 18, 55; jede Seite ist nun nahe gleich zu machen mit 55; die Seiten sind $3 - 35x$, $\frac{4}{5} + 31x$, $\frac{3}{5} + 37x$, $(35 = 90 - 55,\ 31 = 55 - 24,\ 37 = 55 - 18)$, addirt man die Quadrate der Seiten, so ist die Summe $= 10$ zu setzen; aus $(3 - 35x)^2 + (\frac{4}{5} + 31x)^2 + (\frac{3}{5} + 37x)^2 = 10$ ergiebt sich $x = \frac{116}{3555}$. Dieser Werth ist in jede Seite einzusetzen. Hier bricht Diophant ab. Führt man seine Vorschrift aus, so erhält man $\frac{1321}{711}$, $\frac{1288}{711}$, $\frac{1285}{711}$ als die Zahlen, die nahe gleich $\frac{11}{6}$ sind. Da die Summe der Quadrate derselben $= 10$ ist, die Zahlen selbst einander nahe gleich sind, so ist jede ein Näherungswerth von $\sqrt{3\frac{1}{3}}$, $\frac{1321}{711}$ zu gross, die beiden anderen zu klein; das haben die Alten wohl auch erkannt und das Mittel, einen der Wurzel noch näher kommenden Werth zu finden, lag zu nahe, als dass sie es nicht sollten benutzt haben. Diophant freilich, der alle drei Werthe brau ht, hat keine Veranlassung zu erwähnen, dass sich ein solcher Werth ergeben würde, wenn man die Summe der drei Zahlen durch 3 dividirt. (Es ist $\frac{1298}{711} = 1{,}82559\ldots$, der genauere Werth von $\sqrt{3\frac{1}{3}}$ ist $= 1{,}8257\ldots$.)

Dieselbe Methode hat Diophant, ohne sie benennen, auch V, 12 angewendet. Nachdem er $\frac{51}{20}$ als Näherungswerth von $\sqrt{6\frac{1}{2}}$ gefunden, muss er, um die gestellte Aufgabe zu lösen, noch 13 in zwei Quadrate theilen, deren Seiten so nahe als möglich (ὡς ἔγγιστα) mit $\frac{51}{20}$ übereinstimmen. Da $13 = 3^2 + 2^2$ ist, so bildet er die Seiten $11x + 2$, $3 - 9x$; (es ist 3, 2, $\frac{51}{20}$ mit 20 multiplicirt, aus 60, 40, 51 erhält man $11 = 51 - 40$, $9 = 60 - 51$); aus $(11x + 2)^2 + (3 - 9x)^2 = 13$ findet er $x = \frac{5}{101}$, mithin wird $11x + 2 = \frac{257}{101}$, $3 - 9x = \frac{258}{101}$; es sind also $\frac{257}{101}$ und $\frac{258}{101}$ die Zahlen, welche $\frac{51}{20}$ ganz nahe kommen; auch ist die Differenz ihrer Quadrate $< 1$, wie es Diophant im Anfange seiner Auseinandersetzung verlangt hat. Dass jede von ihnen ein Näherungswerth von $\sqrt{6\frac{1}{2}}$ ist, dass ihr arithmetisches Mittel einen noch genaueren Näherungswerth giebt, erwähnt Diophant allerdings nicht; er braucht eben beide Werthe und hat von den Quadraten derselben 6 abzuziehen, um die der Aufgabe entsprechenden Zahlen zu erhalten. (Das arithmetische Mittel $\frac{515\frac{1}{2}}{202}$ ist $= 2{,}549504\ldots$, $\sqrt{6\frac{1}{2}} = 2{,}549509\ldots$.)

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich eine zweite Methode für Berechnung von $\sqrt{a}$. Zunächst hat man nach der ersten einen Näherungswerth zu suchen; derselbe sei $= \frac{m}{n}$. Kann man $2a$ in die Summe zweier Quadrate $= b^2 + c^2$ zerlegen, so ist aus der Gleichung $[b + (m - b.n).x]^2 + [c + (m - c.n).x]^2 = 2a$ der Werth von $x$ zu bestimmen; setzt man denselben in $b + (m - b.n).x$, $c + (m - c.n).x$ ein, nimmt von der Summe der beiden so erhaltenen Zahlen die Hälfte, so erhält man einen neuen, genaueren Näherungswerth von $\sqrt{a}$. — Ist $3a = b^2 + c^2 + d^2$, so ist $[b + (m - b.n).x]^2 + [c + (m - c.n).x]^2 + [d + (m - d.n).x]^2 = 3a$ die Gleichung, aus welcher der Werth von $x$ bestimmt wird; der dritte Theil der Summe der drei gefundenen Zahlen ist der Näherungswerth der Wurzel. — Die Methode lässt sich auch anwenden, wenn $4a$, wie das in V, 17 der Fall ist, gleich der Summe von vier Quadraten ist. Angenommen ist hierbei, dass $a$, $b$, $c$, $d$ ganze Zahlen sind; was zu thun ist, wenn Brüche vorkommen, zeigt das Beispiel in V, 14.

Das angegebene Verfahren verlangt eine Vorschrift, aus der zu ersehen, wenn man $2a$ in eine Summe zweier, wenn $3a$ in eine Summe dreier Quadrate zerlegen könne, wenn nicht. Auch diese Vorschrift lässt sich wenigstens zum Theil aus Diophant herstellen. Herr Cantor bemerkt in der Geschichte der Mathematik, Bd. I S. 441, dass aus der zu V, 12 gestellten Bedingung der Satz folge: Keine Zahl von der Form $4.n + 3$ lässt sich als Summe zweier Quadrate darstellen. — In V, 14 soll $3m + 1$ in die Summe dreier Quadrate zerlegt werden. Diophant bemerkt, es dürfe $m$ weder 2 sein (d. h. also: 7 lässt sich nicht in drei Quadrate zerlegen), μήτε τινὰ τῶν ἀπὸ δυάδος ὀκτάκις παραυξαμένων. Hat Bachet mit der Behauptung Recht, Diophant meine damit, es dürfe $m$ nicht $= 2 + 8n$ sein, so ergiebt sich, dass sich in der Vorschrift wohl der Satz fand: Ist eine Zahl von der Form $4.n + 3$, so kann sie nicht als Summe zweier Quadrate dargestellt

werden, ebenso wenig als Summe dreier Quadrate, wenn sie die Form $8n+7$ hat.

Es entsteht nun die Frage: Sind die von Diophant angewendeten Methoden von ihm gefunden, oder sind es althergebrachte, die er seinen Vorgängern entlehnt hat? Der Gebrauch der Worte πάρισος, παρισότης, die zuerst bei Diophant vorzukommen scheinen, beweist nicht, dass er sie zuerst angewendet habe, sie können sehr wohl in den uns verlorenen Schriften der griechischen Mathematiker gebraucht sein; aber er scheint doch der Einzige zu sein, der die Aufgabe der παρισότης: eine Zahl $a$ in eine Summe von zwei, drei, vier Quadraten zu zerlegen, deren Differenzen Grössen werden, die kleiner als eins, und deren Seiten einer andern Zahl, nämlich einem Näherungswerthe von $\sqrt{a}$, nahe gleich sind, behandelt hat. — Dagegen macht das Verfahren, das Diophant anwendet, um die Aufgabe zu lösen, durchaus nicht den Eindruck, als sei er der Urheber und Erfinder desselben. Es tritt das Bestreben hervor, die Rechnung mit Brüchen, wo es nur angeht, zu vermeiden. Statt direct $\sqrt{6\frac{1}{2}}$, $\sqrt{3\frac{1}{3}}$ zu berechnen, wird $\sqrt{26}$, $\sqrt{30}$ gesucht und werden die Resultate durch 2, 3 dividirt; statt die Gleichung $(3-\frac{7}{6}x)^2+(\frac{4}{5}+\frac{31}{30}x)^2+(\frac{3}{5}+\frac{37}{30}x)^2=10$ zu bilden, aus der sich $x=\frac{696}{711}$ ergiebt, während $3-\frac{7}{6}x$, $\frac{4}{5}+\frac{31}{30}x$, $\frac{3}{5}+\frac{37}{30}x$ wieder zu $\frac{1321}{711}$, $\frac{1288}{711}$, $\frac{1285}{711}$ werden, sind die Brüche $\frac{7}{6}$, $\frac{31}{30}$, $\frac{37}{30}$ auf die oben angegebene Weise in ganze Zahlen umgewandelt worden; und diese Scheu vor Brüchen soll Diophant gehabt haben, der doch sonst vor keinem Bruche zurückschreckt. Das ist unwahrscheinlich. Die Schwierigkeit ist gehoben, wenn man annimmt, Diophant habe erkannt, dass die alten Methoden der Berechnung irrationaler Quadratwurzeln benutzt werden könnten zur Lösung der von ihm gestellten Aufgabe der παρισότης, dass er demnach die Methoden im Ganzen beibehielt und nur den Schluss der zweiten als für seinen Zweck unbrauchbar wegliess. Insofern mag er das Verfahren erweitert haben, als er nicht mehr die Bedingung, die für die alte Zeit selbstverständlich ist, festhielt, es müssten $b$, $c$, $d$ ganze Zahlen sein, wenn $3a=b^2+c^2+d^2$ gesetzt wurde.

Zunächst soll gezeigt werden, dass sich die Wurzelwerthe der Alten, besonders des Archimedes und Heron, nach diesen Methoden finden lassen. — Aus $3x^2+1=(2x-1)^2$ folgt $x=4$, mithin $\sqrt{3}\sim\frac{7}{4}$; aus $3.x^2+1=(\frac{7}{4}x-1)^2$ erhält man $x=56$, also $\sqrt{3}\sim\frac{97}{56}$. [Wie sich hierbei der Bruch $\frac{7}{4}$ in $\frac{7}{4}x-1$ vermeiden lässt, lehrt ja Diophant. Man nimmt $48x^2+1=(7x-1)^2$, erhält $x=14$, demnach ist $\sqrt{48}\sim 7-\frac{1}{14}=\frac{97}{14}$, folglich $\frac{\sqrt{48}}{4}=\sqrt{3}\sim\frac{97}{56}$.] Aus $2x^2+1=(\frac{3}{2}x-1)^2$ folgt $x=12$, mithin $\sqrt{2}\sim\frac{17}{12}$.

Geht man aus von $\frac{5}{3}<\sqrt{3}$ und setzt $3x^2+1=(\frac{5}{3}x+1)^2$, so ergiebt sich $x=15$, also $\sqrt{3}\sim\frac{26}{15}$, aus $3x^2+1=(\frac{26}{15}x-1)^2$ folgt $x=780$ und $\sqrt{3}\sim\frac{1351}{780}$. Beachtet man, dass $9=2^2+2^2+1$ ist, bildet aus 2, 2, 1 und $\frac{26}{15}$ die Gleichung $(2-4x)^2+(2-4x)^2+(1+11x)^2=9$, so erhält man $x=\frac{10}{153}$, es wird $2-4x=\frac{266}{153}$, $1+11x=\frac{263}{153}$, nimmt man von $\frac{266}{153}$,

$\frac{266}{153}$, $\frac{263}{153}$ das arithmetische Mittel, so erhält man $\sqrt{3} \sim \frac{265}{153}$. Beide von Archimedes für $\sqrt{3}$ angegebene Grenzwerthe sind somit gefunden, beide hergeleitet aus $\sqrt{3} \sim \frac{26}{15}$. Dass $\frac{1351}{780} > \sqrt{3}$ ist, folgt aus der Art der Herleitung. Die Grössen $\frac{266}{153}$, $\frac{263}{153}$ genügen auch der Gleichung $\frac{2.(263+3)^2+263^2}{153^2} = 9$, mithin ist $\frac{263^2+4.263+6}{153^2} = 3$; da nun $\frac{(263+2)^2}{153^2} = \frac{263^2+4.263+4}{153^2}$ ist, so ergiebt sich alsbald $\frac{265}{153} < \sqrt{3}$. — Die anderen von Archimedes angegebenen Wurzeln werden übergangen, sie sind im Ganzen doch zu ungenau, als dass sich an ihnen der Gebrauch einer bestimmten Methode nachweisen liesse.

Was die Wurzeln des Heron betrifft, so ist die Herleitung von $\sqrt{63} \sim 8 - \frac{1}{16}$, $\sqrt{1125} \sim 33\frac{6}{11}$, $\sqrt{1081} \sim 32\frac{57}{64}$, $\sqrt{50} \sim 7\frac{1}{14}$, $\sqrt{75} \sim 8\frac{11}{16}$, $\sqrt{108} \sim 10\frac{2}{5}$ nach der ersten Methode einfach. Aber auch die folgenden Wurzeln ergeben sich nach derselben. — $\sqrt{58+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{935}$. Aus $935x^2+1 = (31x-1)^2$ folgt $x = \frac{31}{13}$, mithin $\sqrt{935} \sim 31 - \frac{13}{31} = 30\frac{18}{31}$; $\frac{1}{4}\sqrt{935} \sim 7\frac{20}{31} \sim 7\frac{2}{3}$. — $\sqrt{3400} = 10.\sqrt{34}$. Aus $34x^2+1 = (6x-1)^2$ folgt $x = 6$, mithin $\sqrt{34} \sim 5\frac{5}{6}$ und $\sqrt{3400} \sim 58\frac{1}{3}$. — $\sqrt{43+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{175}$. Aus $175x^2+1 = (13x+1)^2$ folgt $x = \frac{13}{3}$, mithin $\sqrt{175} \sim 13\frac{3}{13}$ und $\frac{1}{2}\sqrt{175} \sim 6\frac{1}{2}+\frac{3}{26}$. — $\sqrt{43+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}} = \frac{1}{6}\sqrt{1579}$. Aus $1579x^2+1 = (40x-1)^2$ erhält man $x = \frac{80}{21}$, folglich $\sqrt{1579} \sim 39\frac{59}{80}$ und $\frac{1}{6}\sqrt{1579} \sim 6\frac{1}{2}+\frac{59}{480} \sim 6\frac{1}{2}+\frac{53}{477} = 6\frac{1}{2}+\frac{1}{9}$. — $\sqrt{886-\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{14175}$. Aus $14175x^2+1 = (119x+1)^2$ erhält man $x = 17$, also $\sqrt{14175} \sim 119\frac{1}{17}$ und $\sqrt{886-\frac{1}{16}} \sim 29\frac{3}{4}+\frac{1}{68}$. — $\sqrt{356+\frac{1}{18}} = \frac{1}{6}\sqrt{12818}$. Aus $12818x^2+1 = (114x-1)^2$ folgt $x = \frac{114}{89}$, mithin ist $\sqrt{12818} \sim 113\frac{25}{114}$, $\sqrt{356+\frac{1}{18}} \sim 18\frac{595}{684} \sim 18\frac{589}{684} = 18\frac{31}{36}$. — Aus $\sqrt{50} \sim 7\frac{1}{14}$ erhält man $\sqrt{5000} \sim 70\frac{5}{7} \sim 70\frac{6}{8} = 70\frac{3}{4}$.

Bei den übrigen Wurzeln kann Heron die zweite Methode angewendet haben.

$\sqrt{444+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}} = \frac{20}{3}.\sqrt{10}$. Aus $10x^2+1 = (3x+1)^2$ folgt $x = 6$, $\sqrt{10} \sim \frac{19}{6}$. Es ist $20 = 4^2+2^2$; mithin erhält man die Gleichung $(4-5x)^2+(2+7x)^2 = 20$; es wird $x = \frac{6}{37}$, $4-5x = 3\frac{7}{37}$, $2+7x = 3\frac{5}{37}$, also $\sqrt{10} \sim 3\frac{6}{37}$ und $\sqrt{444+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}} \sim 21\frac{3}{37} \sim 21\frac{1}{12}$.

$\sqrt{54} = 3.\sqrt{6}$. Aus $6x^2+1 = (2x+1)^2$ folgt $x = 2$, $\sqrt{6} \sim \frac{5}{2}$. Da $18 = 4^2+1+1$ ist, so erhält man die Gleichung $(4-3x)^2+2.(1+3x)^2 = 18$, mithin $x = \frac{4}{9}$; es wird $4-3x = \frac{8}{3}$, $1+3x = \frac{7}{3}$, also $\sqrt{6} \sim \frac{22}{9}$, $\sqrt{54} \sim 7\frac{1}{3}$.

$\sqrt{135} = 3.\sqrt{15}$. Aus $15x^2+1 = (4x-1)^2$ folgt $x = 8$, $\sqrt{15} \sim 3\frac{7}{8}$. Da $45 = 5^2+4^2+2^2$ ist, so erhält man die Gleichung $(5-9x)^2+(4-x)^2+(2+15x)^2 = 45$, mithin $x = \frac{38}{307}$, es wird $5-9x = \frac{1193}{307}$, $4-x = \frac{1190}{307}$, $2+15x = \frac{1184}{307}$, also ist $\sqrt{15} \sim \frac{1189}{307}$, $\sqrt{135} \sim \frac{3567}{307} = 11\frac{190}{307} \sim 11\frac{195}{315} = 11\frac{13}{21}$. Demnach ist $\sqrt{8+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{135} \sim 11\frac{13}{21} : 4 = 2\frac{3}{4}+\frac{13}{84} \sim 2\frac{3}{4}+\frac{14}{84} = 2\frac{3}{4}+\frac{1}{6}$.

$\sqrt{6300} = 10.\sqrt{63}$. — Es ist $\sqrt{63} \sim 8 - \frac{1}{16} = \frac{127}{16}$. Da $189 = 11^2 + 8^2 + 2^2$ ist, so erhält man die Gleichung $(11 - 49x)^2 + (8 - x)^2 + (2 + 95x)^2 = 189$, also $x = \frac{114}{11427}$, $11 - 49x = \frac{90711}{11427}$, $8 - x = \frac{90702}{11427}$, $2 + 95x = \frac{90684}{11427}$, folglich $\sqrt{63} \sim \frac{90699}{11427}$, $\sqrt{6300} \sim \frac{906990}{11427} = 79\frac{4257}{11427} \sim 79\frac{4256}{11424} = 79\frac{19}{51} = 79\frac{1}{3} + \frac{2}{51}$. — Mithin wird $\sqrt{1575} = \frac{1}{2}\sqrt{6300} \sim 39\frac{2}{3} + \frac{1}{51}$. — $\sqrt{2460 + \frac{15}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{39375} = \frac{5}{4}\sqrt{1575} \sim 49\frac{1}{2} + \frac{11}{102}$. — $\sqrt{615 + \frac{15}{64}} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2460 + \frac{15}{16}} \sim 24\frac{3}{4} + \frac{11}{204}$.

$\sqrt{216} = 3.\sqrt{24}$. Aus $24x^2 + 1 = (5x - 1)^2$ folgt $x = 10$, $\sqrt{24} \sim \frac{49}{10}$. Es ist $72 = 8^2 + 2^2 + 2^2$, man erhält also die Gleichung $(8 - 31x)^2 + 2.(2 + 29x)^2 = 72$, mithin wird $x = \frac{264}{2643}$, $8 - 31x = \frac{12960}{2643}$, $2 + 29x = \frac{12942}{2643}$, also $\sqrt{24} \sim \frac{12948}{2643}$ und $\sqrt{216} \sim \frac{38844}{2643} = 14\frac{1842}{2643} \sim 14\frac{184}{264} = 14\frac{23}{33}$.

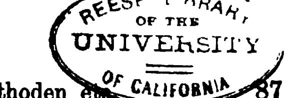
$\sqrt{356} = 2.\sqrt{89}$. Aus $89x^2 + 1 = (9x + 1)^2$ folgt $x = \frac{9}{4}$, $\sqrt{89} \sim \frac{85}{9}$. Es ist $178 = 13^2 + 3^2$, mithin erhält man die Gleichung $(13 - 32.x)^2 + (3 + 58.x)^2 = 178$; aus ihr folgt $x = \frac{121}{1097}$, $13 - 32.x = \frac{10389}{1097}$, $3 + 58.x = \frac{10309}{1097}$, mithin $\sqrt{89} \sim \frac{10349}{1097}$, $\sqrt{356} \sim \frac{20698}{1097} = 18\frac{952}{1097} \sim 18\frac{952}{1088} = 18\frac{7}{8}$.

$\sqrt{720} = 6.\sqrt{20}$. Aus $20.x^2 + 1 = (4x + 1)^2$ folgt $x = 2$, $\sqrt{20} \sim \frac{9}{2}$. Da $40 = 6^2 + 2^2$ ist, so erhält man die Gleichung $(6 - 3x)^2 + (2 + 5x)^2 = 40$; hieraus ergiebt sich $x = \frac{8}{17}$, $6 - 3x = 4\frac{10}{17}$, $2 + 5x = 4\frac{6}{17}$, $\sqrt{20} \sim 4\frac{8}{17}$, mithin $\sqrt{720} \sim 26\frac{14}{17} \sim 26\frac{15}{18} = 26\frac{5}{6}$.

$\sqrt{208} = 4.\sqrt{13}$. Aus $13x^2 + 1 = (4x - 1)^2$ folgt $x = \frac{8}{3}$, $\sqrt{13} \sim 3\frac{5}{8}$. Es ist $26 = 5^2 + 1$, somit ergiebt sich die Gleichung $(5 - 11.x)^2 + (1 + 21.x)^2 = 26$. Aus ihr erhält man $x = \frac{68}{562}$, $5 - 11.x = \frac{2062}{562}$, $1 + 21.x = \frac{1990}{562}$, folglich $\sqrt{13} \sim \frac{2026}{562}$, $\sqrt{208} \sim \frac{8104}{562} = 14\frac{236}{562} \sim 14\frac{235}{564} = 14\frac{5}{12}$.

Die Wurzelwerthe des Heron wären somit gefunden; dass sie Heron gerade in der vom Verfasser angegebenen Weise berechnet habe, wird nicht behauptet. Unter Beibehaltung der Methode lassen sie sich auch auf andere Art finden. Um z. B. $\sqrt{216}$ zu erhalten, konnte man ausgehen von $216x^2 + 1 = (14x + 1)^2$ und erhielt $x = \frac{7}{5}$, $\sqrt{216} = \frac{103}{7}$; da $648 = 16^2 + 14^2 + 14^2$ ist, so ergab sich die Gleichung $(16 - 9.x)^2 + 2.(14 + 5.x)^2 = 648$, folglich $x = \frac{8}{131}$, $16 - 9.x = \frac{2024}{131}$, $14 + 5.x = \frac{1874}{131}$ und $\sqrt{216} \sim \frac{1924}{131} = 14\frac{90}{131} \sim 14\frac{92}{132} = 14\frac{23}{33}$. — Wird bei $\sqrt{135} = 3.\sqrt{15}$ von $\sqrt{15} \sim \frac{31}{8}$ und $60 = 7^2 + 3^2 + 1 + 1$ ausgegangen, so entsteht die Gleichung $(7 - 25.x)^2 + (3 + 7.x)^2 + 2(1 + 23.x)^2 = 60$, mithin wird $x = \frac{54}{433}$, $7 - 25.x = \frac{1081}{433}$, $3 + 7.x = \frac{1677}{433}$, $1 + 23.x = \frac{1675}{433}$, $\sqrt{15} \sim \frac{1677}{433}$, $\sqrt{135} \sim \frac{5031}{433} = 11\frac{268}{433} \sim 11\frac{273}{441} = 11\frac{13}{21}$. — Wird bei $\sqrt{208} = 4.\sqrt{13}$ ausgegangen von $13x^2 + 1 = (3x + 1)^2$, so erhält man $x = \frac{3}{2}$, also $\sqrt{13} \sim \frac{11}{3}$; da $52 = 7^2 + 1 + 1 + 1$ ist, so ergiebt sich die Gleichung $(7 - 10.x)^2 + 3(1 + 8.x)^2 = 52$; mithin wird $x = \frac{23}{73}$, $7 - 10.x = \frac{281}{73}$, $1 + 8.x = \frac{257}{73}$, $\sqrt{13} \sim \frac{263}{73}$, $\sqrt{208} \sim \frac{1052}{73} = 14\frac{30}{73} \sim 14\frac{30}{72} = 14\frac{5}{12}$.

Dass sich die uns überlieferten Quadratwurzeln der Alten durch die aus Diophant entnommenen Methoden berechnen lassen, ist somit wohl




erwiesen; die Methoden zeigen aber auch den Weg, auf welchem die von Herrn **Günther** in der Abhandlung: Die quadratischen Irrationalitäten der Alten, S. 51 erwähnte Cubikwurzel $\sqrt[3]{\frac{25}{18}} \sim \frac{10}{9}$ gefunden sein dürfte. Es ist $\sqrt[3]{\frac{25}{18}} = \frac{\sqrt[3]{300}}{6}$. Machte **Pheidon** — er soll ja die Wurzel berechnet haben — den Versuch, $\sqrt[3]{300}$ durch ein Verfahren zu finden, das der ersten Methode der Berechnung der Quadratwurzeln entspricht, so hatte er $300.x^3 + 1 = (6x+1)^3$ zu setzen, und erhielt zur Bestimmung von $x$ die Gleichung $14x^2 - 18x = 3$; somit wird $x = \frac{9+\sqrt{123}}{14}$, es liegt also zwischen $\frac{20}{14}$ und $\frac{21}{14}$; wurde der letztere Grenzwerth als der einfachere in der weiteren Rechnung benutzt, so ergab sich $300 \sim (6+\frac{2}{3})^3$, mithin $\sqrt[3]{300} \sim \frac{20}{3}$ und $\sqrt[3]{\frac{25}{18}} \sim \frac{10}{9}$.

Treten wir der Frage näher: wie sind die Alten zu diesen Methoden gekommen? so ist die Sache in Betreff der ersten Methode einfach. — Aus der Gleichung $ax^2 + 1 = (\alpha.x \pm 1)^2$, in der $a$ gegeben, $\alpha$ eigentlich beliebig ist, ergiebt sich die Gleichung $a + \frac{1}{x^2} = \left(\alpha \pm \frac{1}{x}\right)^2$; ist nun aus der ersten Gleichung ein Werth von $x$ gefunden, welcher $>1$ ist, so ist $\alpha \pm \frac{1}{x}$ ein um so genauerer Näherungswerth von $\sqrt{a}$, je grösser $x$ war. — Die zweite Methode weist auf Entstehung aus geometrischen Betrachtungen hin und bestätigt Herrn **Cantor**'s Ansicht (Geschichte der Mathematik Bd. I S. 412), dass die Alten bei dergleichen Untersuchungen rechtwinklige Dreiecke zu Hilfe genommen haben. Sollte $\sqrt{6\frac{1}{2}}$ gefunden werden, so ging man von einem bei $A$ rechtwinkligen Dreiecke $ABC$ aus, in welchem $AB = 3$, $AC = 2$ war; die Hypotenuse $BC$ ist also $= \sqrt{13}$. Construirte man über $BC$ das Quadrat $BCDF$, zog in demselben die sich in $G$ schneidenden Diagonalen $BD$, $CF$, so ist $BG = CG = \sqrt{6\frac{1}{2}}$. Auf $BD$ schneide man $BV = BA$, auf $CF$ aber $CO = CA$ ab (Fig. 3). War nach der ersten Methode $\sqrt{6\frac{1}{2}} \sim \frac{51}{20}$ gefunden, so lässt sich allerdings der 60. Theil von $AB$ nicht genau 51 mal auf $BG$ abtragen, denn $AB$ und $BG$ sind incommensurabel, aber es wird ein Mass $x$ geben, das annähernd 60 mal in $AB$ und 51 mal in $BG$ enthalten ist, so dass annähernd $GV = 9.x$, $GO = 11.x$ wird; dann ist $BG = 3 - 9.x$, $CG = 2 + 11.x$. Die Summe der Quadrate dieser Grössen muss $= 13$ sein, mithin ist durch die Gleichung $(3-9.x)^2 + (2+11.x)^2 = 13$ die Möglichkeit gegeben, das Mass $x$, also auch $BG$ und $CG$ zu bestimmen, und da $BG = CG$ sein soll, so erhält man, wenn man die Summe beider Grössen durch 2 dividirt, einen gemeinsamen Werth für $BG$ und $CG$, also auch für $\sqrt{6\frac{1}{2}}$. — War die Methode für Zahlen $a$, bei denen $2a$ gleich der Summe zweier Quadrate ist, erprobt, so war der Fortschritt zu Fällen, in denen 3a (4a) gleich der Summe von 3 (4) Quadraten ist, nicht mehr schwer.

Sehen wir zu, worauf es bei der zweiten Methode eigentlich ankommt, so handelt es sich doch darum, eine Zahl, die gleich der Summe zweier (dreier) Quadrate ist, nochmals in eine solche Summe zu zerlegen, nur sollen die Seiten der neuen Quadrate einander nahe gleich sein. — Diophant behandelt II, 10 die Aufgabe, $13 = 3^2 + 2^2$ in zwei andere Quadrate zu zerlegen. Er schlägt folgenden Weg ein. Es sei $2p = a^2 + b^2$ $(a > b)$ die zu zerlegende Zahl; man bestimme durch $m.x - a$, $b + x$ zwei Zahlen, die der Gleichung $(mx - a)^2 + (b + x)^2 = 2p$ genügen; aus ihr erhält man $x = \frac{2(a.m - b)}{m^2 + 1}$, und sind $\frac{a(m^2 - 1) - 2.b.m}{m^2 + 1}$ und $\frac{b(m^2 - 1) + 2.a.m}{m^2 + 1}$ die gesuchten Zahlen. Im Allgemeinen ist $m$ beliebig; hat man es aber so gewählt, dass die Seiten der neuen Quadrate einander nahe gleich werden, so sind dieselben Näherungswerthe von $\sqrt{p}$; aus ihnen lässt sich dann, wie bei der zweiten Methode, ein genauerer Wurzelwerth finden. — Dasselbe Verfahren lässt sich einschlagen, wenn $3.p$ gleich der Summe dreier Quadrate ist. — Damit wäre eine dritte Methode nachgewiesen, die vielleicht von den Alten zur Berechnung der Quadratwurzeln benutzt worden ist. Sie hat vor der zweiten den Vorzug, dass man bei ihr nicht nöthig hat, auch nach der ersten Methode einen Näherungswerth der Wurzel zu suchen. — Wendet man diese Methode an zur Berechnung von $\sqrt{41}$, so ist $a = 9$, $b = 1$ zu setzen. Für $m = 3$ ergiebt sich $\sqrt{41} \backsim \frac{32}{5}$, die Wurzel liegt zwischen $\frac{31}{5}$ und $\frac{33}{5}$; würde jetzt $a = \frac{33}{5}$, $b = \frac{31}{5}$, $m = 64$ gesetzt, so ergäbe sich $\sqrt{41} \backsim \frac{131168}{20485}$, da die Wurzel zwischen $\frac{131167}{20485}$ und $\frac{131169}{20485}$ liegt; der gefundene Werth wäre sehr genau, es ist $\frac{131168}{20465} = 6{,}4031242372\ldots$, der genauere Werth der Wurzel ist $= 6{,}4031242374\ldots$. — Um $\sqrt{29}$ zu erhalten, ist $a = 7$, $b = 3$ zu setzen, für $m = 5$ erhält man $\sqrt{29} \backsim \frac{70}{13}$, die Wurzel liegt zwischen $\frac{71}{13}$ und $\frac{69}{13}$. — Bei $\sqrt{\frac{29}{2}}$ ist $a = 5$, $b = 2$ zu nehmen, für $m = 5$ erhält man $\sqrt{\frac{29}{2}} \backsim \frac{99}{26}$; die Wurzel liegt zwischen $\frac{49}{13}$ und $\frac{50}{13}$. — Hat Heron, um $\sqrt{356} = 2.\sqrt{89}$ zu finden, die dritte Methode benutzt und bildete er die Gleichurg $267 = 2.(11 - x)^2 + (5 + mx)^2$, so wurde $x = \frac{44 - 10.m}{m^2 + 2}$, für $m = 3$ also $x = \frac{14}{11}$, $11 - x = \frac{107}{11}$, $5 + mx = \frac{97}{11}$, demnach $\sqrt{89} \backsim \frac{311}{33} = 9\frac{14}{33}$ und $\sqrt{356} \backsim 18\frac{28}{33} \backsim 18\frac{7}{8}$. — Wird dieselbe Methode bei $\sqrt{135} = 3.\sqrt{15}$ in Anwendung gebracht, so erhält man $(5 - m.x)^2 + (4 - x)^2 + (2 + n.x)^2 = 45$, mithin wird $x = \frac{10m - 4n + 8}{m^2 + n^2 + 1}$; für $m = 5$, $n = 9$ also $x = \frac{22}{107}$, $5 - m.x = \frac{425}{107}$, $4 - x = \frac{406}{107}$, $2 + nx = \frac{412}{107}$, mithin $\sqrt{15} \backsim \frac{1243}{321}$ und $\sqrt{135} \backsim \frac{1243}{107} = 11\frac{66}{107} \backsim 11\frac{65}{105} = 11\frac{13}{21}$.

Diophant zeigt II, 8. 9, wie man ein Quadrat in eine Summe zweier Quadrate zerlegen könne; er stellt die Gleichung $a^2 = x^2 + (m.x - a)^2$ auf

und erhält $x = \frac{2.a.m}{m^2+1}$, $mx - a = \frac{a(m^2-1)}{m^2+1}$; die Zerlegung beruht also darauf, dass $\left(\frac{2.m}{m^2+1}\right)^2 + \left(\frac{m^2-1}{m^2+1}\right)^2 = 1$ ist. Bei Diophant ist $a = 4$, $m = 2$ und er erhält $\frac{12}{5}$ und $\frac{16}{5}$ als Seiten der Quadrate, deren Summe $= 16$ sei; aber es ergiebt sich daraus auch $\sqrt{8} \sim \frac{28}{10}$, $\sqrt{2} \sim \frac{7}{5}$. — Wird $a = 2$, $m = \frac{5}{2}$ genommen, so erhält man $(\frac{40}{29})^2 + (\frac{42}{29})^2 = 4$, also auch $\sqrt{2} \sim \frac{41}{29}$.

Herr Günther bemerkt in der obenerwähnten Abhandlung S. 66, 88—90, dass de Lagny, Tannery, Zeuthen die Ansicht vertheidigen, es hätten die Alten, um $\sqrt{3}$ zu finden, Lösungen der Gleichungen $y^2 = 3.x^2 - 2$, $y^2 = 3.x^2 + 1$ zu Hilfe genommen. Dieser Ansicht gegenüber macht der Verfasser darauf aufmerksam, dass die drei Methoden, die zur Berechnung von $\sqrt{p}$ führen, auch in vielen Fällen brauchbare Werthe liefern für die Lösung der Gleichungen $y^2 = p.x^2 \pm 1$ und $y^2 = p.x^2 - 2$.

Gleich die erste Methode giebt oft ein Paar zusammengehöriger Wurzeln der Gleichung $y^2 = p.x^2 + 1$. — Wird $p.x^2 + 1 = (\alpha.x \pm 1)^2$ gesetzt und $x$ wird eine ganze Zahl, $p - \alpha^2$ geht also ohne Rest auf in $2\alpha$, so ist eine Lösung gefunden. Aus dem Vorhergehenden ergeben sich die Beispiele: $51^2 = 26.10^2 + 1$, $11^2 = 30.2^2 + 1$, $7^2 = 3.4^2 + 1$, $26^2 = 3.15^2 + 1$, $97^2 = 3.56^2 + 1$, $1351^2 = 3.780^2 + 1$, $35^2 = 34.36^2 + 1$, $2024^2 = 14175.17^2 + 1$, $19^2 = 10.6^2 + 1$, $31^2 = 15.8^2 + 1$, $49^2 = 24.10^2 + 1$.

Ist $2p$ gleich der Summe zweier Quadrate, so erhält man durch die zweite wie dritte Methode zwei Werthe, etwa $\frac{\beta}{\alpha}$ und $\frac{\beta+m}{\alpha}$, zwischen denen $\sqrt{p}$ liegt; zugleich genügen dieselben der Gleichung $\frac{\beta^2 + (\beta+m)^2}{\alpha^2} = 2p$. Ist $m$ eine gerade Zahl, setzt man also $2m$ an die Stelle von $m$, so geht die Gleichung über in $\frac{\beta^2 + 2\beta m + 2m^2}{\alpha^2} = p$, d. h. man erhält $(\beta+m)^2 = p.\alpha^2 - m^2$, für $m = 1$ also $(\beta+1)^2 = p.\alpha^2 - 1$. Ist $m$ ungerade, so können $\frac{2\beta}{2\alpha}$, $\frac{2(\beta+m)}{2\alpha}$ als die Grenzen betrachtet werden, zwischen denen $\sqrt{p}$ liegt; man erhält also $(2\beta+m)^2 = p.(2\alpha)^2 - m^2$, und für $m = 1$ somit $(2\beta+1)^2 = p.(2\alpha)^2 - 1$. Als Beispiele ergeben sich. $515^2 = \frac{13}{2}.202^2 - 1$, $117^2 = 10.37^2 - 1$, $76^2 = 20.17^2 - 4$ oder $38^2 = 5.17^2 - 1$, $32^2 = 41.5^2 - 1$, $131168^2 = 41.20485^2 - 1$, $70^2 = 29.13^2 - 1$, $99^2 = \frac{29}{2}.26^2 - 1$, $41^2 = 2.29^2 - 1$.

Ist $\sqrt{p}$ dadurch gefunden, dass man $3p$ in die Summe dreier Quadrate zerlegte, deren Seiten $\frac{\beta+m}{\alpha}$, $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\beta-n}{\alpha}$ sein mögen, so muss die Gleichung $\frac{3\beta^2 + 2\beta(m-n) + m^2 + n^2}{\alpha^2} = 3p$ erfüllt sein. Ist nun $m - n = 3.h$,

$m^2+n^2=3.k$, so erhält man $(\beta+h)^2=p.\alpha^2+(h^2-k)$. — Sind $m-n$, $m^2+n^2$ keine Vielfachen von 3, so sind $\frac{3(\beta+m)}{3\alpha}$, $\frac{3\beta}{3\alpha}$, $\frac{3(\beta-n)}{3\alpha}$ als die Seiten der drei Quadrate zu betrachten, und ergiebt sich die Gleichung $[3\beta+(m-n)]^2=p.(3\alpha)^2-2(m^2+mn+n^2)$. — Sind zwei der Seiten einander gleich, es seien dieselben $\frac{\beta\pm 3m}{\alpha}$, $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\beta}{\alpha}$, so erhält man $(\beta\pm m)^2=p.\alpha^2-2m^2$; sind $\frac{\beta\pm m}{\alpha}$, $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\beta}{\alpha}$ die Seiten, so ergiebt sich $(3\beta\pm m)^2=p.(3\alpha)^2-2.m^2$. — Demnach ist $265^2=3.153^2-2$, $22^2=6.9^2-2$, $1189^2=15.307^2-2.7$, $6474^2=6.2643^2-2.3^2$ oder $2158^2=6.881^2-2$, $311^2=89.33^2-2.10^2$.

Ob den Alten bekannt gewesen, dass sich aus den Werthen $y=\beta$, $x=\alpha$ der Gleichung $y^2=px^2\pm b$ die Werthe $y=2\beta^2\mp b$, $x=2\alpha.\beta$ in der Gleichung $y^2=p.x^2+b^2$, desgleichen aus $y=\beta$, $x=\alpha$ der Gleichung $y^2=p.x^2\pm 2b$ die Werthe $y=\beta^2\mp b$, $x=\alpha.\beta$ der Gleichung $y^2=p.x^2+b^2$ ergeben, mag dahingestellt bleiben.

Krotoschin, im März 1885.

# Recensionen.

## Erwiderung.

Im 6. Hefte des 29. Bandes hat Herr P. Zech ein Referat über meine Schrift „Der Kreislauf im Kosmos“ gegeben. Gegen das Ende fühlt er sich veranlasst zu bemerken, die Abhandlung sei „eine Streitschrift der katholischen Theologie gegen die Naturwissenschaft“. Diesen Satz muss ich als eine offenbare Unwahrheit bezeichnen, und man wird mir wohl erlauben, dies kurz zu begründen.

Die betreffende Abhandlung ist weiter nichts, als eine Abwehr gegen die moderne Naturphilosophie; es wird S. 15 ausdrücklich hervorgehoben: „Man erinnere sich wohl, dass wir es nicht mit der eigentlichen Naturwissenschaft, sondern mit dem naturwissenschaftlich ausstaffirten Materialismus zu thun haben.“ Dem Herrn Referenten würde es auch wohl schwer fallen, eine Stelle zu bezeichnen, wo ich mich mit der Naturwissenschaft im Widerspruch befände.

Dann soll der Kampf von Seiten der katholischen Theologie geführt werden. Sonderbar, da die Schrift voll und ganz auf physikalischem Boden steht und von Theologie, geschweige denn katholischer, gar keine Rede ist. Allerdings wird auf S. 11 der philosophische Standpunkt des christlichen oder theistischen Teleologen kurz skizzirt; aber Teleologie ist doch nicht Theologie!

Blyenbeck (Holland), den 10. Februar 1885. J. Epping, *S. J.*

---

**Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade.** Von Felix Klein. Leipzig 1884. 260 S. 8°.

Dieses Werk, dem eventuell, wie Verfasser in Aussicht stellt, weitere Werke über die elliptischen Modulfunctionen und die allgemeine Theorie der eindeutigen Functionen mit linearen Transformationen in sich folgen sollen, kann nur mit Freude begrüsst werden. Führt es doch den Leser in einen Kreis hochinteressanter Disciplinen ein, die sich besonders im Laufe des letzten Jahrzehnts mächtig entwickelt haben, ohne dem grösseren Theile des mathematischen Publikums vorläufig mehr als dem Namen nach bekannt geworden zu sein. Eine Fülle von Material, welches in einzelnen Journal-

artikeln zerstreut war, ist einheitlich zusammengefasst und gleichmässig durchgearbeitet; die zahlreichen Citate, auf welche Verf. grosse Sorgfalt verwendet hat, geben dabei genauen Aufschluss über den Ursprung und die Entwickelung jeder einzelnen Untersuchung, wodurch zugleich die in dem Buche enthaltenen Fortschritte als solche zu Tage treten. Die Art der Darstellung, welcher das Princip zu Grunde liegt, zunächst am gegebenen speciellen Problem zu operiren und von da nach und nach zu allgemeineren Gesichtspunkten aufzusteigen, macht die Lecture verhältnissmässig so leicht und mühelos, dass es sehr zu bedauern wäre, wenn dieser oder jener Leser sich durch einige Schwierigkeiten, die gerade auf den ersten Blättern gefunden werden können, nach Herstellung geeigneter Modelle aber von selbst verschwinden, von der Lecture des Buches abschrecken liesse. Freilich darf der Anfänger andererseits die Bemerkung der Vorrede, dass specielle Kenntnisse nicht vorausgesetzt werden, nicht allzu sanguinisch aufnehmen; denn wenn auch der Verf. jedesmal die Elemente der verschiedenen von ihm in die Darstellung eingeflochtenen Disciplinen kurz auseinandersetzt resp. auf geeignete Lehrbücher verweist, so ist doch die Operation mit den Begriffen eines Gedankenkreises, in welchem man sich eben erst orientirt hat und daher noch nicht zwanglos bewegen kann, unter allen Umständen schwierig, zumal wenn — wie es hier der Fall ist — kurz nacheinander ganz verschiedenartige Gedankenkreise auftauchen und in Beziehung zu einander gesetzt werden. Immerhin sind wir der Meinung, dass besonders das Studium des ersten Abschnittes, in welchem die Theorie des Ikosaeders im engeren Sinne entwickelt wird, auch Demjenigen, welcher sich in die Gebiete der Functionentheorie, Algebra und Invariantentheorie erst einarbeiten muss, zur Freude gereichen wird, da er als Belohnung seiner Mühe eine Erweiterung des Gesichtskreises gewinnt, wie sie ihm nicht viele mathematische Werke der Neuzeit bereiten dürften. Der zweite Abschnitt, welcher der Theorie der Gleichungen fünften Grades gewidmet ist, bewegt sich zwar auf einem weniger abwechselungsreichen Gebiete, ist aber darum in seiner Art nicht minder interessant und wichtig; ist doch die Auflösung der Gleichung fünften Grades ein historisches Problem, welches die Mathematiker seit Jahrhunderten wieder und wieder beschäftigt hat und mit Abel's Beweis der Unmöglichkeit einer Lösung durch Wurzelgrössen nicht etwa erledigt, sondern vielmehr erst für die richtige Fragestellung vorbereitet wurde.

Wir geben eine Uebersicht über den Gesammtinhalt des Buches.

Der erste Abschnitt zerfällt in fünf Capitel. Gegenstand des Cap. I ist das Studium der regulären Körper, des Tetraeders, Würfels, Oktaeders, Dodekaeders und Ikosaeders, oder genauer der Projectionen jener Körper (d. h. ihrer Ecken und Kanten) auf die Oberfläche einer durch die Ecken gelegten Kugel aus dem Mittelpunkte derselben, also der regulären Kugelnetze. An die genannten Körper schliesst sich noch das Dieder, welches

aus dem regulären $n$-Eck hervorgeht und dem auf der Kugelfläche ein aus $2n$ Dreiecken bestehendes Netz entspricht. Für das volle Verständniss des Folgenden sind Modelle der definirten Netze unentbehrlich; doch reichen zwei Kugeln aus, auf deren eine man Tetraeder, Oktaeder und Würfel, auf die andere Ikosaeder und Dodekaeder projicirt. Verf. studirt nun diejenigen Drehungen der Kugelfläche, durch welche eines jener Netze zur Deckung mit sich selbst gelangt. Die Gesammtheit dieser Drehungen bildet eine „Gruppe" im Sinne Galois', nämlich eine geschlossene Mannigfaltigkeit von Operationen. Es folgen gruppentheoretische Vorbegriffe in abstrakter Definition, die Begriffe der innerhalb einer Gruppe gleichberechtigten Operationen, der Untergruppe, der gleichberechtigten und der ausgezeichneten Untergruppen, der Einfachheit einer Gruppe, sowie des (holoedrischen oder meriedrischen) Isomorphismus zweier Gruppen. Diese abstrakten Definitionen werden dann durch die Anwendung auf die regulären Körper veranschaulicht. Es zeigt sich, dass die Gruppen des Oktaeders und Würfels, sowie des Dodekaeders und Ikosaeders identisch sind. Die definirten Begriffe gewinnen fast sämmtlich sehr einfache geometrische Bedeutungen. So besteht eine Untergruppe immer in der Gesammtheit derjenigen Drehungen, welche irgend ein in dem betrachteten Körper enthaltenes geometrisches Gebilde, etwa eine Diagonale, in sich überführen. Dem Oktaeder lassen sich zwei Tetraeder zuordnen, deren Ecken mit den Projectionen der Seitenmittelpunkte des Oktaeders auf die Kugelfläche zusammenfallen; bei allen 24 Oktaederdrehungen wird jedes jener beiden Tetraeder entweder in sich oder in das andere übergeführt; die Gesammtheit derjenigen (zwölf) Drehungen, welche jedes der Tetraeder in sich selbst überführen, bildet dann eine „ausgezeichnete" Untergruppe. Allgemein: Nennen wir zu einem geometrischen Gebilde $A$ alle diejenigen „gleichberechtigt", in welche $A$ durch die Drehungen des betrachteten Polyeders überhaupt übergehen kann ($A'$, $A''$, ...), so bilden alle diejenigen Drehungen, bei denen jedes der sämmtlichen gleichberechtigten Gebilde $A$, $A'$, $A''$, ... mit sich selbst zur Deckung kommt, eine „ausgezeichnete" Untergruppe. — Bei der Zusammensetzung solcher geometrischer Hilfsgebilde, durch welche überhaupt Untergruppen (und speciell ausgezeichnete Untergruppen) definirt werden, spielen die Eckpunkte, die Seitenmittelpunkte und die Kantenmittelpunkte des Polyeders die wesentlichste Rolle. — Unter den Resultaten des Cap. I sind besonders die folgenden, auf das Ikosaeder bezüglichen hervorzuheben. Die im Ganzen aus 60 Drehungen bestehende Ikosaedergruppe ist „einfach" (d. h. enthält keine ausgezeichnete Untergruppe) und holoedrisch isomorph mit der Gruppe der 60 geraden Vertauschungen von fünf Dingen. Von Untergruppen kommen später bei der Theorie der Gleichungen fünften Grades in Betracht: sechs gleichberechtigte Untergruppen von je zehn Drehungen (Diederdrehungen, d. h. solche, bei denen jedesmal eine Verbindungslinie zweier gegenüberliegenden Ecken in sich übergeht), und fünf gleichberech-

tigte Untergruppen von je zwölf Drehungen (Tetraederdrehungen, d. h. solche, bei denen ein zum Ikosaeder in Beziehung stehendes Tetraeder mit sich selbst zur Deckung kommt). Alle 60 Ikosaederdrehungen können durch Wiederholung und Combination dreier ($S$, $T$, $U$), unter denen sich sogar nur zwei von einander unabhängige ($S$ und $T$) befinden, erzeugt werden. — Durch Projection der Ikosaederkanten auf die Kugelfläche entstehen 20 gleichseitige sphärische Dreiecke, deren jedes durch seine drei Höhen in sechs Theile zu theilen ist, so dass die Kugelfläche im Ganzen von 120 rechtwinkligen Dreiecken bedeckt wird. Dieselben zerfallen in zwei Schaaren von je 60 unter einander congruenten, während je zwei verschiedenen Schaaren angehörige nur symmetrisch sind. Aus einem beliebigen Punkte $P$ der Kugelfläche entstehen durch die 60 Drehungen im Allgemeinen 60 verschiedene Punkte, deren jeder in einem andern von den 60 congruenten Dreiecken einer Schaar liegt. Die Gesammtheit von 60 solchen Punkten wird kurz ein „Punktsystem" genannt. In besonderen Fällen, nämlich wenn $P$ mit einer Ecke der genannten Dreiecke zusammenfällt, enthält ein Punktsystem nur resp. 12, 20 oder 30 Punkte.

Der Grundgedanke des Cap. II ist der, dass dieselbe Kugel, auf welche die Polyeder projicirt sind, gleichzeitig als Träger einer complexen Variabeln $z$ im Sinne Riemann's betrachtet wird. Die Beziehung zwischen der Kugelfläche und der mit der Aequatorialebene zusammenfallend gedachten complexen Ebene von $z$ wird dabei durch stereographische Projection aus einem der beiden Kugelpole, der zugleich ein Eckpunkt des betreffenden Polyeders sein soll, hergestellt. Es entspricht dann jeder Drehung der Kugel um den Mittelpunkt eine lineare Substitution, indem jeder Punkt $z$ übergeht in

$$z' = \frac{(d+ic)z-(b-ia)}{(b+ia)z+(d-ic)}.$$

Setzt man $z = \frac{z_1}{z_2}$, so ist eine solche Substitution äquivalent mit

$$z'_1 = (d+ic)z_1 - (b-ia)z_2, \quad z'_2 = (b+ia)z_1 + (d-ic)z_2.$$

(Wir heben gleich hier hervor, dass die Einführung der homogenen Veränderlichen $z_1$ und $z_2$ für die Folge von fundamentaler Bedeutung ist.)

Verlangt man noch, dass die Determinante der Substitution 1 sei, so sind für jede Drehung die zugehörigen Constanten $a$, $b$, $c$, $d$ bis auf das Vorzeichen bestimmt. Der Ikosaedergruppe entsprechen daher 120 Substitutionen in $z_1$, $z_2$, von denen immer zwei dieselbe Substitution in $z$ liefern. Es wird bewiesen, dass eine Gruppe von nur 60 binären Substitutionen in $z_1$, $z_2$, welche mit den 60 Substitutionen in $z$ äquivalent wären, nicht existiren kann. Bei Berechnung der 120 Werthe von $a$, $b$, $c$, $d$ wird der Umstand benutzt, dass nach Cap. I alle Substitutionen sich aus dreien ($S$, $T$, $U$) zusammensetzen lassen. — Ein „Punktsystem" ist definirt durch eine algebraische Gleichung 60. Grades $F(z) = 0$, die bei den 60 Ikosaedersubstitutionen

ungeändert bleibt und auch durch eine homogene Gleichung $F(z_1, z_2) = 0$ ersetzt werden kann. Diejenigen speciellen Functionen $F(z)$ resp. $F(z_1, z_2)$, durch welche die in Cap. I erwähnten Systeme von nur 12, 20 und 30 Punkten definirt werden, sind Potenzen gewisser Functionen der Grade 12, 20 und 30, welche selbst durch die 60 (resp. 120) Ikosaedersubstitutionen bis auf einen Factor ungeändert bleiben. Diese speciellen Functionen können direct berechnet werden; doch lassen sich aus einer derselben, etwa der Function zwölften Grades $f(z_1, z_2)$, welche den Ikosaederecken entspricht, die übrigen mit den Hilfsmitteln der Invariantentheorie ableiten, wodurch zugleich der Anschluss an diese Disciplin erreicht ist. Jede Covariante der binären Form $f(z_1, z_2)$ wird nämlich offenbar ihrer Definition nach bei denjenigen linearen Substitutionen, welche $f(z_1, z_2)$ unverändert lassen, d. h. also bei den Ikosaedersubstitutionen, ebenfalls unverändert bleiben (abgesehen von einem Factor). Nun sind die Hesse'sche Form von $f$ (H) und die Functionaldeterminante von H und $f$ $(T)$ solche Covarianten, die erste vom Grade 20, die letztere vom Grade 30; dieselben müssen also, gleich Null gesetzt, eben jene vorhergenannten 20 Seitenmittelpunkte und 30 Kantenmittelpunkte liefern, da anschauungsmässig keine anderen „Punktsysteme" von nur 20 resp. 30 Punkten existiren. — Zwischen den drei Formen $f$, $T$, H besteht eine identische Relation $T^2 = -\mathrm{H}^3 + 1728 f^5$. — Die Formen 60. Grades: $f^5$, $T^2$ und $\mathrm{H}^3$ multipliciren sich nun, wie der Versuch zeigt, bei den Ikosaedersubstitutionen immer alle drei mit demselben Factor (der hier sogar gleich 1, bei den analogen Formen der anderen regulären Körper jedoch im Allgemeinen von 1 verschieden ist); daher wird jede Form $\lambda_1 f^5 + \lambda_2 \mathrm{H}^3 + \lambda_3 T^2$ für beliebige Werthe der Constanten $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ auch nur um einen Factor geändert werden und demnach, gleich Null gesetzt, ein Punktsystem liefern. Dieses Punktsystem ist zugleich das allgemeine, da jene Form, auch wenn der Werth von $T^2$ in $\mathrm{H}^3$ und $f^5$ aus der angegebenen Identität entnommen wird, immer noch einen wesentlichen (complexen) Parameter $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ enthält. In anderer Weise ergiebt sich die Gleichung des allgemeinen Punktsystems offenbar auch dadurch, dass man den Quotienten von irgend zwei homogenen linearen Functionen der Ausdrücke $f^5$, $\mathrm{H}^3$, $T^2$ einem (im Allgemeinen complexen) Parameter $Z$ gleichsetzt. Jener Quotient ist dann zugleich eine rationale Function von $\frac{z_1}{z_2}$ oder $z$, so dass eine Gleichung 60. Grades für $z$ entsteht, deren Wurzeln zu jedem Werthe von $Z$ direct das zugehörige Punktsystem liefern. Um die an sich willkürlichen Constanten, welche als Coefficienten von $f^5$, $\mathrm{H}^3$, $T^2$ in dem genannten Quotienten auftreten, für die weitere Behandlung des Problems zu fixiren, wird die Forderung gestellt, dass den drei Gruppen der 12, 20 und 30 singulären Punkte resp. die Werthe $\infty$, 0 und 1 des Parameters $Z$ entsprechen sollen. Die nunmehr vollständig bestimmte Gleichung 60. Grades in $z$, deren rechte

Seite $Z$ ist, soll im Folgenden kurz als Ikosaedergleichung bezeichnet werden.

Cap. III. Durch die Ikosaedergleichung ist $z$ als Function der complexen Veränderlichen $Z$ definirt; das Studium dieser Function ihrem analytischen Charakter nach und die Darstellung derselben durch Potenzreihen ist Aufgabe dieses Capitels. Ihr zur Seite steht eine zweite Aufgabe, das „zugehörige Formenproblem", welches sich mit der analytischen Abhängigkeit der beiden Grössen $z_1$ und $z_2$ von den aus $f$, H, $T$ zusammengesetzten absoluten Invarianten $F_1$, $F_2$, $F_3$ (die beim Ikosaeder direct gleich $f$, H, $T$ angenommen werden können) beschäftigt. Die zweite Aufgabe reducirt sich leicht auf die erste, wir beschränken uns deshalb darauf, kurz die Behandlung der ersten anzudeuten. — Zunächst wird eine Uebersicht über die verschiedenen Zweige der Function und den Zusammenhang derselben gegeben, und zwar nicht dadurch, dass in der $Z$-Ebene eine mehrblätterige Fläche zur Ausbreitung von $z$ construirt, sondern dadurch, dass die $Z$-Ebene durch die Function $z$ conform auf die Kugelfläche abgebildet wird. Jede der beiden Halbebenen von $Z$, welche durch die reelle Gerade von einander getrennt sind, wird dabei 60mal abgebildet, nämlich der Reihe nach auf 60 congruente der in Cap. I construirten 120 sphärischen Dreiecke, deren Ecken immer resp. den Punkten $Z=\infty, 0, 1$ entsprechen. Die 60 Zweige der Function $z$ hängen also an diesen Ecken zusammen, und zwar so, dass von denjenigen, die zugleich Ikosaederecken sind ($Z=\infty$), je 5, von denjenigen, welche den Seitenmittelpunkten des Ikosaeders entsprechen ($Z=0$), je 3, von denjenigen endlich, in welchen die Ikosaederkanten halbirt werden ($Z=1$), je 2 Zweige ausgehen. Daraus ergiebt sich unmittelbar die Darstellbarkeit von $z$ in der Umgebung jener singulären Stellen durch Reihen, welche resp. nach Potenzen von $\left(\frac{1}{Z}\right)^{1/5}$, $Z^{1/3}$ und $(Z-1)^{1/2}$ fortschreiten, und es gelingt auch ohne Schwierigkeit, die ersten Coefficienten dieser Reihen durch Einsetzen in die Ikosaedergleichung zu berechnen. — Zur weiteren Charakterisirung der Functionen $z$, $z_1$, $z_2$ werden nun Differentialgleichungen aufgestellt, auf Grund deren schliesslich der Anschluss an längstbekannte Functionen, nämlich die Riemann'schen $P$-Functionen, erreicht wird. Zunächst ergiebt sich, dass ein gewisser Differentialausdruck dritter Ordnung in $z$, welcher bei allen linearen Transformationen ungeändert bleibt und daher überhaupt in der Theorie der Functionen mit linearen Transformationen in sich eine wichtige Rolle spielt, eine eindeutige, folglich rationale Function von $Z$ ist, welche sich leicht bestimmen lässt. Mit der so entstandenen Differentialgleichung dritter Ordnung für $z$ steht eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, die noch eine willkürliche Function enthält, in dem Zusammenhange, dass der Quotient zweier beliebigen Lösungen der letzteren zugleich das allgemeine Integral der ersteren ist. Bei passender Bestimmung der erwähnten willkürlichen Function werden

unsere Functionen $z_1$ und $z_2$, deren Quotient $z$ der Differentialgleichung dritter Ordnung genügt, selbst geradezu Lösungen jener Differentialgleichung zweiter Ordnung. Letztere stellt sich dann als ein specieller Fall einer allgemeinen Differentialgleichung zweiter Ordnung dar, durch welche Riemann's $P$-Functionen definirt sind; womit das letzte Ziel dieses Capitels erreicht ist.

Das Cap. IV beschäftigt sich mit der Untersuchung des algebraischen Charakters der Ikosaedergleichung und der Aufstellung ihrer einfachsten Resolventen. Jeder in der Ikosaedergruppe enthaltenen Untergruppe entsprechen gewisse rationale Functionen von $z$, welche bei den zu jener Untergruppe gehörigen linearen Transformationen unverändert bleiben. Dieselben stehen zu demjenigen geometrischen Gebilde, welches (nach Cap. I) bei den Drehungen der betreffenden Untergruppe in sich übergeht, in einer analogen Beziehung, wie die linke Seite der Ikosaedergleichung zum Ikosaeder. Ist z. B. jenes Gebilde ein Tetraeder, so erhält man nach Cap. I eine zugehörige Untergruppe von zwölf Drehungen, und dementsprechend dreifach unendlich viel rationale Functionen zwölften Grades von $z$, welche sich linear durch jede einzelne derselben ausdrücken lassen. Jede dieser Functionen nimmt im Ganzen, d. h. bei sämmtlichen 60 Ikosaederdrehungen, fünf verschiedene Werthe an (weil die Untergruppe von zwölf Drehungen eine von fünf gleichberechtigten ist) und genügt daher einer Gleichung fünften Grades, deren Coefficienten rational von $Z$ abhängen. — Untersucht man statt der Gleichungen die zugehörigen Formenprobleme, so findet man jeder Untergruppe entsprechend gewisse Formen, die gleich allen rational und ganz aus ihnen zusammengesetzten die Eigenschaft besitzen, bei sämmtlichen Substitutionen der Untergruppe unverändert zu bleiben. Dieselben stehen zu dem geometrischen Gebilde, welches die Untergruppe definirt, in analoger Beziehung, wie die früher mit $f$, H, $T$ bezeichneten absoluten Invarianten zum Ikosaeder. Speciell für die bereits betrachtete Untergruppe von zwölf Substitutionen genügt jede solche Form wiederum einer Gleichung fünften Grades, deren Coefficienten rational aus $f$, H, $T$ zusammengesetzt sind. Von den so gewonnenen Gleichungen gelangt man alsdann (durch eine Operation, auf die hier nicht weiter eingegangen werden soll) sehr schnell wiederum zu rationalen Resolventen fünften Grades der Ikosaedergleichung selbst. Unter denselben heben wir eine besonders hervor, die sogenannte „Hauptresolvente", welche später im zweiten Abschnitte des Buches eine grosse Rolle spielt. Charakteristisch für dieselbe ist das Fehlen der vierten und dritten Potenz der Unbekannten; übrigens enthält sie noch zwei willkürliche Parameter $m$ und $n$, und ihre Wurzeln haben die Form $m.v+n.u.v$, wo $n$ und $v$ gewisse rationale Functionen von $z$ sind, welche bei den Ikosaedersubstitutionen gleichzeitig fünf verschiedene Werthe annehmen. — Die zweite der in Cap. I hervorgehobenen Untergruppen, nämlich die aus zehn Drehungen bestehende Diedergruppe, welche eine von

sechs gleichberechtigten ist, liefert in derselben Weise eine rationale Resolvente sechsten Grades der Ikosaedergleichung. — Es wird schliesslich darauf hingewiesen, dass die Auflösung der nur von einem Parameter $Z$ abhängigen Ikosaedergleichung betrachtet werden kann als eine Verallgemeinerung der elementaren Aufgabe, die $n^{te}$ Wurzel aus einer Grösse $Z$ auszuziehen. Die Gleichungen ersten bis vierten Grades lassen sich auf die Aufgabe der Wurzelziehung reduciren; es fragt sich, ob durch Adjunction der Ikosaederirrationalität, d. h. dadurch, dass man die Berechnung der Wurzeln der Ikosaedergleichung aus dem gegebenen Werthe von $Z$ als eine durchführbare Operation betrachtet, auch die Auflösung der Gleichungen höheren Grades möglich wird. Für die Gleichung fünften Grades ist diese Frage durch Aufstellung der Resolventen desselben Grades besonders nahe gerückt. Die Beantwortung der Frage, welche bejahend ausfällt, sowie die Herleitung und ausführliche Discussion aller Verbindungen zwischen der allgemeinen Gleichung fünften Grades und der Theorie des Ikosaeders bildet später den Inhalt des zweiten Abschnittes.

In Cap. V werden einige allgemeine Theoreme, welche aus den Untersuchungen der vorhergehenden Capitel folgen, sowie gewisse neue Gesichtspunkte angegeben, aus denen wesentliche Erweiterungen der behandelten Aufgaben sichtbar werden. Zunächst wird als charakteristische Eigenschaft der bisher discutirten Probleme diejenige anerkannt, dass immer aus einer Lösung alle anderen durch *a priori* bekannte lineare Substitutionen hervorgehen. Daraus ergiebt sich sogleich die Frage, ob nicht noch andere endliche Gruppen lineare Substitutionen einer Veränderlichen $z$ (oder zweier homogener Veränderlichen $z_1$ und $z_2$) und entsprechende Gleichungen (oder Gleichungssysteme) existiren. Es zeigt sich, dass dieses nicht der Fall ist, dass vielmehr die vorher aufgestellten Gruppen (cyclische, Dieder-, Tetraeder-, Oktaeder- und Ikosaedergruppe) und die aus denselben durch Einführung einer neuen, linear von $z$ abhängigen Veränderlichen hervorgehenden die einzig möglichen sind. Mit Hilfe dieses Satzes wird die Aufgabe gelöst, alle algebraisch integrirbaren linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung anzugeben; denn zwei Partikularlösungen einer solchen Differentialgleichung, sowie der Quotient derselben können, da sie algebraisch sein sollen, nur eine endliche Gruppe linearer Substitutionen zulassen, und aus dieser folgt direct die Form der Lösungen, welche alsdann rückwärts die Form der Differentialgleichungen bestimmt. — Die behandelten Probleme lassen nun eine Verallgemeinerung nach zwei Richtungen zu, die auch miteinander verträglich sind: es kann erstens die Anzahl der Variabeln vermehrt und es können zweitens unendliche Gruppen einer Variabeln hinzugezogen werden. In beiden Richtungen wird die Untersuchung angedeutet. Unter den unendlichen Gruppen wird besonders die Stellung der elliptischen Modulfunctionen bestimmt, welche als Endglied einer mit den Dieder-, Tetraeder-, Octaeder-, Ikosaederfunctionen beginnenden Kette auftreten, wobei

dem Argumente $Z$ die absolute Invariante $\frac{g_2^3}{\Delta}$ eines elliptischen Integrals, der Function $z$ das Verhältniss $\frac{iK'}{K}$ zweier primitiven Perioden entspricht. Schliesslich wird die Auflösung der Ikosaedergleichung durch elliptische Modulfunctionen, d. h. die eindeutige Darstellung der zum Argumentwerthe $Z=\frac{g_2^3}{\Delta}$ gehörigen Werthe von $z$ durch die Grösse $\frac{iK'}{K}$ historisch mitgetheilt; die Möglichkeit einer solchen Auffassung ergiebt sich dabei als Specialfall eines allgemeinen Theorems. — Auch die in Cap. IV aufgestellte Resolvente sechsten Grades der Ikosaedergleichung wird durch elliptische Functionen gelöst, wobei durch Einführung der rationalen Invarianten $g_2$ und $g_3$ an Stelle des Moduls $k$ eine wesentliche Vereinfachung des zuerst von Kronecker angegebenen Verfahrens erzielt wird. Eine Bedeutung für die Algebra besitzt diese Auflösung durch transcendente Functionen, so interessant dieselbe an sich ist, nicht, was Verfasser ausdrücklich hervorhebt.

Der zweite Abschnitt ist der Theorie der Gleichungen fünften Grades gewidmet. Er beginnt (Cap. I) mit einem historischen Abriss, welcher gleichzeitig dazu dient, nach und nach die später zu behandelnden Probleme klarzulegen. Die algebraische Hauptaufgabe besteht darin, dass die allgemeine Gleichung fünften Grades, welche fünf Parameter (Coefficienten) enthält, durch andere Gleichungen mit einer geringeren Anzahl von Parametern ersetzt, oder, anders ausgedrückt, darin, dass die durch die Gleichung fünften Grades definirte Function von fünf Argumenten auf algebraische Functionen von weniger Argumenten zurückgeführt werden soll. Zwei Wege gehen zu diesem Ziele, die Tschirnhaus-Transformation und die Resolventenbildung. Durch Tschirnhaus-Transformation war schon Bring im Jahre 1786 zur Reduction auf die Gleichung $x^5+5bx+c=0$ gelangt, welche durch die Substitution $x=\varrho t$ und passende Bestimmung von $\varrho$ die Form $t^5-t+A=0$ annimmt, also nur noch einen einzigen wesentlichen Parameter enthält. Auf dem andern Wege fand 1858 Kronecker für die allgemeine Gleichung fünften Grades eine Resolvente vom sechsten Grade mit drei Parametern, die sich auf einen wesentlichen reduciren liessen, und zwar war diese Resolvente eine Gleichung von der Art, wie sie zuerst Jacobi als Verallgemeinerung der Multiplicatorgleichung in der Theorie der elliptischen Functionen betrachtet hatte. — An die algebraische Aufgabe der Reduction auf möglichst wenige Parameter schliesst sich eine zweite, welcher eine rein algebraische Bedeutung nicht mehr zukommt, nämlich die Berechnung der gesuchten Wurzeln aus den gegebenen Parametern mit Hilfe bekannter transcendenter Functionen. Diese Aufgabe ist im Anschluss an die Theorie der elliptischen Functionen im Jahre 1858 fast gleichzeitig und unabhängig für die Bring'sche Gleichung

von Hermite und für diejenige Jacobi'sche Gleichung mit einem wesentlichen Parameter, welche Kronecker als Resolvente der allgemeinen Gleichung fünften Grades aufgestellt hatte, von diesem selbst gelöst worden.

Inzwischen wurde (1861) der algebraische Theil des Problems, auf den sich von nun an das Hauptinteresse richtet, von Kronecker schärfer präcisirt. Abel hatte folgenden Satz bewiesen: „Wenn eine Gleichung algebraisch auflösbar ist, so kann man der Wurzel allezeit eine solche Form geben, dass sich alle algebraischen Functionen, aus welchen sie zusammengesetzt ist, durch rationale Functionen der Wurzeln der gegebenen Gleichung ausdrücken lassen." An dieser Forderung will Kronecker auch bei Behandlung der nicht algebraisch auflösbaren Gleichungen festhalten und verlangt demnach, dass nur rationale Functionen der gesuchten Wurzeln als neue Unbekannte eingeführt, mit anderen Worten, dass nur rationale Resolventen der gegebenen Gleichung aufgestellt werden sollen. Dies ist des Näheren so zu verstehen, dass die resolvirende Function, wenn sie allein durch die Wurzeln der ursprünglich gegebenen Gleichung ausgedrückt wird (indem die Coefficienten der letzteren, wo sie etwa noch vorkommen, überall durch die symmetrischen Functionen jener Wurzeln zu ersetzen sind) rational in jenen Wurzeln werden muss. Dieser Bedingung genügt z. B. die Quadratwurzel aus der Discriminante, obgleich dieselbe, durch die Coefficienten der vorgelegten Gleichung ausgedrückt, in irrationaler Form auftritt. Kronecker findet, dass von dem neuen Gesichtspunkte die 1858 von ihm selbst angegebene Reduction der drei Parameter, die in der Resolvente sechsten Grades auftreten, auf einen einzigen unzulässig ist, während eine Reduction auf zwei Parameter ohne Verlassen des vorgeschriebenen Rationalitätsbereichs noch ausführbar bleibt. Eine Reduction auf weniger als zwei Parameter ist nach Kronecker unter der angegebenen Bedingung überhaupt unmöglich. In der That treten auch bei der Reduction auf die Bring'sche Form mehrfach Irrationalitäten, welche nicht die genannte Bedingung erfüllen, sogenannte „accessorische" Quadrat- und Cubikwurzeln auf.

Die Frage, welche Verf. stellt und in den folgenden Capiteln untersucht, ist nun folgende: In welcher Weise steht die algebraische Theorie der Gleichungen fünften Grades in Verbindung mit der Theorie des Ikosaeders, und wie lässt sie sich auf Grund der letzteren im Zusammenhange entwickeln? Bei Untersuchung dieser Frage kann die Forderung Kronecker's nicht festgehalten werden; denn die Ikosaedergleichung enthält nur einen einzigen Parameter $Z$, eine Beziehung derselben zur allgemeinen Gleichung fünften Grades kann sich daher, infolge des genannten Kronecker'schen Satzes, nicht ohne Einführung accessorischer Irrationalitäten ergeben. Dagegen wird untersucht werden können (und diese Untersuchung führt schliesslich auf Begründung des Kronecker'schen Satzes), durch welche kleinste Anzahl accessorischer Irrationalitäten die Beziehung zur Ikosaedertheorie herstellbar ist und bis zu welcher Stelle die Annäherung

an diese Theorie ohne Benutzung einer accessorischen Irrationalität geführt werden kann. Es zeigt sich, dass eine accessorische Quadratwurzel unter allen Umständen ausreicht (so lange es sich nur um Bestimmung der Verhältnisse der fünf Wurzeln handelt, was in der Folge immer angenommen wird), und dass speciell bei den „Hauptgleichungen", d. h. solchen, welche die vierte und dritte Potenz der Unbekannten nicht enthalten, auch jene fortfällt. Die Stelle, an welcher die accessorische Quadratwurzel unvermeidlich wird, liegt also, wofern man an dem Gedankengange von Bring festhält, in der Reduction der allgemeinen Gleichung auf eine Hauptgleichung durch Tschirnhaus-Transformationen, während der Fortschritt gegen Bring darin besteht, dass Letzerer zur weiteren Transformation der Hauptgleichung in eine solche mit nur einem wesentlichen Parameter neue accessorische Irrationalitäten einführen zu müssen glaubte. Folgt man andererseits dem Gedankengange Kronecker's und leitet zunächst die Resolvente sechsten Grades mit drei Parametern, welche eine Jacobi'sche Gleichung ist, ab, so wird die Benutzung der accessorischen Quadratwurzel weiter hinausgeschoben, sie tritt nämlich alsdann erst bei der Reduction jener Resolvente auf die Ikosaedergleichung auf; es ist dies aber, wie Verf. zeigt, nur eine andere Anordnung derselben Schritte.

Im Einzelnen sind die Untersuchungen des zweiten Abschnittes folgendermassen gegliedert. Der historischen Uebersicht in Cap. I folgen in Cap. II geometrische Interpretationen der in der Gleichungstheorie auftretenden Begriffe, speciell der Tschirnhaus-Transformation und der Resolvente, nebst einem für das Spätere wichtigen Excurs über die Elemente der Liniengeometrie und die Flächen zweiten Grades. Auch die folgenden Capitel sind durchsetzt von geometrischen Deutungen, aus denen einige der folgenreichsten Ideen, welche sich in abstrakter Behandlung gewiss nur schwer dem Zusammenhange fügen würden, gleichsam von selbst und vollkommen fertig hervorgehen.

Cap. III behandelt die „Hauptgleichungen" fünften Grades, deren Zusammenhang mit der Ikosaedertheorie auf einen Schlag dadurch hergestellt wird, dass die fünf Wurzeln der gegebenen Gleichung ($y_0, y_1, \dots y_4$) als Pentaedercoordinaten, welche durch die Relation $\Sigma y_i = 0$ verbunden sind, aufgefasst werden. Durch die Gleichung $\Sigma y_i^2 = 0$, welche neben der Relation $\Sigma y_i = 0$ für die Hauptgleichungen charakteristisch ist (indem sie das Fehlen der dritten Potenz der Unbekannten, wie jene das der vierten ausdrückt), ist alsdann eine Fläche zweiter Ordnung definirt; jedem Werthsystem der in der Hauptgleichung vorkommenden drei Coefficienten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ entsprechen 120, und wenn die Quadratwurzel aus der Discriminante ($\nabla$) ebenfalls noch gegeben ist, 60 Punkte der Fläche, welche aus einem derselben durch die geraden Vertauschungen seiner Coordinaten entstehen; je 60 zusammengehörige Punkte bestimmen immer zwei Gruppen von je 60 der geradlinigen Erzeugenden der Fläche. Denkt man sich nun die beiden

Schaaren geradliniger Erzeugender durch je einen variabeln Parameter $\lambda$ definirt, welcher rational von den Coordinaten $y_0, \ldots y_4$ abhängt, so genügen bei geschickter Einführung des $\lambda$ immer 60 zusammengehörige Werthe $\lambda$ geradezu der Ikosaedergleichung, wenn in derselben für $Z$ ein gewisser rationaler Ausdruck von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\nabla$ gesetzt wird. Die Wurzeln $y_0, \ldots y_4$ hängen schliesslich wiederum rational von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\nabla$ und $\lambda$ ab (bis auf einen gemeinschaftlichen Factor, dessen Werth sich unmittelbar aus der Hauptgleichung selbst ergiebt). Hiermit ist die Reduction auf die Ikosaedergleichung bewerkstelligt.

Cap. IV enthält im Wesentlichen die Theorie der Jacobi'schen Gleichungen in ihrem Zusammenhange mit dem Ikosaeder. Als Ausgangspunkt wird indessen nicht jene Gleichung selbst gewählt, sondern ein Problem, welches sich aus den im V. Capitel des ersten Abschnittes angedeuteten allgemeinen Ideen ergiebt und vom Verfasser kurz das Problem der A genannt wird. Aus zwei Reihen binärer Variablen $\lambda_1$, $\lambda_2$ und $\lambda'_1$, $\lambda'_2$, welche simultan den 60 Ikosaedersubstitutionen unterworfen gedacht werden, setzen sich die drei symmetrischen bilinearen Formen

$$\mathsf{A}_0 = -\tfrac{1}{2}(\lambda_1\lambda'_2 + \lambda_2\lambda'_1), \quad \mathsf{A}_1 = \lambda_2\lambda'_2, \quad \mathsf{A}_2 = -\lambda_1\lambda'_1$$

zusammen, welche entsprechend den Ikosaedersubstitutionen der $\lambda$ gewisse lineare Transformationen erleiden. Auf Grund der Entwickelungen des ersten Abschnittes wird das vollständige System invarianter Formen der A berechnet; dieselben entstehen, indem man aus den invarianten Ikosaederformen in $\lambda_1$, $\lambda_2$ durch mehrfache Wiederholung des in der Invariantentheorie üblichen Polarisationsprocesses neue Formen bildet, welche nach den $\lambda$ und $\lambda'$ symmetrisch sind, und dann die A einführt. Man erhält so im Ganzen vier invariante Formen $A$, $B$, $C$, $D$, deren letzte jedoch der Quadratwurzel aus einem ganzen rationalen Ausdruck der ersten drei gleich ist. Es wird nun das Problem aufgestellt, aus den Grössen $A$, $B$, $C$, $D$ die zugehörigen $\mathsf{A}_0$, $\mathsf{A}_1$, $\mathsf{A}_2$ zu berechnen. Dasselbe führt einerseits zur Bildung einer Resolvente sechsten Grades der $A$, welche die Form der Jacobi'schen Gleichung mit den drei unabhängigen Parametern $A$, $B$, $C$ hat, und aus deren Wurzeln die A rational hervorgehen, sobald ausser $A$, $B$, $C$ noch $D$ gegeben ist. Andererseits lässt sich dasselbe Problem direct mit Hilfe der Theorie des Ikosaeders lösen, indem zunächst der Quotient $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ Wurzel der Ikosaedergleichung ist, wenn in derselben $Z$ durch eine gewisse rationale Function der Grössen $A$, $B$, $C$, $D$ und der accessorischen Quadratwurzel $\sqrt{A}$ ersetzt wird. Hiermit ist gleichzeitig auch die Reduction der allgemeinen Jacobi'schen Gleichung, welche als ein genaues Aequivalent des Problems der $A$ betrachtet werden kann, auf die Ikosaedergleichung geleistet.

Cap. V enthält endlich die Auflösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades nach zwei Methoden, nämlich durch Zurückführung erstens auf die in Cap. III behandelte Hauptgleichung, und zweitens auf das in Cap. IV

discutirte Problem der $A$. Die erste Methode kann als eine Vereinfachung der von Bring, die andere als eine Modification der von Kronecker herrührenden angesehen werden. Auf beiden Wegen begegnen wir der accessorischen Quadratwurzel. Das Buch schliesst mit dem Beweise des von Kronecker 1861 ohne Beweis aufgestellten Satzes, dass ohne accessorische Irrationalität die Reduction auf einen einzigen Parameter unmöglich ist. Der Satz ergiebt sich hier als Folge einer im ersten Abschnitte (Cap. II) klargelegten Eigenschaft des Ikosaeders, wonach keine Gruppe von nur 60 binären Substitutionen existiren kann, welche mit der Gruppe der 60 nicht homogenen Ikosaedersubstitutionen isomorph wäre.

München, Januar 1885. LUDW. SCHEEFFER.

---

**Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage.** Von Dr. WILHELM FIEDLER. Dritte erweiterte Auflage. I. Theil: Die Methode der darstellenden und die Elemente der projectivischen Geometrie. Leipzig 1883, B. G. Teubner. gr. 8°. 376 S.

Bei der grossen Verbreitung des vorliegenden Werkes, welches unstreitig das inhaltsreichste seiner Art ist, aber auch, namentlich für das tiefere wissenschaftliche Studium, als bestes erscheint, dürfte es hier genügen, auf die Abänderungen und das neu Hinzugetretene hinzuweisen.

Der bis jetzt erschienene erste Theil behandelt die Methodenlehre und geht demgemäss bis S. 210 der zweiten Auflage; ihm sollen noch zwei andere Theile, „die darstellende Geometrie der krummen Linien und Flächen“ und „die constructive und analytische Geometrie der Lage“ folgen.

Die wesentlichste Bereicherung ist in der Aufnahme der cyclographischen Constructionen, anknüpfend an die Darstellung der $\infty^3$ Punkte des Raumes durch dieselbe Anzahl von Kreisen der Bildebene, zu erkennen, wie sie der Verfasser bereits in seiner Cyclographie (Leipzig 1882) gegeben hat. Wegen Weglassens dieser Theorie in der zweiten Auflage äussert sich der Verfasser in seiner Vorrede jetzt folgendermassen: „Damals (beim Erscheinen der zweiten Auflage. D. Ref.) glaubte ich noch an das baldige Erscheinen des im Jahre 1826 von J. Steiner als nahe druckbereit angekündigten Manuscripts (von 25—30 Bogen) „über das Schneiden (mit Einschluss der Berührung) der Kreise in der Ebene, das Schneiden der Kugeln im Raume und das Schneiden der Kreise auf der Kugelfläche“, in welchem der auf die Kreis- und Kugelgeometrie bezügliche Theil der Consequenzen von der Einführung des Distanzkreises und der Benutzung der Centralprojection entwickelt gewesen sein müssten, und schloss alles dies von meinem Buche aus. Seitdem ist durch die von der K. Preussischen Akademie der Wissenschaften veranstaltete Ausgabe „Jacob Steiner's gesammelte Werke“ (Berlin 1881, 2 Bde.) ausser Zweifel gestellt worden, dass Manuscripte Steiner's

aus jener Epoche nicht mehr vorhanden sind. Ich habe infolge dessen in meiner „Cyclographie“ diesen Theil meiner Entwickelungen zunächst selbstständig und elementar dargestellt, konnte und wollte ihn aber als ein wesentliches Stück der Ausgestaltung der Grundidee dieses Werkes nun auch in diesem selbst nicht unterdrücken. Die §§ 7, 36, (36a)—(36e) und eine Reihe von Bemerkungen des Ueberblicks zum Abschnitt B sind seiner Einführung gewidmet und der zweite Band wird die Fortsetzung dieser Anfänge bringen.“

§ 7 bringt die Elemente. Jeder Punkt des Raumes wird, wie das Centrum der Projection selbst, bestimmt durch seinen Distanzkreis, versehen mit dem Sinne der Uhrzeigerbewegung, oder dem entgegengesetzten, je nachdem der Punkt auf derselben oder der dem Centrum abgewandten Seite der Bildebene sich befindet. Zwei Kreise bestimmen vier Gerade oder zwei lineare Kreisreihen, je nachdem man ihnen einerlei oder entgegengesetzten Drehungssin beilegt. Die Spuren sind der äussere oder innere Aehnlichkeitspunkt oder Nullkreis. Die Geraden theilen sich in zwei Paare, von denen jedes Paar dieselbe Spur hat. Ebenso bestimmen drei Kreise acht Ebenen oder vier planare Systeme paarweise mit den Aehnlichkeitsaxen als Spuren.

Alle Kreise, welche einen gegebenen berühren, sind Bildkreise eines gleichseitigen Rotationskegels mit zur Tafel normaler Axe und dem gegebenen Kreise als Basis, oder, ohne Festsetzung des Sinnes vom Bildkreise, von den beiden möglichen Kegeln dieser Art. (Unter einem gleichseitigen Kegel ist hier der Rotationskegel von der Oeffnung 45° verstanden, im Gegensatz zu Herrn Schröter, welcher einen Kegel gleichseitig nennt, wenn ihm beliebig viele rechtwinklige Trieder eingeschrieben werden können.) Reducirt sich der gegebene Kreis auf einen Punkt, so stellen alle Kreise durch denselben den gleichseitigen Rotationskegel mit jenem Punkte als Spitze dar.

In den §§ (36) und (36a) werden die Brennpunktseigenschaften der Kegelschnitte abgeleitet.* Die zu untersuchende Curve ist der Schnitt des über dem Distanzkreise stehenden gleichseitigen Rotationskegels, mit dem Centrum als Mittelpunkt und einer durch Spur und Fluchtlinie gegebenen Ebene. Der Augpunkt ist ein Brennpunkt. Aus der Bemerkung, dass durch einen solchen Kegelschnitt noch ein zweiter gleichseitiger Rotationskegel (für die Parabel wird dieser zur Ebene unter 45° gegen die Bildebene geneigt) geht, entspringt der Nachweis des zweiten Brennpunktes und die Entwickelung der hierher gehörigen Theile der Kegelschnitttheorie.

Die Untersuchung der Kreisbüschel und Kreisnetze führt in den §§ (36c), d) zu den gleichseitigen Hyperbeln und Hyperboloiden mit einer zur Tafel senkrechten Axe, deren Bilder sie sind. Der obenerwähnte Rotationskegel,

* In den Quellen- und Literaturnachweisungen sind die §§ (36)—(36e) irrthümlich durch (35)—(35e) bezeichnet.

entsprechend den Kreisen durch einen Punkt, dem „konischen Netze", ist ein Specialfall; er bildet den Uebergang zwischen den beiden Arten von Hyperboloiden.

Aus zwei Kreisen eines Büschels in Verbindung mit dem Kreise eines Aehnlichkeitspunktes als Mittelpunkt, dem „Potenzkreise", wird das Princip der reciproken Radien (Inversion) gewonnen, welches dann weiter zur Ableitung von Sätzen über Systeme von Kugeln, insbesondere über die stereographische Projection verwerthet wird. In § (36e) wird schliesslich noch einmal auf den Kegelschnitt im Raume zurückgegriffen und dargelegt, dass durch ihn ausser den zwei gleichseitigen Kegeln noch unendlich viele Rotationshyperboloide gehen, wodurch dann der Zusammenhang der Theorie der Kegelschnitte mit jener der Kreisnetze herbeigeführt ist. Je zwei Hyperboloide mit parallelen Asymptotenkegeln schneiden sich ausser in einem unendlich fernen Kegelschnitte noch in einem zweiten Kegelschnitte, insbesondere also die in Betracht kommenden gleichseitigen. —

Eine Zugabe anderer Art enthalten die §§ 6* und 54*. Schon im Jahre 1879 hatte der Verfasser den Gegenstand derselben, die Centralprojection, in der IV. seiner „Geometrischen Mittheilungen" in Bd. 24 der Vierteljahrsschrift der Züricher naturforschenden Gesellschaft, dahin verallgemeinert, dass er an Stelle der unendlich fernen Ebene eine beliebige Fixebene $U$ im Endlichen setzte, deren Punkte im Bilde dann die Rolle der Fluchtpunkte spielten. Daraus ergaben sich dann durch Annahme eines unendlich fernen Centrums ungezwungen die Parallelprojectionen mit einer Bildebene (vergl. ibid. S. 213 und § 43 vorliegenden Werkes).

Eine werthvolle neue Beigabe sind sechs lithographirte Tafeln. Auf Taf. I, II, III sind Büschel und Schaaren von Kegelschnitten dargestellt. Alle Hauptfälle sowohl hinsichtlich des Realität, als des Zusammenrückens der Fundamentalelemente sind zur Anschauung gebracht und zwar stets unter Angabe des Mittelpunktskegelschnittes bei jedem Büschel und der Linie der Mittelpunkte bei jeder Schaar. Taf. IV giebt in drei Figuren die Typen der dreiflächigen Abstumpfung der dreiseitigen körperlichen Ecke als Beleg des Satzes: Wenn drei Dreiecke für dasselbe Centrum centrisch collinear sind, so gehen die Collineationsaxen durch einen Punkt. Auf Taf. V ist die Construction der acht Kugeln, welche drei gegebene berühren, in Orthogonalprojection mit einer Fixebene $U$ durchgeführt. Taf. VI giebt die Darstellung eines Krystalls in rechtwinkliger und allgemeiner Axonometrie und in Centralprojection, zur Vergleichung der Wirkung der nach diesen Methoden gewonnenen Bilder.

Die übrigen Erweiterungen haben ihren Grund zum Theil in einer grösseren Ausführlichkeit des Textes und resumirenden Schlussbetrachtungen zu Ende verschiedener Capitel, zum Theil in der Vermehrung der Uebungsbeispiele; das Wachsen der Seitenzahl von 210 auf 376 mag einen Maassstab für die Menge des Neugebotenen geben. Wir führen hier Folgendes an.

In § 4 ist die Theorie der Theilungspunkte und des Theilungskreises, ihrer Wichtigkeit für die praktische Perspective entsprechend, mehr hervorgehoben.

§ 15 soll dem Literaturverzeichnisse nach eine neue Construction für entsprechend gleiche Strecken in $\overline{\wedge}$ Reihen enthalten. Ref. findet nur den algebraischen Ausdruck für dieselben, wie in der zweiten Auflage.

§ 18 enthält Relationen, welche sich auf die zu den Doppelelementen in $\overline{\wedge}$ Strahlenbüscheln symmetrischen Elemente und die Rechtwinkelpaare beziehen. Eine besondere Figur mit sämmtlichen benutzten Buchstaben dürfte die Uebersicht wohl sehr erleichtern.

§ 20, 14 enthält eine zweckmässige Construction der Involution aus zwei einander entsprechenden Elementenpaaren mit Hilfe des vollständigen Vierecks, § 35, 8 eine solche des Krümmungshalbmessers eines Kegelschnittes im Genre der Pascal-Brianchon'schen.

§ 53 — der orthogonalen Projection angehörig — führt die Affinitätsaxen als Doppelstrahlen $\overline{\wedge}$ Strahlenbüschel auf* u. s. w.

Die folgenden Theile dürften, sofern der Schluss vom Bekannten auf zu Erwartendes gestattet ist, ebenfalls viel des Interessanten bringen.

Hannover. Dr. Carl Rodenberg.

---

**Die Elemente der projectivischen Geometrie.** Von Dr. Emil Weyr, o. ö. Professor an der k. k. Universität Wien. Erstes Heft: Theorie der projectivischen Grundgebilde erster Stufe und die quadratischen Involutionen. Mit 58 Holzschnitten. Wien 1883, Wilhelm Braumüller.

Das Werk ist in erster Linie für die Hörer der Vorträge des Verfassers bestimmt, wird sich aber voraussichtlich durch seine Klarheit und durchweg wissenschaftliche Strenge auch weitere Kreise erschliessen.

Folgende Uebersicht des Inhalts wird den Lehrgang charakterisiren.

Einleitung. Perspectivische Lage der geometrischen Grundelemente. Eintheilung der Grundelemente.

I. Capitel: Bestimmung der Elemente der Grundgebilde erster Stufe. Theilverhältnisse in den Punktreihen, im Strahlen- und Ebenenbüschel. Harmonische Elemente. — II. Capitel: Das Doppelverhältniss. — III. Capitel: Vollständige Figuren. Harmonische Eigenschaften des vollständigen Vierseits und des vollständigen Vierecks. — IV. Capitel:

---

* Ich benutze diese Gelegenheit, um eine Ungenauigkeit in meiner Recension von Reuschle's „Deckelementen" zu berichtigen. Daselbst hatte ich nur die Affinitätsaxen, d. h. jene Geraden, deren Projectionen sich decken, als bekannt bezeichnet. In der That finden sich aber schon in der zweiten Auflage des vorliegenden Werkes die übrigen Deckelemente, wenn auch nicht in ihrer principiellen Bedeutung erwähnt. Vergl. §§ 46; 47, 10, 14; 49, 5; 50, 8, 9; 54, 4, 5.

Die Sätze von Carnot und Ceva für ebene und räumliche Polygone. — V. Capitel: Die perspectivische Raumansicht. Betrachtung der unendlich fernen Elemente. — VI. Capitel: Reciprocitätsgesetz und Elementenbestimmung in den Grundgebilden höherer Stufe. – VII. Capitel: Perspectivische Gebilde. — VIII. Capitel: Projectivische Gebilde. — IX. Capitel: Aehnliche und congruente Gebilde. — X. Capitel: Conlocale projectivische Gebilde. Doppelelemente. Die unendlich fernen Kreispunkte. Der imaginäre Kugelkreis. — XI. Capitel: Der Kreis. Doppelverhältniss von vier Punkten und Tangenten. Polareigenschaften. Kreisvierecke. Mittelpunkt und Durchmesser. — XII. Capitel: Die Involutionen. — XIII. Capitel: Allgemeinere Auffassung der Projectivität. Das Doppelverhältniss, ausgedrückt durch Werthe eines eindeutigen Parameters. Zwei Projectivitäten auf einem Träger. — XIV. Capitel: Cyklische Projectivität. — XV. Capitel: Harmonische Mittelpunkte eines Tripels. Harmonische Mittelpunkte ersten und zweiten Grades und deren Verwandtschaft. Harmonische und äquianharmonische Quadrupel. — XVI Capitel: Rechnungsoperationen mit Theilverhältnissen.

Der Verfasser wird sicher im Vortrage nicht versäumen, die Studirenden auf die späteren Anwendungen der behandelten Beziehungen zwischen den Grundelementen aufmerksam zu machen, um damit zunächst eine ungefähre Vorstellung ihrer ausserordentlichen Wichtigkeit den Anfängern beizubringen. Einige diesbezügliche Worte im Buche würden sicher geeignet sein, das Interesse des Lesers an der Sache bedeutend zu erhöhen.

Ein paar Kleinigkeiten, die uns aufgefallen sind, wollen wir nicht unerwähnt lassen.

Auf S. 5 wird der Raum irrthümlich als dreidimensional, auch in Bezug auf die Gerade als Raumelement angeführt. Die dortigen Auseinandersetzungen über die Zahl der Elemente bedürfen einer Correctur.

Die Methode zur Herstellung der perspectivischen Lage eines Strahlenbüschels und eines ihm projectivischen Ebenenbüschels (S. 74) möchten wir nicht adoptiren. Es wird zu dem Endzweck ein Ebenenbüschel construirt, von dem drei (und dann alle) Ebenen dieselben Winkel miteinander bilden, wie die entsprechenden Strahlen des Strahlenbüschels. Hierbei ergiebt sich die Axe des gesuchten Ebenenbüschels als Schnittlinie zweier Kegelflächen zweiter Ordnung, welche eine Erzeugende gemein haben. Aber diese Flächen sind noch gar nicht behandelt, und es ist insbesondere nicht einzusehen, dass eine Axe existirt. Diese Beweise könnten allerdings nachgetragen werden, aber der Uebelstand einer unbequemen constructiven Verwendbarkeit der Methode würde bleiben. Das bekannte Verfahren mit Benutzung der entsprechenden rechten Winkel ist übrigens ja einfach genug.

Hannover. Dr. Carl Rodenberg.

**Die Elemente des graphischen Rechnens**, mit besonderer Berücksichtigung der logarithmischen Spirale. Eine Anleitung zur Construction algebraischer und transcendenter Ausdrücke für Bau- und Maschinentechniker, sowie zum Gebrauche an höheren Gewerbeschulen. Von ANTON STEINHAUSER, k. k. Professor an der Staatsgewerbeschule in Wien. Wien 1885, Alfred Hölder. 8 Bogen gr. 8°. Preis 2 Mk. 80 Pf.

Der Herr Verfasser behandelt in dem vorliegenden Werkchen unter der Voraussetzung elementarer mathematischer Kenntnisse die Grundoperationen des graphischen Rechnens in klarer, leicht verständlicher Sprache. Derselbe geht davon aus, dass eine Zahl durch das Verhältniss zweier Strecken darstellbar ist, führt die Multiplication, Division u. s. w. mit Hilfe eines rechtwinkligen Axenkreuzes durch, giebt eine recht praktische Construction für das Ausziehen dritter Wurzeln, verwendet zum Ausziehen beliebiger Wurzeln die Potenzcurven von Joseph Schlesinger. Hierauf entwickelt er die Operationen mittels der logarithmischen Spirale, was nicht, wie gewöhnlich, ungenügend, sondern sehr eingehend auf das Wesen der Curve geschieht, indem er, unter Ausschluss höherer analytischer Hilfsmittel, seinen Auseinandersetzungen die Gleichung $\varrho = b^{\frac{\varphi}{180}}$ zu Grunde legt, wobei $b$ den nach einer Drehung um 180° auf $\varrho_0$ folgenden Fahrstrahl bedeutet, abgesehen von der Krümmung, die hauptsächlichsten Eigenschaften dieser Curve zuerst durchsichtig erläutert. Die Spirale wird sodann in verschiedener Weise verzeichnet, ohne specielle Bedingung, bei gegebenem Längenverhältnisse zweier um den Polarwinkel $\pi$ differirender Leitstrahlen, durch Berechnung der Fahrstrahllängen für gegebene Polarwinkel und Auftrag dieser Längen mittels des Transversalmaassstabes. Darauf wird das graphische Rechnen mit dieser Curve vorgeführt. Ein weiterer Abschnitt ist den arithmetischen und geometrischen Reihen erster Ordnung gewidmet, im letzteren Falle wieder auf die logarithmische Spirale zurückkommend, und der Zinseszinsenrechnung. Hieran schliesst sich die graphische Darstellung von Verhältnissen und Proportionen. Die Auflösung der Gleichungen ersten und zweiten Grades mit einer und mehreren Unbekannten fehlt nicht. Auch der Grundoperationen mit imaginären Zahlen wird gedacht. Der Abschnitt über die goniometrischen und cyclometrischen Functionen gegebener Winkel hat einen Anhang, welcher sich mit der Rectification des Kreises, der Messung und Construction eines gegebenen Winkels mittels der Sehnenlänge befasst. Das Letztere geschieht auf Grund der Formel $a = 2r \sin\frac{\alpha}{2}$, wo $\alpha$ den fraglichen Winkel, $a$ die zum Bogen vom Radius $r$ gehörige Sehne zwischen den Winkelschenkeln bedeutet, und ist die erforderliche Sehnentabelle für einen Halbmesser von fünf Einheiten berechnet. Den Schluss des Ganzen bildet das Wichtigste über die Berechnung ebener Flächen. Die Anwendung des

Vorgetragenen auf Mechanik etc. ist unterblieben, was bisher bei solchen Abhandlungen immer geschah.

Der Herr Verfasser hat die Grundoperationen, indem er nur wenige Constructionsmethoden, dem Zwecke entsprechend, anführte, in möglichst gedrängter und dabei durchsichtiger Form gegeben. Dadurch ist der Lernende an der Hand seines Buches in den Stand gesetzt, sich (auch ohne Lehrer) mit den Elementen des graphischen Rechnens ohne unnützen Zeitaufwand vertraut zu machen.

Lediglich um für diesen Gegenstand ein höheres Interesse schon jetzt zu erwecken, gestatte ich mir unter der Mittheilung, dass ich gegenwärtig das geometrische Rechnen einer eingehenden Bearbeitung unterziehe, welche Arbeit ausschliesslich für Hochschulen bestimmt ist und in einiger Zeit veröffentlicht werden wird, einige weitergehende Bemerkungen.

Das graphische Rechnen ist nur ein Theil des geometrischen Rechnens, des Rechnens mit Strecken und Punkten, nämlich derjenige Theil, welcher sich mit den Operationen im einpoligen, linearen Strecken- oder Zahlensysteme zu befassen hat. Bisher legte man dem graphischen Rechnen nicht die Bedeutung bei, welche ihm in der That zukommt. Es handelt sich nicht mehr darum, nur den Inhalt einer gegebenen Fläche oder eines gegebenen einfachen Körpers graphisch zu bestimmen; vielmehr ist es unsere Aufgabe, nach Methoden zu suchen, durch welche auf einfachem Wege zusammengesetzte, gesetzmässige algebraische und transcendente Ausdrücke bequem graphisch berechnet werden können, indem dasselbe ein Hilfsmittel zur Construction von Curven ist, für welche sich durch ihre Gleichungen keine einfachen geometrischen Gesetze angeben lassen. Derartige Curven sind z. B. zu verzeichnen, wenn es sich um die Construction der Curven der Beschleunigungscentra sich bewegender Systeme handelt. Ein einfaches Beispiel hierfür findet der Leser in meiner Sammlung von Problemen für die analytische Mechanik, Bd. I S. 412 flgg.

Auch die Gleichungen höheren Grades bedürfen der graphischen Lösung. Herr Professor Reuschle hat bereits eine graphisch-mechanische Methode zur Auflösung der numerischen Gleichungen veröffentlicht. Derselbe benutzt parabolische und hyperbolische Curven, die auch bei dem graphischen Potenziren eine Rolle spielen, construirt aber diese Curven nach der gewöhnlichen Methode, was durch rein geometrisches Verfahren bequemer geschieht, und nimmt nur auf die reellen Wurzeln Rücksicht. Die goniometrischen Relationen spielen auch eine Rolle im graphischen Rechnen, welches an den Gleichungen $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$ und $y = a\sqrt{1-b^2} \pm b\sqrt{1-a^2}$ sofort erkannt werden kann. Herr Josef M. Šolin hat einen Beitrag zur graphischen Integration schon im Jahre 1872 geliefert. Das graphische Differentiiren und Integriren harrt seiner Ausbildung. Ist die Gleichung $y = f(x)$ einer Curve gegeben, dann ist es möglich, auch die Differentialquotienten $y'$, $y''$, ... für

die ganze Curve durch weitere Curven darzustellen, Curven für ihre Tangentenlänge, Normalenlänge u. s. f. zu verzeichnen, wodurch namentlich der Anfänger ein klares Bild von dem Wesen der fraglichen Function erhält, was leicht auf arithmographischem Wege geschehen kann.

Heidelberg, im Februar 1885. FERDINAND KRAFT.

---

**Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie** mit Anwendungen auf praktische Geometrie und sphärische Astronomie und zahlreichen Uebungsbeispielen. Zum Gebrauch in höheren Lehranstalten und beim Selbstunterricht bearbeitet von E. HAMMER, Professor am kgl. Polytechnikum in Stuttgart. Stuttgart 1885, Verlag der J. B. Metzler'schen Buchhandlung. X, 312 S.

Wenn wir das uns vorliegende Buch geradezu als ein Musterwerk bezeichnen, dem wir die weiteste Verbreitung wünschen und hoffen, so möchten wir diesen Ausspruch unserer innigsten Ueberzeugung nicht gern wieder einengen. Wir fürchten aber auch eine solche Auslegung nicht für den Zusatz, den wir beifügen, die höheren Lehranstalten, an deren Schüler und Lehrer Herr Hammer sich richtet, seien doch wohl solche, welche über den sogenannten Mittelschulen stehen. Studirende an Universitäten und Polytechniken, das sind nach unserem Dafürhalten die richtigen Leser für diese Trigonometrie, welche die darin herrschende Vollständigkeit, die Strenge der angewandten Beweisführungen, die Vortheile der gelehrten praktischen Rechnungsvorschriften zu würdigen im Stande sind. Wende man uns nicht ein, diese jungen Leute hätten Anderes zu thun, als Trigonometrie zu lesen. Einer gewöhnlichen Schultrigonometrie werden sie allerdings ihre Zeit nicht widmen, aber so gut Vorlesungen über Trigonometrie — wir sprechen aus eigener Erfahrung — Zuhörer finden können, ebenso gut wird es dem Buche des Herrn Hammer nicht an Lesern fehlen, wie wir sie bezeichneten. Sie werden sich nicht daran stossen, dass S. 28 dem directen Nachweise des Satzes, dass $tg\frac{\alpha}{2}$ und $cotg\frac{\alpha}{2}$ stets dasselbe Vorzeichen wie $sin\,\alpha$ haben, eine indirecte Ableitung der Gleichung $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1-cos\,\alpha}{sin\,\alpha}=\frac{sin\,\alpha}{1+cos\,\alpha}$ vorgezogen ist, bei welcher die Zweideutigkeit einer Quadratwurzel vernachlässigt ist, beiläufig der einzige Verstoss gegen die Strenge, der uns aufgefallen ist. Sie werden auch den Luxus des Accents bei dem Namen Legendre, so oft derselbe wiederkehrt, verzeihen. Sie werden dagegen mit Vergnügen S. 23 den auf der Umwandlung geradliniger Coordinaten in einander und in Polarcoordinaten beruhenden Beweis des allgemeinen Additionstheorems der Winkelfunctionen, sowie S. 211 die durchaus ähnlich geführte allgemeine Ableitung der Grundgleichung der sphärischen Trigono-

metrie kennen lernen. Verweilen werden sie bei dem ganzen 3. Capitel des I. Abschnittes, das den goniometrischen Gleichungen gewidmet ist, verweilen S. 97 flg. bei der Maskelyne'schen Regel, S. 215 bei dem nicht allgemein giltigen, aber sehr eleganten Beweis der schon erwähnten Grundgleichung der sphärischen Trigonometrie mittels eines aufgeklappten Dreikants, verweilen bei den im 3. und 4. Capitel des III. Abschnittes vereinigten Aufgaben aus der Geodäsie und Astronomie.

Wo der eine oder andere Leser noch ausserdem besonderes Vergnügen empfinden mag, das beruht ja auf persönlicher Geschmacksverschiedenheit, aber Vergnügen dürfen wir Jedem versprechen, der mit diesem Buche sich näher bekannt macht.

CANTOR.

---

**Die Elemente der Arithmetik als Vorbereitung auf die Functionentheorie.** Von Dr. MAX SIMON, Oberlehrer am Lyceum zu Strassburg. Strassburg 1884, R. Schultz' & Comp. Verlag. VII, 77 S.

Ein dem Referenten geläufiger Satz, den er in verschiedenen geschichtlichen Untersuchungen bestätigt fand, ist der von der conservativen Kraft der Unwissenheit. Anders ausgedrückt besagt derselbe, dass es immer eine verhältnissmässig lange Zeit gebraucht hat, bis wissenschaftlich Erkanntes zum Volkseigenthum wurde. Der Schule im Allgemeinen ist die Aufgabe gestellt, diese Verbreitung des geistigen Vermögens Einzelner unter der Gesammtheit zu vermitteln, und je besser die Schule wird, um so rascher geht die Verbreitung vor sich. Ein treffendes Beispiel solcher Beschleunigung bieten, wie wir mit einigem berechtigten Stolze rühmen dürfen, die neuesten deutschen Lehrbücher der Geometrie wie der Arithmetik. Die Schulgeometrie nimmt bereits Dinge in sich auf, die vor einem halben Jahrhundert noch wenigen Synthetikern bekannt waren, wenn sie überhaupt schon entdeckt waren, und heute liegt uns eine Schularithmetik vor, welche sich nicht scheut, auf Untersuchungen von solcher Feinheit einzugehen, dass sie seither Universitätsvorlesungen vorbehalten blieben, und zwar solchen, deren Zuhörer die ersten Studiensemester schon hinter sich hatten. Hat Herr Simon damit einen glücklichen Griff gethan? Giebt es Gymnasialprimaner — denn nur an solche Schüler ist selbstverständlich zu denken —, welche fähig sind, bei dem mit ihnen vorzunehmenden Wiederholungsgange der Zahlenlehre die strengen Beweise neuester Forschung zu verstehen und denselben Interesse abzugewinnen? Wir sind zweifelhaft, wie die Erfahrung, die allein berechtigt ist, auf diese Fragen zu antworten, sich darüber aussprechen wird. Herr Simon selbst theilt wohl diese Zweifel. Darauf weist uns der Satz seines Vorwortes hin, das Heft sei bestimmt „hauptsächlich für Collegen und Studirende, dann aber auch für die Schüler der obersten Classe“. Lassen wir aber diese Letzteren bei Seite, so können wir, ohne

jede weitere Erfahrung abzuwarten, das kleine Schriftchen mit vollem Einverständniss auf's Wärmste empfehlen. Studirenden, welche Functionentheorie zu hören beabsichtigen, dürfte hier eine fesselnde und fruchtbare Einleitung in die ihnen neue Lehre sich bieten, welche sie zugleich zum Lesen der Abhandlungen von Herrn Georg Cantor vorbereitet und sie auf dieselben hinweist. Wenn Herr Simon in einigem Gegensatze zu unserem Namensverwandten den Begriff der Grenze als ererbt und in diesem Sinne als erfahrungsmässig gegeben und einer weiteren formalen Begründung nicht mehr bedürftig ansieht, so sind wir die Letzten, die ihm einen Vorwurf daraus machen möchten. Einen Auszug aus einem selbst schon so knapp gehaltenen Büchelchen zu geben ist kaum thunlich. Wir bemerken nur, dass die Entwickelung bis zu der Lehre von den Exponentialfunctionen, diese mit eingeschlossen, geführt ist, dass ein Fortschreiten bis zur Lehre von den Gleichungen höherer Grade nur als daran gescheitert bezeichnet wird, dass noch kein elementarer Beweis des Gauss'schen Fundamentalsatzes der Algebra bekannt sei. Wir möchten einige Stellen als solche hervorheben, die uns ganz besonders zusagten. Dazu gehört der Name Theileinheit Nr. $n$ (S. 17), unter welchem die Ergänzung der Reihe der ganzen Zahlen zur Reihe der Brüche ergänzt wird; dazu die Betonung des verschiedenen Sinnes, welchen wir mit dem Gleichheitszeichen verbinden (S. 19, 24, 42); dazu den Beweis des Satzes, dass die nicht ganzzahlige positive $n^{te}$ Wurzel einer ganzen positiven Zahl als Reihenzahl existire (S. 37 flgg.); dazu das ganze Capitel XI von den quadratischen Gleichungen (S 45—50) und in ihm der Ausblick auf Umkehrungsprobleme (S. 48). Nicht einverstanden sind wir mit der Benennung der beiden Sätze (S. 10 und 30) als Grundsätze. Grundsätze sind solche, deren Wahrheit als einleuchtend angenommen werden muss, weil sie nicht bewiesen werden kann. In diesem Sinne ist es aber weder wahr, dass die neuen Zahlen jeweil den Gesetzen der alten unterworfen bleiben, noch dass zu gewissen Vorstellungsreihen, welche an sich keinen Abschluss haben, ein Abschluss zu denken sei. Beides sind Forderungen, wenn man sie nicht geradezu Definitionssätze nennen will. Leicht zu verbessernde Druckfehler sind uns nur S. 35 Z. 11 und S. 45 Z. 17 aufgefallen.

Cantor.

---

**System der Arithmetik und Algebra** als Leitfaden für den Unterricht in höheren Schulen. Von Dr. Hermann Schubert, Oberlehrer an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Potsdam 1885, Verlag von August Stein. VIII, 222 S.

Wir haben in dieser Zeitschrift, hist.-lit. Abth. zu Bd. XXVIII S. 199 und zu Bd. XXIX S. 114, über eine in zwei Heften erschienene Sammlung von arithmetischen und algebraischen Fragen und Aufgaben des gleichen

Verfassers berichtet. Nicht minder lobend als wir, haben auch andere Stimmen über jene Schrift sich geäussert, so dass an Herrn Schubert die Aufforderung gelangte, der Einführbarkeit seines Buches an Lehranstalten, an welchen andere Aufgabensammlungen in Uebung sind, welche nicht verdrängt werden können oder wollen, dadurch Vorschub zu leisten, dass er den Text von den Uebungsbeispielen trenne. Der vor uns liegende Band erfüllt nun diesen Wunsch. Hat auch das Buch dadurch von der Eigenartigkeit eingebüsst, welche ihm unserem Dafürhalten nach zur Zierde gereichte, so ist doch Strenge und Fasslichkeit unverändert geblieben. Erstere dürfte noch einen Zuwachs zu rühmen haben, da der neue Abdruck als eine zweite Auflage zu betrachten ist, in welcher einzelne kleine Ausstellungen, welche gemacht worden waren, Berücksichtigung gefunden haben.

CANTOR.

---

**Die Determinanten**, für den ersten Unterricht in der Algebra bearbeitet Dr. H. KAISER in Dieburg. Wiesbaden 1885, Verlag von J. F. Bergmann. 23 S.

Wir haben Bd. XXVIII, hist-lit. Abth. S. 77, eine kleine Schrift über Determinanten des gleichen Verfassers angezeigt, welche in ihren Anforderungen an den Leser schon recht niedrig gehalten war. Heute überbietet sich Herr Kaiser. Auf annähernd halbem Raume giebt er einige Sätze über Determinanten, die kaum die Vorkenntnisse eines Gymnasialtertianers voraussetzen. Vielleicht steht uns noch ein Büchelchen „Die Determinanten zur Einübung des Einmaleins in der Volksschule" von zwölf Seiten bevor! Im Ernste meinen wir, so sehr wir der Einführung der Determinanten in den Gymnasialunterricht geneigt sind, der aber schon nicht mehr das Wort zu reden, da sie an den meisten Orten bereits erfolgt ist, man könne doch auch in der Popularisirung zu weit gehen. Den mathematischen Unterricht leicht machen ist recht, ihn allzuleicht und mechanisch machen widerspricht seinen pädagogischen Zwecken.

CANTOR.

---

**Neuer Unterricht in der Schnellrechen-Kunst** für technische, kaufmännische und Schulpraxis in zwei Theilen. I. Theil: Methode der symmetrischen Multiplication, Division und Wurzelausziehung. II. Theil: Anweisung zum Gebrauch eines auf diese Methode gegründeten Rechenapparates. Von C. JUL. GIESING, Oberlehrer an der königl. Realschule Döbeln. Döbeln 1884, Verlag von Carl Schmidt. VI, 92 S. und in demselben Verlage: **C. J. Giesing's Patent-Rechenapparat.**

Symmetrische Multiplication nennt der Verfasser nach dem Vorgange von Herrn E. Gallati (1878) dasjenige Verfahren, welches spätestens im

VI. Säculum als Vajrâbhyâsa bei den Indern bekannt war und welches sich in Europa, besonders in Italien bis in das XVI. Säculum zu erhalten wusste. Von da an verlor sich allmälig die Uebung, und nur das Rechnen mit Reihen, die nach Potenzen einer allgemeinen Grundgrösse fortschreiten, wusste sich des alten Verfahrens zu erinnern, beziehungsweise erfand dasselbe wiederholt, wenn es, $(a_0+a_1x+\ldots).(b_0+b_1x+\ldots)=c_0+c_1x+\ldots$ und $c_n=b_na_0+b_{n-1}a_1+\ldots+b_0a_n$ setzend, die Regel gab, man solle die Glieder des Multiplicators in umgekehrter Reihenfolge auf einen besondern Zettel schreiben und denselben unter dem Multiplicandus herschieben, dabei die jedesmalige Productenstelle durch Vervielfachung der senkrecht unter einander befindlichen Factoren und Addition ihrer Theilproducte bilden. In dieser Form lernte Referent die auch an Zahlen geübte Methode in den Vorlesungen über algebraische Analysis kennen, welche er im Wintersemester 1849—50 bei Professor M. Stern in Göttingen zu hören Gelegenheit hatte. Mag auch inzwischen durch Werke geschichtlichen Inhalts die Aufmerksamkeit auch in weiten Kreisen auf jenes alte Verfahren gelenkt worden sein, für die Schule blieb es so ziemlich verschollen, und wir würden uns freuen, wenn Herrn Giesing's Buch und sein patentirter Rechenapparat — eine Schiefertafel, in welcher ein Streifen verschiebbar ist und den vorerwähnten besondern Zettel vertritt — zur allgemeinen Einbürgerung führen möchte. Herr Giesing lehrt nach der symmetrischen Multiplication auch eine symmetrische Division. Das ist das Verfahren, welches Fourier in seiner Analyse des équations déterminées p. 187 (Paris 1830) als geordnete Division beschrieb und welches in ziemlich zahlreiche Elementarwerke, aber wieder nicht in den Schulunterricht Eingang zu finden vermochte. Endlich benützt der Verfasser seinen Apparat, also den Schieber, der das Wesen desselben bildet, zur Ausziehung von Quadratwurzeln.

CANTOR.

---

**Beitrag zur analytischen Behandlung der Umhüllungscurven.** Von WILH. KRIMPHOFF. Coesfeld 1885. 16 S. 4°.

Bei Anwendung Cartesischer Punktcoordinaten sehen wir in den aufeinanderfolgenden Punkten einer Curve Durchschnitte gegebener linearer Gebilde, bei Liniencoordinaten erkennen wir in demselben Berührungspunkte mit jeweil gegebenen Geraden. So ist an sich klar, dass das natürliche Coordinatensystem zur Behandlung von Umhüllungsaufgaben nur das der Liniencoordinaten sein kann. Herr Krimphoff hat sich in seinem Programm deren bedient, und zwar der von Herrn Schwering erfundenen und in einem bekannten Buche (vergl. Referat in hist.-lit. Abthlg. dieser Zeitschrift Bd. XXIX S. 233) genauer auseinandergesetzten Abart. Herr Krimphoff hat nun allerdings nicht durchweg Schwering'sche Liniencoordinaten angewandt, und wir rechnen ihm dieses als Verdienst an. Wahre

Eleganz besteht nicht in dem unentwegten Verbleiben auf demselben Pfade, sondern in dem Benutzen des jedesmal Zweckdienlichsten, mag auch ein Wechsel der Hilfsmittel damit verbunden sein. So treten bei unserer Vorlage die Liniencoordinaten nur da, dann aber auch immer ein, wo die Gleichung der Geraden, welche die gesuchte Curve umhüllen soll, in Punktcoordinaten bereits gegeben ist. Hauptaufgabe ist ihm die Auffindung und Discussion der Umhüllungscurven gewisser Sehnen centraler Kegelschnitte. Allein nebenbei beweist er noch eine ziemliche Anzahl interessanter Sätze von Kegelschnitten selbst, so den Joachimsthal'schen Satz (Salmon-Fiedler, Kegelschnitte, S. 307 und nicht 327, wie irrig citirt ist), dass für die vier Schnittpunkte einer Ellipse oder einer Hyperbel mit einem Kreise die Summe der Argumente gleich Null sein muss. Herrn Krimphoff's mehr algebraischer als geometrischer Beweis ist sehr hübsch. Die Correctheit des Druckes lässt leider Manches zu wünschen übrig, und wenn die Irrthümer in den Formeln auch leicht zu verbessern sind, so stören sie darum nicht minder.

CANTOR.

---

**Histoire des sciences mathématiques et physiques.** Par M. MAXIMILIEN MARIE, répétiteur de mécanique, examinateur d'admission à l'école polytechnique. Tome IV: De Descartes à Huyghens. 246 pages. Tome V: De Huyghens à Newton. 255 pages. Paris, Gauthier-Villars imprimeur-libraire. 1884.

Wieder sind zwei Bände des umfangreich angelegten Werkes in unseren Händen. Descartes, Cavalieri, Roberval, Fermat, Torricelli, Wallis, Pascal, Huyghens, Newton sind die Namen derjenigen Mathematiker, welchen der Verfasser den meisten Raum widmet, sich dadurch in Uebereinstimmung mit der Anerkennung setzend, welche Zeitgenossen und Späterlebende diesen Männern mit Recht widmeten. Herr Marie hat — das geht aus der ganzen Darstellung zweifellos hervor — die Schriften dieser Männer gelesen und, wie es bei seiner von Niemand verkannten mathematischen Bedeutung nur natürlich war, auch zu verstehen gewusst, so viele Schwierigkeiten ihm manchmal der durchaus ungewohnte Wortlaut bereiten mochte. Er ist nicht der Einzige, dem diese Schwierigkeit sich darbot, nicht der Erste, der sie überwand, und hätte er in der mathematisch-geschichtlichen Literatur neuerer Sprachen Rundschau gehalten, so hätte er vielleicht manche Mühe erspart. Im Ganzen finden wir nichts von den Worten zurückzunehmen, mit welchen wir Bd. XXIX, hist.-lit. Abthlg. S. 45, den Bericht über die beiden ersten Bände schlossen: „Wir hoffen auf Besseres in den späteren Bänden, in welchen Herr Marie sich mit Schriftstellern zu beschäftigen haben wird, deren Werke er selbst gelesen hat."

Bei dem Lesen der Werke eines Schriftstellers bilden sich fast unbewusst Neigungen und Abneigungen, über die kaum zu rechten ist. So hat Herr Marie, wie es scheint, eine grössere Vorliebe für Descartes, als für Fermat gefasst, während Referent in entgegengesetztem Sinne Licht und Schatten zu sehen sich gewöhnt hat. Dadurch sind unsere Anschauungen von dem Charakter des Jesuitenzöglings Descartes einander sehr widersprechend, die mathematische Grösse des Verfassers der analytischen Geometrie bewundern wir gleichmässig. Mögen auch Vorstufen in der analytischen Geometrie von Diesem und Jenem erreicht worden sein, ein wirkliches Operiren mit den Gleichungen einer Curve hat vor Descartes Niemand der Oeffentlichkeit übergeben. Andererseits hüte man sich aber wohl, in dessen Geometrie ein Lehrbuch modernen Schnittes zu vermuthen, ausgehend von der Gleichung der Geraden, daran anknüpfend die Gleichungen des Kreises, des Kegelschnittes u. s. w. Descartes schrieb absichtlich scheinbar planlos, ungeordnet und dadurch schwer, weil, wie er in einem Briefe sich ausdrückt, die Leute Dinge, die sie verstehen, nicht als neu anzuerkennen pflegen. Diese mangelnde Ordnung macht es sogar dem heutigen Leser schwer, sich zurecht zu finden, und Herr Marie hat vielleicht nur ihretwegen übersehen oder hervorzuheben vergessen, was eines der wichtigsten Verdienste von Descartes ist: die Erfindung der Methode der unbestimmten Coefficienten, gerade so, wie er bei Pascal die Nennung der von diesem erfundenen Beweismethode von $n$ auf $n+1$ vermissen lässt. Auch die Anfänge der Wahrscheinlichkeitsrechnung mussten, sei es bei Pascal, sei es bei Huyghens, in einer annähernd den Weg dieser Erfinder veranschaulichenden Weise zur Kenntniss der Leser gebracht werden, und dass unter den zahlentheoretischen Arbeiten von Fermat gerade das Theorem nicht genannt ist, welches die Unmöglichkeit der Gleichung $x^n = y^n + z^n$ mit ganzzahligen Wurzeln betrifft, sofern $n > 2$, während der Sonderfall $n = 3$ (IV, 105 letzte Zeile) erwähnt ist, kann einigermassen erstaunen.

Wir haben nur diese grossen Lücken aufdecken wollen; kleinere Mängel beabsichtigen wir nicht zu betonen, wozu der IV. Band sehr häufig, der V. Band etwas seltener Gelegenheit böte. Es handelt sich weniger oft als in den früheren Bänden um Unrichtigkeiten, vielmehr meistens nur um Vernachlässigung bedeutsamer Dinge, und was Herr Marie an Auszügen liefert, ist, wenn nicht immer vollständig, doch für die wichtigsten Schriften namentlich von Huyghens und Newton richtig.

Cantor.

# Bibliographie

vom 16. Februar bis 30. April 1885.

---

### Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Classe der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften. Jahrg. 1884, Heft 4. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

—. Jahrg. 1885, 1. Heft. Ebendas. 1 Mk. 20 Pf.

Sitzungsberichte der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, mathem.-physikal. Classe. 1884, I und II. Leipzig, Hirzel. 2 Mk.

Sitzungsanzeiger der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, mathemat.-naturwissenschaftl. Classe. Jahrgang 1885, Nr. 1—4. Wien, Gerold. compl. 3 Mk.

Annalen des physikalischen Centralobservatoriums; herausgeg. von H. Wild. Jahrg. 1883, Thl. 1 u. 2. Petersburg und Leipzig, Voss. 25 Mk. 60 Pf.

Archiv der Mathematik und Physik, begründet von Grunert, fortgesetzt von R. Hoppe. 2. Reihe, 2. Theil (4 Hefte), 1. Heft. Leipzig, Koch. compl. 10 Mk 50 Pf.

Acta mathematica, herausgeg. v. Mittag-Leffler. 5. Jahrg. 1885, 1. Heft. Berlin, Mayer & Müller. compl. 12 Mk.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgeg. von C. Ohrtmann. 14. Bd., Jahr 1882, 2. Heft. Berlin, G. Reimer. 6 Mk.

Astronomische Nachrichten, herausgeg. v. A. Krüger. 111. Bd. Nr. 2641. Hamburg, W. Mauke Söhne. compl. (24 Nrn.) 15 Mk.

Fortschritte der Physik im Jahre 1879. (35. Jahrg.) Redig. v. Neesen. 1. Abth. Berlin, G. Reimer. 8 Mk.

Die Fortschritte der Physik. Nr. 8, 1884. Köln, Mayer. 2 Mk.

Meteorologische Zeitschrift der deutschen meteorolog. Gesellschaft, redig. v. W. Köppen. 2. Jahrg. 1885 (12 Hefte). 1. Heft. Berlin, Asher & C. compl. 16 Mk.

Gezeitentafeln für das Jahr 1886. Hydrogr. Amt der kaiserl. Admiralität. Berlin, Mittler. 1 Mk. 60 Pf.

Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Redig. von L. Fröhlich. 2. Bd. (Juni 1883—Juni 1884). Budapest und Berlin, Friedländer & S. 8 Mk.

**Reine Mathematik.**

Lüroth, J., Ueber die kanonischen Perioden der Abel'schen Integrale. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

Biermann, O., Ueber die singulären Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen. (Akad.) Wien, Gerold. 25 Pf.

Gegenbauer, L., Ueber das quadratische Reciprocitätsgesetz. Ebendas. 20 Pf.

——, Zahlentheoretische Studien. Ebendas. 1 Mk.

Kraus, L., Die Functionaldeterminanten. Ebendas. 30 Pf.

Weiss, E., Entwickelungen zu Lagrange's Reversionstheorem mit Anwendung auf die Lösung der Keppler'schen Gleichung. Ebendas. 60 Pf.

Hecht, W., Zur Integration der Differentialgleichung $Mdx + Ndy = 0$. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 20 Pf.

Gegenbauer, L., Ueber das Legendre-Jacobi'sche Symbol. (Akad.) Wien, Gerold. 45 Pf.

Igel, B., Ueber ein simultanes System dreier binärer cubischer Formen. Ebendas. 1 Mk. 20 Pf.

Pick, G., Ueber die Modulargleichungen der elliptischen Functionen. Ebendas. 25 Pf.

Bork, H., Untersuchungen über das Verhalten zweier Primzahlen in Bez. auf ihren quadratischen Restcharakter. (Dissert.) Berlin, Gärtner. 1 Mk.

Serret, A., Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Deutsch bearb. von A. Harnack. 2. Bd., 1. Hälfte: Integralrechnung. Leipzig, Teubner. 7 Mk. 20 Pf.

Schubert, H., System der Arithmetik und Algebra. Potsdam, Stein. 1 Mk. 80 Pf.

Schendel, L., Grundzüge der Algebra nach Grassmann's Principien. Halle, Schmidt. 2 Mk. 50 Pf.

Schurig, R., Lehrbuch der Arithmetik. 3. Theil. Leipzig, Brandstetter. 6 Mk. 40 Pf.

Bobek, K., Ueber die Flächen IV. Ordnung mit einem Doppelkegelschnitte. 1. u. 2. Mitth. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk. 60 Pf.

Escherich, G. v., Die Construction der algebraischen Flächen aus den sie bestimmenden Punkten. Ebendas. 50 Pf.

Hočevar, F., Bemerkungen zur Simpson'schen Methode der mechanischen Quadratur. Ebendas. 30 Pf.

Herbig, W., Lehrbuch der geometrischen Formen. Berlin, Herbig. 7 Mk.

Hoch, J., Lehrbuch der ebenen Geometrie. 2. Thl. Halle, Schmidt. 1 Mk. 75 Pf.

Hammer, E., Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Stuttgart, Metzler. 3 Mk. 20 Pf.

Peschka, V., Darstellende Geometrie. 4. Bd. Wien, Gerold. 21 Mk.

HOFFMANN, G., Anleitung zur Lösung planimetrischer Aufgaben mit Beispielen. Leipzig, Fues. 1 Mk. 40 Pf.

LAMPE, E., Geometrische und mechanische Aufgaben zur numerischen Auflösung von Gleichungen höherer Grade. (Diss.) Berlin, Gärtner. 1 Mk.

LEBOULLEUX, L., Traité élémentaire des déterminants. Genf, Stapelmohr. 2 Mk. 40 Pf.

## Angewandte Mathematik.

KRAFT, F., Sammlung von Problemen der analytischen Mechanik. 7. u. 8. Lief. Stuttgart, Metzler. 4 Mk.

WEYRAUCH, J., Aufgaben zur Theorie elastischer Körper. Leipzig, Teubner. 8 Mk.

FINGER, J., Elemente d. reinen Mechanik. 4. Lief. Wien, Hölder. 3 Mk. 60 Pf.

NEUMANN, F., Vorlesungen über theoretische Optik; herausgeg. v. E. DORN. Leipzig, Teubner. 9 Mk. 60 Pf.

KRAMER, A., Allgemeine Theorie der zwei- und dreitheiligen astronomischen Fernrohr-Objective. Berlin, G. Reimer. 10 Mk.

WEBER, L., Curven zur Berechnung der von künstlichen Lichtquellen indicirten Helligkeit. Berlin, Springer. 1 Mk. 40 Pf.

SCHOUTE, H., Einige Bemerkungen über das Problem der Glanzpunkte. (Akad.) Wien, Gerold. 60 Pf.

HAERDTL, F. v., Bahnbestimmung des Planeten „Adria". 3. Thl. Ebendas. 4 Mk.

BRUHNS, C., Astronomisch-geodätische Arbeiten für die europäische Gradmessung im Königreich Sachsen. 3. Thl.: Astronomische Arb., herausgegeben v. TH. ALBRECHT. 2. Heft. Berlin, Friedberg & Mode. 12 Mk.

ALBRECHT, TH., Bestimmungen der Länge des Secundenpendels in Leipzig, Dresden und dem Abrahamschachte bei Freiberg. Ebendas. 5 Mk.

LAUNHARDT, W., Mathematische Begründung der Volkswirthschaftslehre. Leipzig, Engelmann. 6 Mk.

WITTWER, W., Grundzüge der Molecularphysik und der mathematischen Chemie. Stuttgart, Wittwer. 5 Mk.

BOUSSINESQ, J., Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques. Paris, Gauthier-Villars. 18 Frs.

MATTHIEU, E., Théorie du potentiel et ses applications à l'électrostatique et au magnétisme. I. partie. Ebendas. 6 Frs.

## Physik und Meteorologie.

WEYRAUCH, J., Das Princip der Erhaltung der Energie seit Rob. Mayer. Zur Orientirung. Leipzig, Teubner. 1 Mk.

SCHREIBER, P., Beitrag zur Frage der Reduction von Barometerständen auf ein anderes Niveau. Leipzig, Engelmann. 1 Mk. 20 Pf.

KAHLBAUM, A., Siedetemperatur und Druck in ihren Wechselbeziehungen. Leipzig, Barth. 10 Mk.

Roth, F., Die Sonnenstrahlung auf der nördlichen Erdhälfte im Vergleich mit derjenigen auf der südlichen. Halle, Schmidt. 50 Pf.

Exner, K., Ueber die durch zahlreiche, unregelmässig vertheilte Körperchen hervorgebrachten Beugungserscheinungen. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk.

Fleischl, E. v., Die Deformation der Lichtwellenfläche im magnetischen Felde. Ebendas. 40 Pf.

Wiedemann, G., Ueber die Bestimmung des Ohm. Berlin, Dümmler. 4 Mk. 50 Pf.

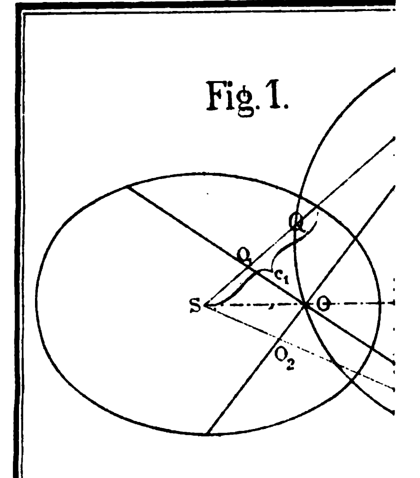
Strecker, K., Ueber eine Reproduction der Siemens'schen Quecksilbereinheit. München, Franz. 1 Mk. 60 Pf.

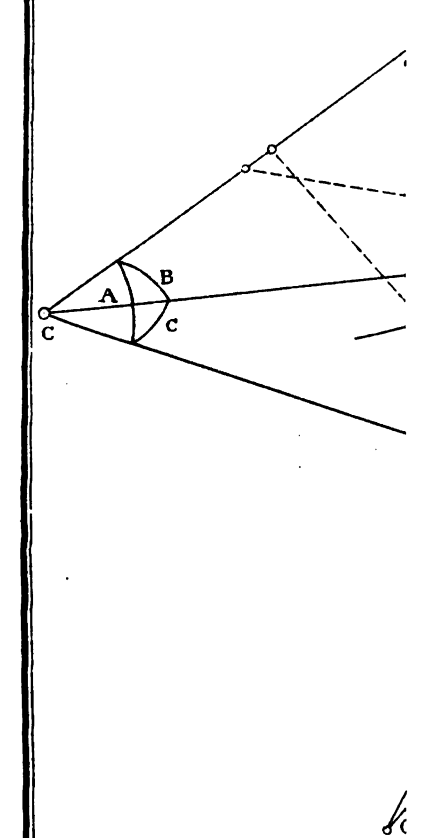
Wiedemann, G., Die Lehre von der Elektricität. 4. Bd. 1. Abth. Braunschweig, Vieweg. 15 Mk.

Kleyer, A., Lehrbuch des Magnetismus und des Erdmagnetismus. Stuttgart, Mayer. 6 Mk.

Tait, P., Wärmelehre, deutsch von E. Lecher. Wien, Toeplitz & Deuticke. 8 Mk.

Klein, J., Ergebnisse rationeller Prüfungen von Wetterprognosen. Halle, Schmidt. 50 Pf.






en-
.ei-

XXX,
:ische
ıtität,
laran
. hat,
rden.
u ge-

aus-
XVI
. An-
inem
dass
r des

ız.

w of
ersity
pag.
sich
kann
auf
wel-
glei-
ichte,
ische

ROTH
r
EXNE
C

FLEIS
I
WIED

STRE
k
WIED
s
KLEY
g
TAIT,

KLEI
g

# Historisch-literarische Abtheilung.

## Recensionen.

**Bemerkung zu dem von Herrn Nebel über mein Buch: „Das Potential und seine Anwendung zur Erklärung der elektrischen Erscheinungen" abgegebenen Referate.**

Herr Nebel sagt am Schlusse seines Referates (diese Zeitschrift XXX, 2. Heft S. 62): „Dem Ganzen ist noch ein kleiner Theil über elektrische Einheiten beigegeben. Der Verfasser giebt die Definitionen der Quantität, des Potentials etc. nach elektrostatischem Maasse und fügt unmittelbar daran die in der Praxis üblichen Maasseinheiten, so dass es den Anschein hat, als ob diese Einheiten dem elektrostatischen Maasssystem angehören würden. Die Tabelle der Stromeinheiten ist der Fehler wegen mit Vorsicht zu gebrauchen."

Ich muss vor Allem constatiren, dass diese Bemerkungen sich ausschliesslich auf das zu meinem Buche nicht gehörige Blatt S. XV und XVI beziehen, welches von Herrn Hartleben ohne mein Wissen im Anschluss an das Sachregister hinzugefügt wurde. Dass dieses Blatt zu meinem Buche nicht gehört, hätte Herr Nebel schon daraus ersehen können, dass dasselbe sich in sehr vielen Büchern der elektrotechnischen Bibliothek des Herrn Hartleben vorfindet.

Prag. Dr. O. Tumlirz.

---

**A short history of Greek mathematics** by James Gow, M. A. fellow of Trinity College, Cambridge. Edited for the syndics of the university press. Cambridge 1884. At the university press. XVI, 323 pag.

Die Literatur keines Volkes entbehrt heute der Werke, welche sich mit culturgeschichtlichen Untersuchungen beschäftigen; am wenigsten kann man der englischen Literatur den Vorwurf der Lückenhaftigkeit auf diesem Gebiete machen, ihr, welcher Whewell, welcher Buckle, welcher Lubbock, Tylor und andere Gelehrte gleichen Ranges und gleicher Richtung angehören. Auch dem besondern Theile der Culturgeschichte, der als Geschichte der Mathematik zu bezeichnen ist, haben englische

Schriftsteller erfolgreiche Mühe zugewandt. Was die Herren Allman, Glaisher, De Morgan, Ch. Taylor für verschiedene Capitel unseres Lieblingsfaches geleistet haben, ist von Allen, welche deren Arbeiten kennen zu lernen Gelegenheit hatten, anerkannt und geschätzt; aber hier ist eine Schattenseite: die zuletzt genannten Schriftsteller, mit Ausnahme von Herrn Taylor, dessen Introduction to the ancient and modern geometry of conics (vergl. diese Zeitschrift Bd. XXVII, hist.-lit. Abth. S. 87 flgg.) als selbständiges, mit einer längeren Einleitung versehenes Werk auch in das Ausland drang, haben ihre geschichtlichen Abhandlungen für solche Zeitschriften und Sammelwerke verfasst, die dem festländischen Leser kaum je unter die Augen kommen, es sei denn, dass freundliche Beziehungen zu den Verfassern ihn in den Besitz von Sonderabdrücken setzten. Herr Gow wollte diesem engeren Bekanntwerden, welches, wie wir es für das europäische Festland zu bestätigen im Stande waren, auch für Grossbritannien selbst stattzufinden scheint und welches als eine unliebsame Folge mangelndes Interesse der Leser an dem behandelten Gegenstande nach sich zieht, für seinen Theil ein Ende setzen, indem er einen ganzen Band der Geschichte der griechischen Mathematik widmete. Herr Gow ist nicht Mathematiker, sondern Philologe, aber er hat auf seinem Studiengange gleich allen Engländern die griechische Mathematik, insbesondere die griechische Geometrie hinlänglich genau kennen gelernt, um, von seinen Sprachkenntnissen getragen und unterstützt durch Vorarbeiten von Mathematikern, die Originalliteratur einer Durchmusterung unterwerfen zu können, von deren Genauigkeit einige Stellen des Bandes zeugen, wo er zu Ergebnissen gelangt, die von den in den Vorlesungen des Referenten veröffentlichten abweichen, während allerdings in den meisten Fällen Herr Gow mit unseren Auffassungen einverstanden erscheint. So schmeichelhaft eine solche Uebereinstimmung für uns ist, so fürchten wir doch, sie theilweise auf den Umstand zurückführen zu müssen, dass Herr Gow diejenigen Abhandlungen, welche nach dem Erscheinen unserer Vorlesungen und, dürfen wir vielleicht uns rühmen, infolge derselben zur Veröffentlichung gelangten, nicht kennen lernte und deshalb auch nicht berücksichtigte.

Wir haben hierbei vorzugsweise die glänzenden Arbeiten von Herrn Paul Tannery im Auge, welche bald in der Revue archéologique, bald in den Annales de la Faculté des lettres de Bordeaux und in den Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, bald in der Revue philosophique, bald und hauptsächlich in neuester Zeit in dem Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques (unter Mathematikern oft Bulletin Darboux genannt) erschienen. Wohl mehr als 30 grössere und kleinere Aufsätze des unermüdlichen geistvollen Gelehrten sind in unseren Händen. Fast überall handelt es sich um Dinge, in welchen Herr Tannery unsere Ansichten nicht theilt, und wir haben immer mit Vergnügen seine liebenswürdigen, von Rechthaberei fernen Angriffe gelesen, welchen

er den Charakter des Angriffs so vollständig zu nehmen weiss; wir haben stets aus diesen Abhandlungen gelernt, auch da, wo es ihrem Verfasser nicht gelang, uns zu seiner Meinung zu bekehren. Leider haftet diesen Abhandlungen der gleiche Mangel an, welchen wir von englischen Arbeiten betonten. Mag das Bulletin Darboux, die Revue archéologique, vielleicht die Revue philosophique von grösseren Bibliotheken gehalten werden, die beiden in Bordeaux erscheinenden Sammlungen dürften nur in sehr wenigen Exemplaren ihren Weg ins Ausland finden, so dass man eine Veröffentlichung in denselben nur mit halber Oeffentlichkeit begabt nennen kann. Vielleicht sehen es unsere Leser deshalb nicht ungern, wenn wir einige wichtige Ergebnisse Tannery'scher Forschung über griechische Mathematik hier zusammenstellen, wobei wir die zeitliche Folge der Persönlichkeiten, um welche es sich handelt, unserer Aufzählung zu Grunde legen.

Thymaridas (Annal. Faculté lettr. Bord. 1881), der Erfinder der unter dem Namen Epanthem bekannten Auflösungsmethode von Gleichungen, ist der als T. von Paros bezeichnete Pythagoräer, der, wenn auch nicht zu den unmittelbaren Schülern des Pythagoras, doch zu den älteren Gliedern der Schule gehörte. Ihm wird nämlich auch die Erfindung der Benennung geradliniger Zahlen für Primzahlen zugeschrieben, und das muss früher als zur Zeit Platon's gewesen sein, denn

Speusippos (Annal. Faculté lettr. Bord. et Toulouse 1883), der Neffe Platon's, schrieb schon über diese *ἀριθμοὶ γραμμικοί*, wie aus einer für die Geschichte der Mathematik noch nicht verwerthet gewesenen Stelle der Theologoumena hervorgeht.

Der heilige Hippolytos (Bullet. Darboux T. VI, 1882) bezeugt gegen Ende des II. S. p. C. in einer gleichfalls unbenutzt gebliebenen Stelle, dass zu seiner Zeit das Wort Pythmen den Sinn des Restes hatte, welcher bei Division einer Zahl durch 9 oder auch durch 7 übrig bleibt. Offenbar ist hier eine unverkennbare Spur der Neuner- und der Siebenerprobe vorhanden, und zwar wird die erforderliche Rechnung als Pythagoräisch bezeichnet. Wie weit diese Auffassung geschichtlich rückverfolgbar, und ob schon den Pythmenes des Apollonius die gleiche Tragweite beizulegen ist, darüber möchten wir mit einiger Vorsicht schweigen.

Diophant hat Herrn Tannery den Gegenstand zu zwei Abhandlungen geboten (Bullet. Darboux T. III, 1879 und T. VIII, 1884). In der ersten Abhandlung untersuchte er die Zeitverhältnisse des grossen Alexandrinischen Algebraikers und gelangte zu dem Ergebnisse, er müsse um die Mitte des III. S. gelebt haben. Ihre Hauptstütze hat diese Behauptung allerdings nur in Weinpreisen, welche in einer einzigen Aufgabe (V, 33) vorkommen und welche eine solche Höhe ausser in der genannten Zeit kaum je zu einer überhaupt in Frage tretenden Zeit erreicht haben dürften. Da aber mit dieser Annahme auch die Verfassung des bekannten Epigramms über die Lebensdauer des Diophant durch Metrodorus in Ein-

klang steht, welche bei der bisher landläufigen Annahme unüberwindliche Schwierigkeiten bereitet, so sind wir sehr geneigt, Herrn Tannery zuzustimmen. Weniger sagt uns die in der zweiten Abhandlung verfochtene Behauptung zu, dass doch mehr von Diophant verloren gegangen sei, als man seit Nesselmann anzunehmen sich gewöhnt hat. Die Lehre von den unbestimmten Aufgaben mit ganzzahligen, nicht blos mit rationalen Auflösungen, die Lehre von den Seitenzahlen rechtwinkliger Dreiecke, die befreundeten Zahlen, Untersuchungen über die Unmöglichkeit der Gleichung $x^3+y^3=z^3$ und über die sogenannte Pell'sche Aufgabe scheinen Herrn Tannery genügenden Stoff für die verloren gegangenen Bücher zu bieten. Unsere Bedenken richten sich dahin, ob nicht damit zuviel den Griechen zugewiesen werden will, und wenn Diophant mehr Compilator als Erfinder war — ein Zugeständniss, welches wir Herrn Tannery auch nicht zu machen vermögen —, woher flossen die Quellen, aus welchen er schöpfte? Waren es griechische Quellen, uns bis auf die Erwähnung von solchen verloren? Waren es gar indische, und nähert sich Herr Tannery der Meinung Hankel's von dem fremdländischen Ursprunge der Diophantischen Algebra? Diesen Zweifeln wird unser gelehrter Freund sicherlich in der Vorrede zu der Diophant-Ausgabe Rede stehen, welche er nach seiner ausdrücklichen Erklärung vorbereitet, und, gestehen wir es offen, diese Erklärung war uns das Liebste in der eben berührten Abhandlung.

Sporus von Nicäa (Annal. Faculté lettr. Bord. 1882) wird von Herrn Tannery an das Ende des III. S. gesetzt, und zwar als Verfasser einer Sammlung Ἀριστοτελικὰ κήρια, in welcher mannigfache Auszüge auch aus mathematischen Schriften sich fanden, welche später von Pappus, von Simplicius, von Eutokius benutzt wurden.

Serenus von Antissa (Bullet. Darboux T. VII, 1883) soll im IV. S. zwischen Pappus und Hypatia seinen Platz finden. Nach Pappus wird er gesetzt, weil er seiner eigenen Aussage nach einen Commentar zu den Kegelschnitten des Apollonius schrieb, der noch nicht vorhanden gewesen sein könne, als das VII. Buch des Pappus entstand. Andererseits ist er doch zu wissenschaftlich, um ihn als der Zeit des Hyppatia angehörig betrachten zu können.

Domninus von Larissa (Bullet. Darboux T. VIII, 1884), ein Mitschüler des Proclus, unter welchem er auch nach dem Tode des gemeinsamen Lehrers Syrianus an der Athener Hochschule thätig war, hat eine Arithmetik verfasst, welche längst durch Boissonade (Anecdota Graeca IV, 413—429) im Druck herausgegeben und von Mathematikern nie untersucht worden ist. Herr Tannery hat dieser Mühe sich unterzogen und die unterscheidenden Merkmale gegen Nikomachus hervorgehoben.

Mit dieser Aufzählung sind keineswegs alle Leistungen des französischen Geschichtskundigen erschöpft, es sind auch keineswegs überall alle Gründe hervorgehoben, durch welche er seine Ansichten zu stützen weiss; es ist

vielmehr nur eine Art von Inhaltsverzeichniss, welches wir geben und aus welchem hervorgehen soll, dass eine ganze Anzahl von Gegenständen neuerdings der Forschung erschlossen ist, welche man nicht mehr das Recht hat mit Schweigen zu übergehen und welche sicherlich auch Herr Gow besprochen haben würde, wären die betreffenden Aufsätze zu seiner Kenntniss gelangt. Hat er doch die leichter zu beschaffenden und nicht minder wichtigen Arbeiten unsers dänischen Fachgenossen Heiberg seinen Zwecken fast überall dienstbar zu machen gewusst, wenn ihm auch die Auffindung des Namens von Archimedes' Vater Pheidias (*Φειδία δὲ τοῦ ἁμοῦ πατρός* Archimed ed. Heiberg II, 248, 8), welche Herrn Heiberg schon gelungen war, als Herr F. Blass (Astronomische Nachrichten CIV, 255) die gleiche Entdeckung selbständig und früher veröffentlichte, und einiges Andere entgangen ist.

Wollten wir Herrn Gow vorzugsweise Vorwürfe machen, so wäre es nicht schwer, aus seinem Buche Behauptungen zu sammeln, deren Rechtfertigung ihm kaum gelingen möchte. Das kann man ja bei jedem umfassenden Werke jedes Verfassers. Wir ziehen es vor, einige Eigenthümlichkeiten seines Werkes zu nennen, welche uns verdienstlich erscheinen. Herr Gow beschäftigt sich, wie es von dem Philologen nicht anders zu erwarten stand, eingehend mit den Zahlwörtern, und auch wer die Schriften von Pott genau kennt, wird hier Neues finden, wofür besonders Tylor's Primitive Culture als Quelle gedient zu haben scheint. Neu war uns z. B., dass für die Zwei von den Chinesen der Name der Ohren, von den Thibetanern der der Flügel, von den Hottentotten der der Hände gebraucht werde (S. 7), neu, dass der Drei die Bedeutung unbestimmt grosser Vielheit beiblieb, z. B. *τρισάθλιος*, *ter felix* als Ueberbleibsel aus einer Zeit, wo man nicht über 3 hinauszählte und den einzigen vorhandenen Zahlen auch die Sprachformen des Singular, Dual, Plural zugeordnet waren (S. 8). Auf die Frage, ob die Buchstabenzahlen von den Griechen zu den Hebräern gelangt seien oder umgekehrt, kommt Herr Gow wiederholt (S. 44, 46, 48) zu reden. Er entscheidet sich für den ersteren Weg, und zwar sei von einer eigentlichen Erfindung zu sprechen, welche im III. S. a. Chr. in Alexandria gemacht worden sei. Das Wort Gematria, welches eine Spielerei mit dergleichen Buchstabenzahlen bedeutet, sei selbst eine Umstellung aus *γραμματεία*. Eine Platonische Stelle, in welcher ausdrücklich ausgesprochen ist, dass die Gottheit stets geometrischen Regeln folge (*τὸν θεὸν ἀεὶ γεωμετρεῖν*), kennt Herr Gow so wenig wie Andere, wohl aber macht er (S. 173 Note 2) auf Rep. 527 B aufmerksam, wo es heisst, Geometrie richtig behandelt sei Kenntniss des Ewigen.

Wir wollen ferner nicht verfehlen, auf S. 187 Note 1 aufmerksam zu machen, wo ein nicht unwichtiger Irrthum verbessert ist, den wir uns (Vorlesungen I, 197) zu Schulden kommen liessen. Wohl kommt *τόπος* in dem Berichte des Eutokios über die Würfelverdoppelung des Archytas vor,

aber es ist gleichgiltig, ob dieses Wort dem Urtexte entnommen oder spätere Einschaltung ist, da es hier keinenfalls „geometrischer Ort“, sondern nur „Stelle“ bedeutet. Auch die allgemein angenommene Uebersetzung von τόπος ἀναλυόμενος = aufgelöster Ort widerstrebt Herrn Gow. Er behauptet vielmehr (S. 211 Note 1), τόπος bedeute hier wieder nicht geometrischer Ort, sondern Aufbewahrungsort, Schatzkammer; so komme das Wort häufig bei Aristoteles vor, so heisse Pappus VI, 1 τόπος ἀστρονομούμενος die Gesammtheit astronomischer Schriften, von denen in der Folge die Rede ist, so müsse also auch τόπος ἀναλυόμενος = *the treasury of analysis* gesetzt werden. Wir bemerken, dass auch Hultsch in dem Wörterbuche des III. Bandes seiner Pappus-Ausgabe, p. 114 col. 2 lin. 15—19, τ. ἀστρ. und τ. ἀναλ. zusammenstellt mit der Bedeutung *quidquid aliqua mathematicorum parte comprehenditur*. Deutsch wäre also dafür etwa zu schreiben „Sammelwerke analytischer Natur“.

Als eine der Geschichte der Erfindungen angehörende Thatsache, von welcher wir keine Kenntniss besassen, heben wir hervor (S. 237 Note 1), dass Archytas ausser der Schraube und dem einfachen Rad an der Welle auch das Kinderrasselchen erfand als nützliches Spielzeug, welches die Kinder verhindere, wirkliches Hausgeräthe zu zerbrechen.

Herr Gow kommt (S. 108 Note 1) auf die Abkürzungen zu reden, deren Diophant sich für die Unbekannte und für die Subtraction bediente. Er hält diese Zeichen für die Wiedergabe hieratischer Muster, die zu identificiren er freilich nicht vollständig im Stande sei. Wir wollen diese Möglichkeit gar nicht bestreiten, vielmehr auf die kleine Monographie des Herrn Léon Rodet, Sur les notations numériques et algébriques antérieurement au XVI[e] siècle. Paris 1881, chez Ernest Leroux, 80 pages, hinweisen, in welcher der gleiche Gedanke auf S. 37 flgg. sehr ausführlich durchgesprochen ist. Herr Rodet giebt dort die hieratischen Zeichen wirklich an, die Diophant copirt habe, wobei allerdings der Phantasie einiger Spielraum gelassen ist.

Schon Nesselmann hatte die Aufmerksamkeit auf gewisse Zahlzeichen gelenkt, die er bei Heilbronner, und dieser bei Hostus und bei Noviomagus angeführt fand und welche gewissen Astronomen gedient haben sollen. Dem Referenten gelang es, die Stelle bei Hostus aufzufinden, und Friedlein wies die Stelle bei Noviomagus nach, von der die Rede sein muss. Alle diese Angaben finden sich bei Herrn Gow (S. 64 Note 1). In einer brieflichen Mittheilung vom 21. März 1885 weiss nun Herr Gow jene Zeichen in noch beträchtlich frühere Zeit zurückzuverfolgen. Sie sind deutlich beschrieben bei Math. Paris, Chronica V, 285 (ed. Luard, Cambridge 1872—1883), mit der Bemerkung, Johann von Basingstoke habe dieselben in England eingeführt und sie selbst kennen gelernt *quando studuit Athenis*. John of Basingstoke aber starb 1252 und war etwa 1240 in Athen.

Der Satz des Menelaos, welcher die Grundlage der ganzen sphärischen Trigonometrie der Griechen und später der Araber bildete, giebt S. 292 Gelegenheit zu der Bemerkung, im Mittelalter sei dieser Satz mit arabischem Namen *regula catha* genannt worden, während später bei Michael Stifel der Name *regula sex quantitatum* sich finde. Herr Gow verweist für diese Namen auf Costard's Ausgabe der von Halley herrührenden Uebersetzung der Sphaerica aus einer hebräischen Uebertragung (Oxoniae 1758) S. 82. Dort ist in der That mit arabischen Lettern ein Wort abgedruckt, welches in der jetzt gebräuchlichen Transcription Al-ḳaṭṭâʿ heisst und Sector (hier mit Transversale zu übersetzen) bedeutet, mithin Regula ḳaṭṭâʿ oder, wie man nun schreiben mag, die Regel von der Transversalen. Costard giebt als seine Quelle für den Gebrauch von *regula catha* ein der Biblioth. Bodleiana angehörendes mehrbändiges handschriftliches Werk von Simon de Bredow an, welcher um 1350 *socius Mertonensis* war, d. h. *Fellow of Merton College* in Oxford. Wir sind in der Lage, auf eine im Druck herausgegebene, um anderthalb Jahrhunderte ältere Quelle zu verweisen, indem bei Leonardo von Pisa wiederholt von der *figura cata* und von der *figura chata* die Rede ist und damit nur der Satz des Menelaos gemeint sein kann.

Unsere Leser mögen die Bemerkungen, welche wir fast mehr zu als über Herrn Gow's Werk niedergeschrieben haben, als Zeichen des Interesses auffassen, mit welchem wir den Band studirt haben. Vielleicht finden sie in diesem Interesse selbst ein noch deutlicheres Lob des uns vorliegenden Buches, als es bis hierher von uns ausgesprochen worden ist.

Cantor.

---

**Der Begriff der Physis in der griechischen Philosophie.** Von Dr. E. Hardy. I. Theil. Berlin 1884, Weidmann'sche Buchhandlung. III, 229 S.

Dass Wörter dem Begriffswechsel unterliegen, dass sie je nach Zeit und Ort, wo, oder auch je nach der Persönlichkeit, durch welche sie benutzt werden, bald diese, bald jene Bedeutung annehmen, dafür giebt es zahllose Beispiele. Wir erinnern nur an Aether, an Salz u. dergl. Diesen verschiedenen Bedeutungen nachzuspüren, bedarf es einer unumschränkten Herrschaft über die gesammte Literatur, in welcher ein solches Wort vorkommt, und wem diese nicht in fast gleichem Maasse zu Gebote steht, der erscheint nicht berechtigt, anders als einfach berichtend über solche werthvolle, wichtige, aber ungemein schwierige Untersuchungen zu reden. Das ist unsere Lage gegenüber dem vorliegenden Bande, in welchem Herr Hardy den Bedeutungen nachforscht, welche das Wort φύσις in der Geschichte der griechischen Philosophie nachweislich besessen hat. Wir können ihn nicht widerlegen noch bestätigen, aber wir glauben doch das Vorhan-

densein seines Buches unseren Lesern wahrnehmbar machen zu müssen, sei es, dass unter ihnen wirklich befugte Richter, sei es, dass nur interessevolle Laien gleich uns dadurch auf die Quelle weiterer Belehrung hingewiesen werden. Von Thales bis Sokrates, Sokrates und Xenophon, Plato, Aristoteles lauten die Ueberschriften der vier grossen Abschnitte, in welche der Stoff von selbst sich gliederte. In der ersten Periode gebraucht Thales das Wort Physis für die gesammte Welt der äusseren Erscheinungen und deren Bewegung, Anaximander für das, was wir heute etwa Physik nennen. Empedokles nennt Physis in wissenschaftlicher Bedeutung, die mit der populären nicht zu verwechseln sei, Verbindung und Trennung. Die Pythagoräer sahen in Physis das geheimnissvolle Wesen der Zahl, den Grund- und Inbegriff aller Eigenschaften eines Dinges, Heraklit die Vernunftordnung, welche alle Gegensätze aufhebt, welche das Niederste und Höchste, sogar der Menschen Denken und Thun bestimmt. Besonders für den Menschen ist nun in den Hippokratischen Schriften, den echten wie den unechten, Physis der innere Grund der Wirksamkeit. Als Naturordnung erkannte auch Demokrit die Physis gegenüber von dem Nomos, dem Staatsgesetze, und dieser Gegensatz steigert sich nur noch bei Hippias. Das Naturgesetz, die Physis, ist dem Sophisten erfahrungsmässig gegeben, und ein Merkmal desselben ist es, dass jede Handlung gegen die Natur ihre Strafe unausweichlich mit sich führt, während das Menschengesetz umgangen werden kann, ohne dass die Strafe aus der Umgehung selbst hervorgehe. Aber die Physis bleibt erfahrungsmässig. Sie ist nicht als Sittengesetz vor und über der Erfahrung vorhanden. Zu dieser Höhe erhob sie und sich erst Sokrates in der zweiten Periode. Ihm wurde Physis der letzte Grund der Erscheinungen des sittlichen Lebens, ergänzungsfähig durch Erziehung, und darum seine Bemühungen um die Erziehung, um dieser willen die Verwerthbarkeit von Xenophon's Cyropädie für das behandelte Thema. Plato, der eine dritte Periode bildet, findet in der Physis die mustergiltige Form für das menschliche Schaffen; sie beruht auf dem Wissen. Endlich schliesst der Band mit der vierten Periode, der des Aristoteles. Hier tritt, mehr an Sokrates wieder anknüpfend, das Ethische neuerdings in den Naturbegriff zurück. Wir haben selbst die Empfindung, der auch eingeschränkten Aufgabe eines blos übersichtlichen allgemeinen Berichts, die wir uns gestellt haben, nur sehr mangelhaft genügt zu haben. Möge die Schwierigkeit des Gegenstandes uns zur Entschuldigung gereichen.

Cantor.

---

J. Dupuis, **Le nombre géométrique de Platon.** Paris 1881. 64 pages. — Seconde interprétation. Paris 1882. 32 pages. — Troisième Mémoire. Extrait de l'annuaire de l'Association pour l'encouragement des études grecques en France, augmenté de notes. Paris 1885. 56 pages. Libraire Hachette & Cie.

Die erste der drei in der Ueberschrift genannten Abhandlungen bot unserem gelehrten Freunde Herrn Fr. Hultsch Gelegenheit, sich gleichfalls mit der seit undenklicher Zeit übelberüchtigten Stelle in Platon's VIII. Buche vom Staate zu beschäftigen, und veranlasste so dessen Aufsatz, der im XXVII. Bande dieser Zeitschrift, hist.-lit. Abthlg. S. 41—60 abgedruckt ist. Herr Hultsch konnte mit dem Vorschlage des französischen Gelehrten, $21600 = 100(3^3 + 4^3 + 5^3)$ als die Lösung des mehr als zweitausendjährigen Räthsels anzuerkennen, sich nicht befreunden. Ebenso unbefriedigt war aber Herr Dupuis selbst. In einer zweiten Abhandlung liess er jene Zahl fallen, ohne jedoch dem Hultsch'schen Lösungsversuche 12960000 sich anzuschliessen. Er versuchte es vielmehr mit einer neuen, vorher noch nie vorgeschlagenen Zahl 760000. Heute kommt Herr Dupuis zum dritten Male auf die Stelle zurück, um seine Zahl 760000 mit neuen Gründen zu empfehlen. Referent steht der Frage ebenso skeptisch wie sonst gegenüber. Das letzte Wort scheint ihm immer noch nicht ausgesprochen. Was aber den Vorschlag der 76 Myriaden betrifft, so lehnen wir ihn einfach ab, und zwar aus dem gleichen Grunde, welchen Herr Hultsch am 9. November 1882 in einer von Herrn Dupuis (S. 21 u. 22) citirten Briefstelle aussprach. Im Platonischen Wortlaute kommen die Worte τρὶς αὐξηθεὶς vor. Herr Dupuis verlangt, τρίς solle hier als Ausdruck unbestimmter Vielheit gedeutet werden; man solle mithin setzen „sehr vermehrt", was in diesem besondern Falle identisch sei mit „120000mal". Das halten wir für durchaus unmöglich! Gewiss bedeutet τρίς recht oft eine unbestimmte Vielheit, und die von Herrn Dupuis S. 17—19 zusammengestellten Beispiele sind sehr gut gewählt, diese Bedeutung klar zu machen; aber dass τρίς eine unbestimmte Vielheit bedeuten könne mitten in einem arithmetischen Zusammenhange, mitten zwischen Zahlen, die jede ihre naturgemässe, bestimmte Bedeutung besitzen, das erscheint uns undenkbar. Wählen wir ein ähnliches Beispiel geometrischer Unbestimmtheit. „Die Knaben stellten sich um ihren Lehrer im Kreise auf", d. h. sie bildeten irgend eine in sich zurücklaufende krumme Linie, ob einen Kreis, ob irgend eine Eilinie, gleichviel. Nun aber lesen wir folgenden Satz: „Die Knaben bildeten zuerst in ihrer Reihenfolge eine Archimedische Spirale, dann eine Cissoide, zuletzt einen Kreis." Kann hier auch Kreis irgend eine in sich zurücklaufende krumme Linie bedeuten? Nach unserer Ueberzeugung unmöglich! Wo einmal mathematisch bestimmte Begriffe in einem Satzgefüge Eingang gefunden haben, können sie nicht mehr mit unbestimmtem Sinne dort gefunden werden wollen. So wenigstens ist unsere Ueberzeugung.

Cantor.

---

**Julius Klaproth's Schreiben an Alexander von Humboldt** über die Erfindung des Compasses. Aus dem französischen Original im Auszuge mitgetheilt von Dr. phil. Armin Wittstein. Leipzig 1885 bei T. O. Weigel. XII, 49 S.

In unserem schnelllebenden Jahrhundert ist man wohl berechtigt, die Frage aufzuwerfen, inwiefern historische Untersuchungen, vor mehr als 50 Jahren angestellt, es verdienen können, nicht nur überhaupt noch gelesen zu werden, vielmehr in neuem Gewande zu erscheinen? Herr Wittstein hat bezüglich des Klaproth'schen Schreibens von 1834 diese Frage bejaht und, so weit wir bei dem uns ziemlich weit abliegenden Gegenstande ein Urtheil uns zutrauen dürfen, auch bejahen können. Vielleicht ist seitdem der unbedingte Glaube an die Zuverlässigkeit chinesischer Aussagen etwas mehr ins Schwanken gekommen, hat man sich einigermassen gewöhnt, mehr das Datum solcher Aussagen selbst, als die fabelhaften Vergangenheiten, von denen dieselben berichten, zu beachten, um eine untere Grenze für die Verbreitung dieses oder jenes Wissens zu erhalten; aber auch Klaproth scheint in dieser Beziehung bereits mit gutem Beispiel vorangegangen zu sein und eine Kritik geübt zu haben, welche in ihrer Besonnenheit sich nicht mit der eines Gaubil u. s. w. in Vergleich bringen lässt. Der deutsche Bearbeiter mag den vernichtenden Rothstift noch an einzelnen weiteren Thatsachen benutzt haben, welche bei Klaproth noch Aufnahme gefunden hatten; Neues hinzuzufügen war er kaum je in der Lage, da der Gegenstand seit Klaproth keine fördernde Bearbeitung mehr gefunden hat. Nicht als ob Bertelli's gelehrte Untersuchungen kein neues Licht auf die Geschichte des Compasses im Mittelalter und in unserem Welttheile geworfen hätten, aber die ostasiatische Urgeschichte erscheint darum in durchaus unveränderten Zügen, wie Klaproth sie in seinem Briefe hinzeichnete, wie Ed. Biot sie in den vierziger Jahren bestätigte. Herr Wittstein liefert uns eine verbesserte und verringerte Ausgabe jener Schrift von 1834, welche er etwa auf ihren dritten Theil zurückführte. Nur um so zuverlässiger gestalten sich seine Angaben, und wir glauben auf seine Bearbeitung als auf eine zweite Quelle hinweisen zu dürfen, aus welcher man unbedenklich schöpfen kann.

Cantor.

---

**Gli scritti inediti di Leonardo da Vinci,** secondo gli ultimi studi per Antonio Favaro. Venezia 1885. Estr. dagli Atti del R. Istituto veneto di scienze, lett. e arti. Tomo III, serie VI. Tipografia di G. Antonelli. 62 pag.

Auf das Jahr 1886 hat das R. Istituto Lombardo, statutarisch dazu genöthigt, zum ersten Male den Preis Tomasoni für die beste Geschichte des Lebens und der Werke Leonardo's da Vinci ausgeschrieben. Der Begründer dieses Preises hätte, so meinen wir mit Herrn Favaro, des französischen Kochrecepts eingedenk sein sollen: „*Pour faire un civet de lièvre, il faut un lièvre.*“ Die Würdigung von Leonardo's Werken kann genauer, als sie von Venturi auf Grund handschriftlicher Studien gegeben

worden ist, erst dann erfolgen, wenn die Werke gedruckt vorliegen. Zwei Gelehrte, Herr Charles Ravaisson-Mollien in Paris, Herr Jean Paul Richter in London, haben den Anfang mit der Druckgebung gemacht. Auch darin stimmen wir Herrn Favaro durchaus bei, dass in erster Linie nur die Pariser Abdrücke, in ihrer photographischen Vollständigkeit die Handschriften vollständig ersetzend, brauchbar erscheinen. Auszüge, wie die Londoner Ausgabe sie bietet, geben nie den Schriftsteller selbst, sondern nur was einem Dritten wissenswerth erschien, und der Begriff des Wissenswerthen ist damit in allzu enge persönliche Grenzen eingeschlossen. Endlich unterstützen wir aus ganzem Herzen Herrn Favaro's Wunsch, Italien möge sich nicht von fremden Staaten überflügeln lassen und möge dafür Sorge tragen, dass der Codice Atlantico aufhöre, nur eine Zierde der Mailänder Ambrosiana zu sein, vielmehr im Drucke Gemeingut der Wissenschaft werde.

CANTOR.

---

**Die Entdeckung des Beharrungsgesetzes**, eine Studie zur Geschichte der Physik von Dr. EMIL WOHLWILL. Separatabdruck aus der Zeitschrift für Völkerpsychologie und Sprachwissenschaft. Weimar 1884, Hofbuchdruckerei. 163 S.

Die Bewegung dauert nur dadurch fort, dass das Bewegende mit dem Bewegten in Berührung bleibt, sei es in unmittelbarer Berührung, sei es in mittelbarer, indem die umgebenden Medien, Luft, Wasser u. dergl., die Eigenschaft besitzen, eine mitgetheilte Bewegung bewahren und weiter befördern zu können. Ausserdem ist aber die Kreisbewegung als solche eine von der Natur gegebene und darum unaufhörliche. So war die Lehre des Aristoteles, welche, wie dessen ganze Physik, die europäische Wissenschaft bis tief in das XVII. S. hinein beherrschte und in dem Satze der Aerzte: „*Cessante causa cessat effectus*“ unbewusst bis in unsere Tage hineinragt. Dieser Lehre schroff gegenüber steht das Gesetz der Beharrung: Die Wirkung jeder Ursache verharrt! Wie hat der Uebergang von dem einen zu dem andern Satze stattgefunden? Hat Galilei in urplötzlicher Entdeckungsweise die neue Lehre aufgefunden? Hat sie allmälig sich gebildet und kann man die Geschichte dieser Begriffsbildung verfolgen? Das ist die hochinteressante Frage, welche Herr Wohlwill sich gestellt und welche er beantwortet hat. In raschem Fluge führt er uns in die Zeit des Cusaners, welcher, wie in vielen Dingen, auch in der Bewegungslehre Zweifel an Aristoteles zu hegen und auszusprechen wagte. Bei Tartaglia und bei dessen Gegner Cardano finden wir die vermeintliche Erfahrungsthatsache, dass ein Geschoss beim Verlassen des Rohres zu Anfang mit zunehmender, dann mit abnehmender Geschwindigkeit sich bewege. Eine Erklärung einer so durchaus unwahren Erscheinung musste nothwendig falsch sein! Nun folgt Benedetti, der Entdecker der in der Berührungslinie

zur Bahn wirkenden Fliehkraft. Auch in der Bewegungslehre bricht er mit dem Altherkömmlichen. Nicht das umgebende Mittel giebt dem bewegten Körper erneuten Antrieb, er enthält vielmehr die Ursache der Bewegung in sich selbst. Diese Lehre übernahm Galilei und setzte sie in einer von ihm nicht zum Drucke bestimmten Schrift aus der Zeit zwischen 1589 und 1592 auseinander. Die Handschrift dieser Abhandlung setzt sich allerdings mit einem Abschnitte fort, in welchem die Galilei'sche Mechanik auf ihrem Höhepunkte nicht zu verkennen ist. Aber Herr Wohlwill hat gezeigt, dass hier Stücke sehr verschiedenen Alters nur zufällig vereinigt sind, dass jener Schlussabschnitt nicht vor dem 16. October 1604 entstanden sein kann. Galilei's Leistungen umfassen die ganze Mechanik. Das Beharrungsgesetz erkannte er zuerst auf der horizontalen Ebene. Es war zunächst nur eine Erweiterung des bereits von Aristoteles erkannten Sonderfalles; denn was anders als Beharrung ist es, wenn der Stagyrite die Ewigkeit der Kreisbewegung fordert? — Wie alsdann Galilei in richtiger Erkenntniss weiter und weiter ging, wie fast jedes einzelne Werk, welches er verfasste, einen allmäligen Fortschritt enthält, das ist der Inhalt der zweiten, grösseren Hälfte der Wohlwill'schen Schrift. Bei dem Reichthum an in derselben theils ausführlich behandelten, theils gestreiften Gegenständen ist es kaum thunlich, darüber zu berichten, ohne in hier unstatthafte Weitläufigkeit zu verfallen. Wir verweisen unsere Leser auf das Original, dessen Bedeutsamkeit in rechtes Licht zu setzen einzige Absicht dieser Anzeige war. Herr Wohlwill hat entschieden Recht daran gethan, eine Vereinigung der in drei verschiedenen Zeitschriftheften erschienenen Abhandlung zu veranlassen. Noch dankbarer wäre man ihm gewesen, wenn er auch eine Inhaltsübersicht hätte beifügen wollen; denn den leisen Vorwurf können wir ihm bei höchster Anerkennung des Geleisteten nicht ersparen, dass vollendete Uebersichtlichkeit seiner Anordnung nicht innewohnt.

Gewissermassen als Ergänzung zur hier angezeigten Abhandlung gestatten wir uns, auch auf einen Aufsatz von Herrn Fr. Poske, Der empirische Ursprung und die Allgemeingiltigkeit des Beharrungsgesetzes (Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie VIII, 4), mit nachfolgenden Bemerkungen von Herrn W. Wundt hinzuweisen.

Cantor.

---

**Histoire des sciences mathématiques et physiques** par M. Maximilien Marie, répétiteur de mécanique, examinateur d'admission à l'école polytechnique. Tome VI. De Newton à Euler (Suite). 258 pag. Paris, Gauthier-Villars imprimeur-libraire. 1885.

Erst S. 115 dieses Bandes haben wir über Bd. IV und V des Marie-schen Werkes berichtet, und schon wieder sind wir im Stande, einen neuen Band anmelden zu können. Er beschäftigt sich ziemlich ausschliesslich im

ersten Drittel mit den Principien von Newton, in den beiden letzten Dritteln mit den Aufsätzen von Leibnitz, welche leider nicht in den Originaldrucken oder in der neuen Gerhardt'schen Ausgabe, sondern in der durch massenhafte Druckfehler entstellten Dutens'schen Ausgabe studirt wurden, wodurch Herr Marie sich seine Arbeit nicht unbeträchtlich erschwerte. Die Aufgabe, welche er sich an der Hand der umfänglichen Auszüge, die er liefert, stellt, ist die Beantwortung der berühmten oder berüchtigten Streitfrage über die Erfinderrechte an der Infinitesimalrechnung. Herr Marie gelangt dabei zu folgendem Urtheilsspruche. Es steht geschichtlich fest, dass Newton bei Veröffentlichung seiner Principien die Fluxionsrechnung besass. Wüsste man aber davon nicht aus anderen Schriftstücken, die Principien selbst könnten nur die entgegengesetzte Meinung erwecken. Der Brief Newton's vom 24. October 1676 ist ein wahres Meisterwerk in der Kunst, seine Gedanken zu verhüllen, und aus ihm war ebenso wenig, wie aus den Principien ein Plagiat möglich. Leibnitz dagegen geht überall offen mit der Sprache heraus. Er feilt so wenig, dass es ihm auch auf einen Rechenfehler nicht ankommt. Die Methoden sollen bekannt werden, damit die Wissenschaft Nutzen davon ziehen könne; in wessen Garten die Früchte reifen, sei gleich, sagt er in liebenswürdiger Hingebung seiner Entdeckungen. So ist Leibnitzens Unschuld in zweifellosester Weise gesichert. Wir brauchen unseren Lesern nicht erst zu sagen, dass wir immer die gleichen Sätze verfochten haben, und wollen nur ganz gelegentlich auf eine Untersuchung in der Zeitschrift „Nord und Süd“ (Januar und Februar 1881) hinweisen, wo wir den Beweis geliefert haben, dass politische Gründe bei dem gehässig geführten und von der Londoner Königl. Gesellschaft ungerecht entschiedenen Streite in gewichtigem Maasse mitwirkten. Leibnitzens Briefwechsel, abgesehen von den Briefen an Oldenburg, hat Herr Marie noch nicht berücksichtigt. Wesentliche Verdienste, wozu wir den Anstoss zur modernen Coefficientenbezeichnung mittels einfacher und auch schon doppelter Indicirung rechnen, sind daher nicht berührt.

Cantor.

---

**Algebraische Untersuchungen nach Tschirnhausens Methode**, von Karl Hunrath. I. Programm des Gymnasiums zu Glückstadt, Ostern 1876. II. Programm des Gymnasiums zu Hadersleben, Ostern 1881. III. Programm des Gymnasiums und des Real-Progymnasiums zu Hadersleben, Ostern 1885.

Schon Cardano hat, wenn auch nur an dem besondern Falle der cubischen Gleichung, erkannt, dass die Substitution $y = b_0 + x$ unter nachträglicher zweckentsprechender Wahl der Constanten $b_0$ genüge, um aus der Gleichung $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ eine neue Gleichung in $y$ zu erhalten, in welcher ein Glied zwischen dem $n^{\text{ten}}$ und nullten Gliede fehlt.

Tschirnhaus hat in den Acta eruditorum für 1683 pag. 204 flgg. den grossen Schritt weiter gethan, mehr als nur ein Glied zum Wegfall zu bringen, indem er die Substitution $y = b_0 + b_1 x + x^2$ anwandte, in welcher zwei Constanten $b_0$ und $b_1$ zur zweckdienlichen Bestimmung vorkommen. Erst die neuere Zeit hat die ganze Tragweite dieses Tschirnhaus'schen Gedankens erkannt, und in dem bekannten Handbuche der höheren Algebra von J. A. Serret (deutsche Uebersetzung, Bd. I S. 346 flgg.) ist der allgemeine Gang jenes Substitutionsverfahrens in deutlichen Umrissen gezeichnet. Ein Anderes ist aber immerhin der allgemeine Gang, ein Anderes die Ausführung im Einzelnen, und Herr Hunrath, ein unerschrockener Rechner, dem kein noch so kraus gebauter Ausdruck Furcht einjagt, hat es in drei Schulprogrammen unternommen, die wirkliche Durchführung jenes Gedankens für Gleichungen bis zum fünften Grade einschliesslich kennen zu lehren. Er hat gezeigt, dass $y = b_0 + b_1 x + x^2$ die cubische sowie die biquadratische Gleichung zur Auflösung bringt, indem jene in eine rein cubische, diese in eine quadratische Gleichung übergeht, während die Bestimmung der vorher willkürlichen Constanten eine Gleichung niedrigeren Grades beansprucht. Er hat gezeigt, dass $y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + x^3$, wiewohl drei Constante in sich schliessend, nicht genüge, um im Allgemeinen die Beseitigung von drei Gliedern der umgeformten Gleichung zu sichern. Er hat endlich gezeigt, dass dieser letztere Zweck bei der Gleichung fünften Grades durch Jerrard's Substitution $y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4$ erreicht werde. Die vollzogenen Rechnungen sind, wie wir schon mit einem Worte andeuteten, sehr verwickelt, wenn auch nicht gerade schwer, und es mag recht zweckmässig sein, dass der Lehrer sich einmal überzeuge, wie ein Verfahren in der Ausübung doch gewaltig anders, als in der allgemeinen Schilderung aussieht.

Cantor.

---

**Nekrolog des königl. württembergischen Oberstudienraths Dr. Christian Heinrich v. Nagel.** Separatabdruck aus dem Correspondenzblatt f. d. Gel.- u. Realschulen Württembergs. 1884, Heft 1 u. 2. Tübingen 1884, Verlag und Druck von Franz Fues (L. Fr. Fues'sche Sortimentsbuchhandlung). 18 S.

Als Verfasser zeichnet sich am Schlusse der Abhandlung Herr Otto Krimmel. Er hat eine warm empfundene Schilderung des einfachen Lebensganges und der mathematischen wie pädagogischen Verdienste des württembergischen Schulmannes geliefert, die bei der auch in weiteren Kreisen anerkannten Bedeutung Nagel's ein mehr als nur lokalpatriotisches Interesse wachzurufen vermag. Nagel war am 28. Februar 1803 in Stuttgart geboren, hat gleich vielen Zeitgenossen Theologie als Hauptfach, Mathematik nebenbei aber als Lieblingsfach studirt. Er starb in Ulm am 26. October 1882. Sein Name bleibt in der Geometrie durch die Nagel'schen Punkte erhalten.

Cantor.

**Der christliche Kalender alten und neuen Stils,** in tabellarischer Form dargestellt von P. Schubring. Besonderer Abdruck aus den Jahrbüchern der königl. Akademie gem. Wissenschaften zu Erfurt. Neue Folge, Heft XII. Erfurt 1884, Druck von J. H. Cramer. 63 S. nebst 3 Beilagen. I. Immerwährender Kalender. II. Allgemeiner Ostervollmonds-Cyklus. III. Allgemeine Ostervollmonds-Tabelle für alten und neuen Stil.

Drei Zahlen, der Sonnenzirkel, die güldene Zahl, die Römer-Zinszahl, spielen in der Chronologie eine wichtige Rolle. Sie entsprechen dem 28jährigen Sonnencyklus, nach dessen Ablauf die Sonntage auf die gleichen Monatstage zurückkehren, dem 19jährigen Mondcyklus, nach welchem die Vollmonde auf die gleichen Monatstage zurückkehren, und endlich dem 15jährigen Indictionscyklus. Aus den drei genannten Cyklen bildet sich ein grosser Cyklus von $28.19.15 = 7980$ Jahren, der die Eigenschaften aller drei vereinigt. Diese grosse sogenannte Julianische Periode beginnt mit dem Jahre 4713 v. Chr. und das letzte Jahr ihrer ersten Vollendung wird das Jahr 3267 n. Chr. sein. Für das Jahr $i$ nach Christi Geburt ist demnach stets:

1) Sonnenzirkel $\equiv i + 4713 \,(mod\, 28)$ oder $\equiv i + 9 \,(mod\, 28)$,
2) Güldene Zahl $\equiv i + 4713 \,(mod\, 19)$ oder $\equiv i + 1 \,(mod\, 19)$,
3) Römer-Zinszahl $\equiv i + 4713 \,(mod\, 15)$ oder $\equiv i + 3 \,(mod\, 15)$.

Abänderungen verursachen nun die Schaltjahre, deren Einführung und Berechnung erst im Julianischen, dann im Gregorianischen Kalender als allgemein bekannt vorausgesetzt werden darf. Will man in irgend einem Jahre das Datum der beweglichen Kirchenfeste, insbesondere des Osterfestes ermitteln, so muss also die Kenntniss der genannten Zahlen, vornehmlich des Sonnenzirkels und der güldenen Zahl, vorausgehen, auf welche die ganze sogenannte Osterrechnung sich stützt. Man verschafft sich dieselben entweder durch die erwähnten Congruenzen, die mit Hilfe der nöthigen Abänderungen richtig gestellt wurden, oder in bequemerer Weise durch ein machinales Verfahren. Herr Schubring, von dessen chronologisch-wissenschaftlicher Thätigkeit im XXIX. Bande dieser Zeitschrift, hist.-lit. Abth. S. 180, die Rede war, hat die Aufgabe in der doppelten oben angedeuteten Art gelöst. Er hat in seiner Abhandlung die Berechnung jener wichtigen Zahlen gelehrt, er hat auch einen ungemein sinnreichen Apparat herzustellen gewusst, welcher durch einige Drehungen nach vollzogener Einstellung die Antwort auf die betreffenden Fragen abzulesen gestattet. Wir sind überzeugt, dass, wer Kalenderprobleme mehrfach zu lösen hat, sich an der Hand der Schubring'schen Belehrung bald auf einem Gebiete zu Hause fühlen wird, das immerhin zu den von Schwierigkeiten durchschnittenen gehört, wie sich schon daraus entnehmen lässt, dass Gauss es der Mühe werth hielt, sich auf demselben umherzutummeln.

Cantor.

**Kalender-Tabellen,** zusammengestellt von Dr. FELIX MÜLLER, Oberlehrer am königl. Louisengymnasium zu Berlin. Berlin, bei Georg Reimer. 1885. 8 S. und 3 Tafeln.

Dieselbe Aufgabe, welche Herr Schubring, wie wir in der vorausgehenden kurzen Besprechung gesagt haben, seine Leser lösen lehrt, hat auch Herr Müller behandelt. Ein wesentlicher Unterschied besteht nur darin, dass Herr Müller die Rechnung selbst als ausgeführt voraussetzt und sich begnügt, die praktische Benutzung der Tabellen zu lehren, welche er mit Zugrundelegung der Piper'schen Abhandlung über die Gauss'sche Osterformel (Crelle XXII) herzustellen sich die grosse Mühe gab. Herrn Schubring's Arbeit muss man verstehen, um sie anzuwenden; Herrn Müller's Tabellen kann man anwenden, ohne ihre Herstellung klar zu übersehen, ähnlich etwa wie man Logarithmentabellen benutzen kann und thatsächlich auf der Schule benutzen lässt, ohne dass der Schüler weiss, wie die Tabelle eigentlich entstanden ist.

CANTOR.

---

C. NEUMANN, **Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale.** Leipzig, Teubner. 1884.

Dass ein Werk, wie das vorliegende, in zweiter Auflage erscheint, ist schon an und für sich mit grosser Freude zu begrüssen. Muss doch die Theorie der Abel'schen Functionen als die schönste Frucht der neueren Mathematik bezeichnet werden. Wenn also ein Werk, welches sich die Einführung in diese Theorie zur Aufgabe setzt, zahlreichen Absatz findet, so ist das ein erfreulicher Beweis, dass die Theorie selbst in immer weiteren Kreisen bekannt und gepflegt wird. Auch war die erste Auflage als ein sehr brauchbares Hilfsmittel bekannt und geschätzt, und es wurde allgemein anerkannt, dass der Verfasser es verstanden habe, der Riemann'schen Theorie ihre Schwierigkeit zu nehmen und Jedem, der die Elemente der Differential- und Integralrechnung erfasst hat, das Verständniss zu ermöglichen. Die vorliegende zweite Auflage aber wird, daran zweifeln wir nicht, ihrem Zwecke noch weit besser dienen, da sie die Vorzüge der ersten Auflage beibehalten und denselben wesentliche neue hinzugefügt hat. Wenn das Vorwort zur ersten Auflage es als die Aufgabe des Werkes bezeichnete, die beiden in Riemann's Doctordissertation entwickelten Gedanken darzulegen, nämlich 1. die Definition einer Function durch gewisse Merkmale der Stetigkeit und Unstetigkeit, und 2. Ausbreitung einer Function auf einer mehrblättrigen Fläche: so trat in dem Werke selbst der zweite Gedanke, wenigstens räumlich, bedeutend mehr hervor als der erste und es wurde demselben in der Vorrede eine grössere Wichtigkeit beigelegt, als ihm nach der Ansicht vieler Mathematiker und, wie es scheint, nach der jetzigen Ansicht des Verfassers zukommt. Dagegen tritt dieser zweite Gedanke in der

neuen Auflage viel mehr zurück, und der erste Gedanke, die Bestimmung einer Function durch ihre charakteristischen Eigenschaften, wird bei der ganzen Behandlung bedeutend bevorzugt. Dadurch ist ein ganz neues Werk entstanden, welches nicht nur den Inhalt der ersten Auflage (bis auf die Umkehrung der elliptischen Integrale und sonstig öfters wohl mit einigen Kürzungen) in sich aufgenommen hat, sondern demselben auch neue Partien hinzufügt, so dass das Werk in der neuen Gestalt nicht nur den Anfänger ohne zu grosse Mühe in die genannte Theorie einführt, sondern auch dem Forscher werthvolle Bereicherungen der Functionentheorie bietet. Zwar wird Jeder, welcher mit den Untersuchungen des Herrn Weierstrass bekannt ist, es lebhaft bedauern, dass derselbe noch immer seine Grundzüge der Functionentheorie nicht veröffentlicht hat; namentlich glauben wir, dass das sechste Capitel, die Theorie der algebraischen Functionen, kaum etwas bringt, was nicht schon in den Weierstrass'schen Vorlesungen bewiesen wird; aber das darf uns nicht hindern, den Untersuchungen des Buches alle Anerkennung auszusprechen.

Der Verfasser hat es sich keineswegs zur Aufgabe gestellt, die äusserste Strenge in seinen Entwickelungen und Beweisen zu beobachten. Er meint, es komme weniger auf eine strenge Darstellung, als darauf an, dass die angegebenen Methoden die zur strengen Darstellung erforderlichen Mittel gewähren. Demnach hat er die Theorie in derjenigen Form zu conserviren gesucht, in welcher sie von Cauchy und Riemann gegeben ist. Er hat, worauf er selbst aufmerksam macht, manche fundamentalen Sätze in ungenauer Form angegeben, ohne die Bedingungen, unter denen sie gelten, erschöpfend aufzuzählen. Hierdurch glaubt er dem Anfänger das Verständniss erleichtert zu haben, während der Vorgeschrittene und an absolute Strenge Gewöhnte im Stande sei, „die in Rede stehenden Ungenauigkeiten leicht abzustreifen und die betreffenden Sätze in ihre wirklich correcte Gestalt zu versetzen". Letzteres möchten wir bezweifeln; wir erinnern den Verfasser an seine Polemik mit Herrn Schwarz (S. 411), die sich ebenfalls auf solche Bedingungen bezieht. Auch auf folgenden Umstand möchten wir aufmerksam machen: Im Werke selbst wird aus dem Satze, dass das Integral $\int f(z)\,dz$, hinerstreckt über die Begrenzung einer Fläche, auf welcher $f(z)$ überall stetig ist, stets gleich Null ist, gefolgert, dass auch die erste Ableitung auf der Fläche stetig ist; in der Vorrede heisst es umgekehrt: Das Cauchy'sche Theorem $\int\limits_{\mathfrak{A}} f(z)\,dz = 0$ scheint nur dann ein absolut strenges zu sein, wenn auf der Fläche $\mathfrak{A}$ ausser der Stetigkeit von $f(z)$ auch noch die von $f'(z)$ vorausgesetzt wird. Dieser Gegensatz zwischen dem Werke selbst und der Vorrede zeigt, dass es nicht leicht ist, die Ungenauigkeiten abzustreifen. Was dann aber die Rücksicht auf den Anfänger angeht, so hätte sich dieselbe mit den Anforderungen der

Strenge vereinigen lassen, wenn gewisse Partien äusserlich als für den Vorgeschrittenen bestimmt bezeichnet wären. Wir möchten jedoch ausdrücklich hervorheben, dass wir hiermit keinen Tadel gegen das Werk aussprechen wollen; wir sind dem Verfasser dankbar für das, was er uns bietet, ohne darüber zu rechten, was er uns hätte bieten können. Wenn wir aber einige leise Wünsche aussprechen dürfen, so möchten wir für die hoffentlich bald zu erwartende dritte Auflage die Aufmerksamkeit des Verfassers darauf richten, dass an solchen Stellen, wo ein genauer Ausdruck ebenso kurz und ebenso leicht verständlich ist wie ein ungenauer, ersterer vorzuziehen sei. Auch kann es uns nicht recht gefallen, dass er S. 393, ohne jede Andeutung, wie gewagt ein solcher Schluss ist, es als selbstverständlich hinstellt, dass jede reelle Function von zwei Veränderlichen, welche auf einer Fläche eindeutig und stetig ist, auf derselben einen Maximal- und Minimalwerth erreicht. Was die literarischen Notizen angeht, so möchten wir glauben, dass dieselben an einigen Stellen dem Anfänger (allerdings nur diesem) falsche Ansichten über den ersten Entdecker eines Satzes beibringen müssen. Dass die Function $\sqrt{(z-c_1)\ldots(z-c_{2n-1})}$ im Punkte $z=\infty$ einen Windungspunkt hat, wird sehr schön hergeleitet, indem man in der Function $\frac{\sqrt{(z-c_1)\ldots(z-c_{2n})}}{-c_{2n}}$ die Grösse $c_{2n}$ unendlich gross werden lässt; daneben würden wir gern noch einen directen Beweis mitgetheilt sehen.

Als Hauptaufgabe des Werkes wird man es bezeichnen müssen, dass es in die Functionentheorie Cauchy's und Riemann's, mit specieller Rücksicht auf die Abel'schen Functionen, einführt. Dieser Aufgabe entspricht das Werk in vorzüglicher Weise. Die Klarheit des Ausdrucks und die Einfachheit der Beweise brauchen nicht ausdrücklich hervorgehoben zu werden: es sind das bekanntlich Vorzüge, welche allen Werken des Verfassers in hervorragendem Maasse eignen. Wir möchten daher vor Allem auf die passende Anordnung des Stoffes aufmerksam machen. Wenn wir die geometrischen Entwickelungen des Werkes übersehen, so erkennen wir, wie bedeutend der geometrische Apparat ist, den Riemann gebraucht, und wenn dem die geringe Ausdehnung dessen, was Riemann selbst giebt, zu widersprechen scheint, so muss man beachten, dass derselbe an den Leser eben ganz ausserordentliche Anforderungen stellt. Es war keine leichte Aufgabe, die geometrischen Untersuchungen mit denen der Functionentheorie so zu verwirken, dass ein organisches Ganzes entstand. Es ging nicht an, den ganzen geometrischen Apparat in den Anfang zu stellen. Wenn wir auch anerkennen, dass diese *analysis situs* bei weiterer Ausbildung sich allgemein ein selbstständiges Interesse erringen wird, so glauben wir doch, dass sie bei ihrem jetzigen Stande den Anfänger ermüdet, wenn er ihre Anwendungen für die Functionentheorie nicht verfolgen kann. Demnach muss es gebilligt werden, dass der Verfasser Geometrie und Analysis durch

das ganze Werk hat abwechseln lassen. Dabei lag allerdings die Gefahr einer Zersplitterung des Stoffes sehr nahe: kaum sind die analytischen Untersuchungen begonnen und man muss wieder zu den ganz davon verschiedenen geometrischen Betrachtungen zurückkehren. Eine solche Zersplitterung ist unseres Erachtens beinahe gänzlich vermieden. Die ersten beiden Capitel bieten die Hauptsätze Cauchy's über Functionen; hier tritt die Nothwendigkeit, die Ausbreitung einer Fnnction zu beachten, so deutlich hervor, dass die beiden folgenden Capitel, in denen diese Ausbreitung für sich betrachtet wird, keinen wesentlich verschiedenen Charakter zeigen, obwohl das Geometrische mehr hervortritt; und umgekehrt sind diese beiden Capitel, das dritte und vierte, mit so vielen analytischen Beispielen durchwirkt, dass das folgende Capitel nur eine allgemeine analytische Theorie dessen giebt, was vorher durch zahlreiche Beispiele vorbereitet war. In derselben Weise geht es weiter und wir stehen nicht an, die Anordnung des Stoffes (in dieser zweiten Auflage) geradezu als ein Meisterstück zu bezeichnen.

Der Stoff ist gegen die erste Auflage bedeutend vermehrt und umfasst das Abel'sche Theorem und das Jacobi'sche Umkehrproblem für beliebige algebraische Functionen, wobei die hyperelliptischen Functionen, auf welche sich die erste Auflage beschränkte, in den Vordergrund treten. Diese Erweiterung ist sehr zu billigen. Wenn der Anfänger sich in die allgemeine Theorie hineingearbeitet hat, so muss er auch die ganze Frucht seiner Anstrengungen geniessen und in dem gesteigerten Interesse einen Sporn erhalten, immer tiefer in die Theorie einzudringen. So hat das Buch jetzt den ganzen Inhalt der Riemann'schen Abhandlung „Theorie der Abel'schen Functionen“ in sich aufgenommen und geht stellenweise darüber hinaus. Nur ist die Methode, durch welche Riemann für eine gegebene Gleichung die Verzweigung der entsprechenden Fläche ermittelt, nicht mitgetheilt, vielmehr geht der Verfasser stets von der Riemann'schen Fläche aus und es gelingt ihm, in sehr einfacher Weise die Relation $2p = w - 2n + 2$ zwischen der Ordnungszahl $2p+1$ der Fläche, der Zahl $n$ ihrer Blätter und der Summe $w$ der elementaren Windungspunkte zu ermitteln. An einer Stelle, wo Riemann's Behandlung sich auf einen nicht vollständig bewiesenen Satz zu stützen scheint, ist ein Weg angegeben, welcher nicht nur den betreffenden Beweis liefert, sondern auch direct zum Ziele führt. Es ist das der Anfang von § 23 der Riemann'schen Arbeit, welcher durch die Seiten 336—350 des Werkes eine neue Grundlage gewonnen hat.

Mitten im Werke werden die Riemann'schen Existenztheoreme betreffs der Abel'schen Integrale rein historisch mitgetheilt und auf ihre Herleitung vermittelst des Dirichlet'schen Princips nur hingedeutet. Hierbei wird diese Methode der Herleitung nur als eine mangelhafte, höchstens als eine divinatorische bezeichnet. Es gewährt vielleicht einiges Interesse, zu erfahren, dass Riemann selbst seine Methode im mündlichen Verkehr mit

Herrn Weierstrass durchaus nicht als streng angesehen wissen wollte, aber ganz richtig die Auffindung der Resultate als die erste, die strenge Beweisführung als die zweite Aufgabe der Wissenschaft bezeichnete. Herr Neumann hat nun in den drei letzten Capiteln einen Beweis dieser Existenztheoreme geliefert. Dieser Beweis wird geführt mittels derjenigen Methoden, welche sich in früheren Arbeiten des Verfassers als äusserst brauchbar erwiesen haben. Nach allgemeinen Vorbereitungen wird zunächst nach einer neuen Methode das schon öfters behandelte Problem gelöst: eine stetige Function $U$ von $x$ und $y$ zu finden, welche innerhalb einer Kreisfläche der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$$

genügt und am Rande beliebig vorgeschriebene Werthe erhält. Diese Lösung wird zunächst auf eine mehrblättrige Fläche übertragen und dann gezeigt, wie man aus einer solchen Kreisfläche der Reihe nach beliebig viele Kreise ausschneiden und jedesmal für die neue Fläche die Lösung angeben könne. In Betreff der Durchführung dieses Gedankens müssen wir auf das Werk selbst verweisen und fordern zum Schluss namentlich die Studirenden zum eifrigen Studium desselben auf.

Braunsberg. W. Killing.

---

**Einleitung in die Theorie der elliptischen Functionen.** Von Karl Bobek, Privatdocent für Mathematik im Allgemeinen.

Das Buch stellt sich die Aufgabe, einen kurzgefassten, auf das Wesentlichste beschränkten Abriss der Theorie der elliptischen Functionen und Integrale zu geben, indem es dem Anfänger möglich macht, sich rascher in dieses Gebiet einzuführen, als dies die ausführlichen Lehrbücher gestatten. Die benutzten Methoden sind wesentlich dieselben wie in dem Koenigsberger'schen Werke über elliptische Functionen. In der Einleitung finden wir eine Zusammenstellung der wichtigsten Sätze über Functionen complexer Variabeln und die Integrale derselben. Nach des Referenten Ansicht hätte hierbei auf den allgemeinen Begriff der Function genauer eingegangen werden sollen; die Definition, dass $f(z)$ als Function von $z$ zu betrachten sei, wenn $\frac{df(z)}{dz}$ von $dz$ unabhängig ist, dürfte für den Anfänger ohne weitere Erläuterung kaum verständlich sein. Das bestimmte Integral $W=\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ wird durch die Relation $\frac{dW}{dz}=f(z)$ definirt; hiernach ist aber nicht ersichtlich, was $z_0$ mit $W$ überhaupt zu thun hat und was unter dem Integrationswege zu verstehen ist; auch wenn man sich das Fehlende in der

Definition ergänzt, dürften doch die folgenden Betrachtungen über den Einfluss des Integrationsweges nicht ausreichend sein. — Die Einführung doppeltperiodischer Functionen im ersten Theile geschieht nicht, wie bei Koenigsberger, auf Grundlage der elliptischen Integrale, sondern ohne weitere Begründung. Recht eingehend wird der Zusammenhang der doppelt-periodischen Functionen unter einander, sowie die Theorie der Additionstheoreme (letztere zuerst für die elliptischen Functionen und dann hierauf gestützt für die Thetas) behandelt, während die Entwickelung in unendliche Producte und Partialbruchreihen wegbleibt. Der zweite Theil umfasst in zweckmässiger Beschränkung die Theorie der Riemann'schen Flächen speciell für die Function $y=\sqrt{A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}$, und hierauf basirt die Entwickelung der elliptischen Normalintegrale. — Sehr willkommen wird vielen Lesern der Anhang sein, der die Beziehungen der elliptischen Transcendenten zu den Curven vom Geschlecht 1 darthut und hiermit ein interessantes Gebiet dem Studium zugänglicher macht.

Die Darstellungsweise des Werkes ist, von schon erwähnten Einzelheiten abgesehen, klar, der Inhalt bei aller Einschränkung reichhaltig, so dass es mit Vortheil zum einleitenden Studium benutzt werden kann.

Frankfurt a. M., im April 1885. Dr. Otto Rausenberger.

---

Franke, **Die Koordinaten-Ausgleichung nach Näherungsmethoden in der Klein-Triangulirung und Polygonalmessung.** München, Grubert. 1884. VI u. 156 S. mit 1 Tafel. Preis 1,60 Mk.

Die vorstehende Schrift bildet eine Ergänzung zu des Verfassers bekannten „Grundlehren der trigonometrischen Vermessung im rechtwinkligen Coordinatensystem". Während in dem letztern Buche alle Ausgleichungsrechnungen streng nach der Methode der kleinsten Quadrate geführt sind, werden in der obigen Schrift für die Detailvermessungsarbeiten Näherungsmethoden der Ausgleichung entwickelt und Näherungsgrenzen der zulässigen Fehler aufgestellt. Am Schlusse werden Vergleiche zwischn methodischen und näherungsweisen Ausgleichungen gegeben, welche zeigen, dass die letzteren allen praktischen Ansprüchen an die Genauigkeit genügen.

Es fragt sich in der That, ob in den letzten Jahren, nachdem kaum Bussole und Messtisch als Instrumente zu genaueren Horizontalvermessungen verabschiedet wurden, nicht mit Einem Male des Guten etwas zuviel geschehen ist, als man selbst für ganz untergeordnete Aufgaben der Detailvermessung die strenge Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate verlangte; es möchte hier doch dann und wann ein Missverhältniss zwischen den Messungsgrundlagen einerseits und der angestrebten Genauigkeit der Resultate, sowie dem dazu nöthigen Rechnungsapparat andererseits obwalten. Rationelle und vereinfachte Rechnungsverfahren, welche von

der Methode der kleinsten Quadrate ausgehen, scheinen für viele Zwecke ganz angezeigt und es sei deshalb die vorliegende Schrift als ein dahinzielender Versuch bestens empfohlen.

HAMMER.

---

BÖRSCH, **Anleitung zur Berechnung geodätischer Coordinaten.** 2. Aufl. Cassel, Freyschmidt. 1885. VIII u. 167 S. mit 2 Tafeln. Preis 6 Mk.

Diese Neuauflage der ursprünglich nur zur Verwendung bei der kurhessischen Neuvermessung bestimmten Schrift ist durch wesentliche Erweiterungen zu einem recht praktischen geodätischen Hilfsbuche geworden. Man möchte nur, nachdem im Abschnitt I eine Einleitung über die mathematische Grundlage der Formeln geboten werden soll, wünschen, dass dieselbe entweder etwas ausführlicher oder einfach als Formelsammlung behandelt wäre; denn ob auf 20 Seiten Analysis, sphärische Trigonometrie und analytische Geometrie so abgehandelt werden können, dass in der That „dem praktischen Feldmesser und dem in der mathematischen Analysis weniger Geübten jede Frage über die Ableitung der Formeln und über die Berechnung geodätischer Coordinaten beantwortet wird", erscheint zweifelhaft. Der zweite Abschnitt behandelt das Erdsphäroid, der dritte die verschiedenen Systeme geodätischer Coordinaten. Im Anhang dieses Abschnittes sind einige geodätische Aufgaben speciell behandelt, wobei für die Ausgleichung der Pothenot'schen Aufgabe eine elegante Methode durch Ausgleichung der gemessenen Winkel statt (nach Gauss und Gerling) der Coordinaten des zu bestimmenden Punktes gegeben ist. Der vierte Abschnitt endlich enthält vollständige Tafeln zur Berechnung geodätischer Coordinaten von 36° bis 71° Breite, also für ganz Europa ausreichend. Die sämmtlichen Tafeln scheinen sehr correct zu sein.

HAMMER.

---

Dr. JAC. J. WEYRAUCH, Prof. a. d. polytechn. Schule in Stuttgart:

1. **Theorie elastischer Körper,** eine Einleitung zur mathematischen Physik und technischen Mechanik. Mit 42 Figuren im Text. Leipzig, Teubner. 1884;
2. **Aufgaben zur Theorie elastischer Körper.** Mit 110 Figuren im Text. Leipzig, Teubner. 1885;
3. **Das Princip von der Erhaltung der Energie seit Robert Mayer.** Zur Orientirung. Leipzig, Teubner. 1885. 48 S.

„An Lehrbüchern der Mechanik fehlt es nicht; eine allgemeine Grundlage für meine Vorträge über Elasticitäts- und Wärmetheorie, Aëro- und Ingenieurmechanik war jedoch nirgends zu finden" schrieb der Herr Verfasser an den unterzeichneten Referenten, als er sich mit dessen Absicht,

die nunmehrige Anzeige des ersten Buches bis zum Erscheinen des zweiten zu verschieben, brieflich einverstanden erklärte. „Dass mein Buch beim Studium Schwierigkeiten bereitet, gebe ich zu, das ist bei jedem Werke über elastische Körper der Fall, bei dem meinigen aber, wie ich glaube, weniger als bei Clebsch, Kirchhoff u. A.“ Diesem Ausspruch ist gewiss beizupflichten; aber wenn es im Vorwort zu 1 heisst, dass von mathematischen Vorkenntnissen nur soviel vorausgesetzt wird, als man sich auf der Mittelschule oder doch nach einjährigem Besuche der Hochschule erwerben kann, so scheint mir für die grosse Mehrzahl der Studirenden der mündliche Vortrag eines Lehrers wie Herr Prof. Weyrauch sehr nothwendig, sollen dieselben von dem Buche einen Nutzen ziehen. Für reifere Leser sind aber die physikalischen Excurse wie z. B. auf das Gebiet der Schwingungslehre (die beiden letzten Abschnitte XI und XII) nicht ausreichend und auch vom Herrn Verfasser nicht angelegt.

Der erste Abschnitt, § 1—12, S. 1—29, handelt von den Grundbegriffen. In § 1 ist die bekannte Beschleunigung „specifische Massenkraft“ genannt. In § 2 ist der elastischen Nachwirkung mit acht Zeilen gedacht. Auf die Verrückungen im § 4 folgen im § 5 die Dehnung und die Drehungen, in welchen schon Manches dem mündlichen Unterricht oder sonst zuviel dem Privatverständnisse des Studenten (im dritten Semester) überlassen wird.

Das Aufgabenbuch (2) trägt an der Spitze ein Inhaltsverzeichniss von 134 Nummern, jede mit der Paragraphenzahl des Buches 1 versehen, welche zur Lösung nachgeschlagen werden soll. Die erste Aufgabe schliesst sich an vorhingenannten § 5 an, von Aufgabe 108 an ist wiederum die Schwingungslehre bedacht. Ein völliges Register hier zu geben, würde bei der Reichhaltigkeit des Buches weitläufig werden und ist auch nicht nöthig, da die Interessenten der reinen und angewandten Mathematik dasselbe gewiss selber in die Hand nehmen und auf seinen Inhalt prüfen werden.

3. Diese Brochure enthält einen Vortrag des Herrn Verfassers im Lande Robert Mayer's nebst wissenschaftlichen Ergänzungen und Literaturnachweisen. S. 8 sind nach diesem Autor als „Kraftformen“ aufgeführt: „Fallkraft, Bewegung (!), Wärme (!), Magnetismus etc“; S. 9 kritisirt der Herr Verfasser die Vorgänger R. Mayer's, dass sie „den Begriff Kraft nicht allgemein genug fassten“. Referent pflichtet der entgegengesetzten Ansicht bei, dass man Kraft nur als Masse mal Beschleunigung fassen solle, welchem Begriffe gegenüber auch Worte wie Magnetismus zu vag und allgemein gehalten sind.

Kurz.

---

**Mein perspectivischer Apparat,** von Guido Hauck. Separatabdruck aus der Festschrift der königl. Technischen Hochschule zu Berlin zur Feier der Einweihung ihres neuen Gebäudes. Berlin 1884. 4°. 20 S. mit 2 Figurentafeln.

Die Aufgabe der darstellenden Geometrie im engeren Sinne des Wortes besteht darin, aus irgend zwei gegebenen Projectionen eines räumlichen Gebildes eine dritte Projection desselben zu ermitteln. Diese Aufgabe ist dem Grundgedanken nach nicht abhängig von der Art der Projectionen. Es mag nun verlangt werden, aus Aufriss und Grundriss eine Centralprojection entstehen zu lassen oder aus zwei Centralprojectionen (z. B. zwei photographischen Aufnahmen) eine orthogonale Parallelprojection, Grundriss oder Aufriss, abzuleiten, immer hat man es mit einer Aufgabe der ebengenannten Natur zu thun. Herr Hauck hat nun den Versuch gewagt, diese allgemeine Aufgabe mechanisch zu lösen, d. h. einen Apparat herzustellen, der mit zwei Führungsstiften die Umrisse der beiden gegebenen Projectionen verfolgt und zugleich durch einen Zeichenstift die gewünschte neue Projection erzeugt. Die uns vorliegende Abhandlung enthält die photographische Abbildung des von Herrn Hauck eigenhändig zugerichteten und bereits am 4. Mai 1883 in der Sitzung der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin fertig vorgezeigten und erläuterten Apparates mit der nöthigen wissenschaftlichen Erklärung und Begründung. Es erscheint kaum möglich, auszugsweise und ohne Figur über die ziemlich zusammengesetzte storchschnabelartige Verbindung mannigfacher geschlitzter Lineale zu berichten. Wir glauben daher, unter Verweisung unserer Leser auf die Abhandlung selbst uns mit dem Ausspruche des geometrischen Fundamentaltheorems begnügen zu müssen, auf welchem die ganze Ausführung beruht und welches Herr Hauck in folgende Worte kleidet:

Seien $P$ und $P'$ zwei Projectionsebenen, die sich in der als Grundschnitt bezeichneten Linie $\mathfrak{g}$ schneiden; seien $O$ und $O'$ die zugehörigen Projectionscentren. Die Verbindungslinie $OO'$ schneide die Ebenen $P$ und $P'$ beziehungsweise in den Punkten $p$ und $p'$, welche als die Kernpunkte der betreffenden Projectionsebenen bezeichnet werden. Sind nun $x$ und $x'$ die beiderseitigen Projectionen irgend eines Objectpunktes $X$, so müssen sich die nach ihnen gezogenen Kernstrahlen $px$ und $p'x'$ in einem Punkte $g$ des Grundschnittes $\mathfrak{g}$ schneiden, d. h. die beiden Projectionsfiguren werden von den Kernpunkten aus durch zwei Strahlenbüschel projicirt, welche den Grundschnitt nach einer und derselben Punktreihe schneiden.

Cantor.

---

**Die Grenzen zwischen Malerei und Plastik und die Gesetze des Reliefs.** Rede, zum Geburtstage Seiner Majestät des Kaisers und Königs in der Aula der königl. Technischen Hochschule zu Berlin am 21. März 1885 gehalten von dem zeitigen Rector Guido Hauck. Berlin 1885. 20 S.

Hört eine Zeichnung grau in grau, also ohne Farbenunterschied gefertigt, auf, dem Gebiete der Malerei anzugehören? Ist eine mit Farben

übermalte Bildsäule dem Gebiete der Plastik entrückt? Man braucht beide Fragen nur auszusprechen, um ihrer sofortigen Verneinung sicher zu sein. Zugleich überzeugt man sich aber von der Nothwendigkeit, die Grenze zwischen beiden Kunstbereichen, die in unserem Bewusstsein scharf aus einanderliegen, auch scharf zu definiren. Es war ein Ei des Columbus aufzustellen, und Herrn Hauck ist der Versuch vortrefflich geglückt. Die Malerei, sagt er, hat Licht und Schatten in sich selbst, die Plastik entlehnt es von aussen. Zwischen der Projection auf die Ebene mit angedeuteter Schattengebung und dem körperlichen Vollbilde mit natürlich entstehenden Schatten ist als Drittes das Relief. Von der Malerei entnimmt es Verkürzungen und Verschiebungen, auch einige Schattengebung, von der Plastik die nicht zu vermeidende Lichtwirkung körperlichen Vor- und Zurücktretens. Es muss mathematische Gesetze des Reliefs geben, es muss möglich sein, die Forderung in eine Formel zu bringen, dass man einer photographischen Aufnahme nachträglich nicht ansehen dürfe, ob das Original Relief oder Vollrund war, eine Forderung, der Hanfstängel's grosse Photographien Thorwaldsen'scher Reliefs auf schwarzem Grunde vollauf gerecht werden. Das muss mathematisch aussprechbar sein. Man hat auch eine Zeit lang geglaubt, in der sogenannten Reliefperspective des Räthsels Lösung erkannt zu haben, es war ein Irrthum. Gerade Thorwaldsen's Reliefs, das Muster, an welchem eine richtige Regel sich bewahrheiten muss, sind Pfuschwerke, wenn die Gesetze der Reliefperspective auf Richtigkeit Anspruch machen könnten. Die umgekehrte Folgerung ist unabweisbar und es bleibt der darstellenden Geometrie die noch ungelöste Aufgabe, mathematische Gesetze des Reliefs zu entdecken. So der wesentliche Inhalt der ungemein anregenden Festrede.

Cantor.

---

**Wie studirt man Mathematik und Physik?** Von einem Lehrer der Mathematik. Leipzig 1885, Rossberg'sche Buchhandlung. 12°. 32 S.

Für 60 Pf. beantwortet die Verlagshandlung diese Frage, und um den gleichen Preis kann man erfahren, wie man Jurisprudenz, wie neuere Philologie und Germanistik, classische Philologie und Geschichte, Chemie und die beschreibenden Naturwissenschaften studire. Nur wie man sich zum Arzt und wie zum Landwirth bilde, kostet 80 Pf., und es ist eine Preisfrage, womit dieser Unterschied sich begründen lasse, warum gerade auf jenen beiden Gebieten guter Rath theurer sei? Jedenfalls scheint bei unserer studirenden Jugend das praktische Bedürfniss nach Rathschlägen über die Einrichtung des Studiums vorhanden zu sein, und unzweifelhaft wird Zeit und Mühe gespart, wenn die richtigen Vorlesungen in der richtigen Reihenfolge gehört werden. Für die Universität Leipzig haben die dortigen Professoren der Mathematik im März 1882 die nöthigen Weisungen veröffent-

licht, und auf diese Weisungen bezieht sich unsere Vorlage. Nur schade, dass die mathematischen Vorlesungen anderer deutscher Universitäten sich nicht alle dem gleichen Schema einfügen, dass die Mathematiker gewöhnt sind, mit ihrem Stoffe frei zu schalten, so dass der gleiche Name nicht selten zwei ganz verschiedene, verschiedene Namen ziemlich übereinstimmende Vorlesungen bezeichnen können. Uns scheint daher am sichersten, der junge Studirende solle an irgend einen Lehrer der Hochschule, die er zu besuchen gedenkt, sich vertrauensvoll wenden, seine Bitte um Rath wird sicherlich nie eine Fehlbitte sein. Zieht er aber den Rath von Altersgenossen vor, was ja Manches für sich hat, so wende er sich an den mathematischen Verein der betreffenden Universität. Solche wissenschaftliche Vereine wirken an und für sich auf's Segenvollste und der Eintritt kann jedem Neuling nur dringend gerathen werden.

CANTOR.

---

# Bibliographie

vom 1. Mai bis 30. Juni 1885.

---

### Periodische Schriften.

Physikalische Abhandlungen der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus dem Jahre 1884. Berlin, Dümmler. 17 Mk.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, mathemat.-naturwissenschaftl. Classe, Abth. II. 90. Bd., 3., 4. u. 5. Heft. Wien, Gerold. 13 Mk.

Publicationen des astrophysikalischen Observatoriums in Potsdam. Nr. 15. 4. Bd. 2. Stück. (Meteorolog. Beobacht.) Leipzig, Engelmann. 7 Mk.

Astronomisches Jahrbuch von Berlin für das Jahr 1887, herausgeg. von F. TIETJEN. Berlin, Dümmler. 12 Mk.

Die veränderlichen Tafeln des astronom. u. chronolog. Theils des k. preuss. Normalkalenders f. 1886, herausgeg. v. FÖRSTER u. P. LEHMANN. Berlin, Verl. d. statist. Bureaus. 5 Mk.

Acta mathematica, herausgeg. von G. MITTAG-LEFFLER. 6. Bd. 1. Heft. Berlin, Mayer & Müller. compl. 24 Mk.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgeg. von C. OHRTMANN. 14. Bd. Jahrg. 1882, 3. Heft. Berlin, G. Reimer. 6 Mk.

Fortschritte der Physik im Jahre 1881, dargestellt von der physikal. Gesellschaft in Berlin. 37. Jahrg.; redig. v. NEESSEN. 1. Abth.: Allgem. Physik und Akustik. Berlin, G. Reimer. 7 Mk.

## Reine Mathematik.

WEINNOLDT, E., Ueber Functionen, welche gewissen Differenzengleichungen höherer Ordnung genügen. Kiel, Lipsius & Tischer. 2 Mk. 40 Pf.

SPITZER, S., Untersuchungen im Gebiete linearer Differentialgleichungen. 3. Heft. Wien, Gerold. 3 Mk.

GEGENBAUER, L., Arithmetische Theoreme. II. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk. 80 Pf.

SIMONY, O., Ueber zwei universelle Verallgemeinerungen der algebraischen Grundoperationen. (Akad.) Ebendas. 1 Mk. 60 Pf.

WEISS, E., Entwickelungen zum Lagrange'schen Reversionstheorem mit Anwend. auf die Keppler'sche Gleichung. (Akad.) Ebendas. 2 Mk.

SERRET, A., Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Deutsch bearb. v. A. HARNACK. 2. Bd., 2. Hälfte. (Differentialgleichungen.) Leipzig, Teubner. 7 Mk. 20 Pf.

DANITSCH, D., Conforme Abbildung des ellipt. Paraboloids auf d. Ebene. (Dissert.) Jena, Deistung. 1 Mk.

TAUBERTH, J., Die Abbildung des ebenen Kreissystems auf den Raum. (Dissert.) Ebendas. 60 Pf.

WALLENTIN, F., Maturitätsfragen aus der Mathematik. 2. Aufl. Wien, Gerold. 3 Mk. 60 Pf.

GYSEL, J., Ueber die sich rechtwinklig schneidenden Normalen einer Fläche zweiten Grades. Schaffhausen, Schoch. 2 Mk.

THIEME, H., Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben aus der Stereometrie. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 20 Pf.

MÖBIUS, A. F., Gesammelte Werke, herausgegeben von der K. S. Gesellsch. d. Wissensch. 4 Bde. 1. Bd. (geometr. Abhandl.), redig. v. R. BALTZER. Leipzig, Hirzel. 16 Mk.

BJERKNES, A., Niels Henrik Abel. Tableau de sa vie et de son action scientifique. Paris, Gauthier-Villars. 7 Frs.

## Angewandte Mathematik.

WITTSTEIN, Th., Das mathematische Risico der Versicherungsgesellschaften sowie aller auf dem Spiele des Zufalls beruhenden Institute. Hannover, Hahn. 4 Mk.

KOPPE, C., Die Ausgleichungsrechnungen nach der Methode der kleinsten Quadrate in der praktischen Geometrie. Nordhausen, Koppe. 6 Mk.

KOPALLIK, J., Vorlesungen über die Chronologie des Mittelalters. Wien, Gerold. 1 Mk.

BOHNENBERGER, F., Die Berechnung trigonometrischer Vermessungen mit Rücksicht auf die sphäroidische Gestalt der Erde. Deutsch v. E. HAMMER. Stuttgart, Metzler. 1 Mk. 80 Pf.

Adam, V., Bruchstücke aus der mathematischen Geographie mit bes. Rücksicht auf Beleuchtungsverhältnisse. Wien, Bermann & Altmann. 1 Mk.

Kraft, E., Sammlung von Problemen der analytischen Mechanik. 9. u. 10. Lief. Stuttgart, Metzler. 4 Mk.

Herz, N., Entwickelung der störenden Kräfte nach Vielfachen der mittleren Anomalie in independenter Form. (Akad.) Wien, Gerold. 80 Pf.

Oertel, K., Astronomische Bestimmung der Polhöhen auf den Punkten Irschenberg, Höhensteig u. Kampenwand. (Akad.) München, Franz. 2 Mk.

Serpieri, A., Die mechanischen, elektrostatischen und elektromagnetischen absoluten Maasse, elementar abgehandelt mit Aufgaben. Aus dem Italienischen von R. v. Reichenbach. Wien, Hartleben. 3 Mk.

## Physik und Meteorologie.

Dreher, E., Ueber den Begriff der Kraft mit Rücksicht auf das Gesetz von der Erhaltung der Kraft. Berlin, Dümmler. 1 Mk.

Kiessling, J., Die Dämmerungserscheinungen im Jahre 1883 und ihre physikalische Erklärung. Hamburg, Voss. 1 Mk.

Sohncke, L., Der Ursprung der Gewitter-Elektricität und der gewöhnlichen atmosphärischen Elektricität. Jena, Fischer. 1 Mk. 50 Pf.

Schlemüller, W., Grundzüge einer Theorie der kosmischen Atmosphären mit Berücksichtigung der irdischen Atmosphäre. Prag, Dominicus. 1 Mk. 20 Pf.

# Mathematisches Abhandlungsregister.

## 1884.

### Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.

## A.

### Abbildung.

1. Ueber die isothermische Spiegelung. Holzmüller. Crelle XCIV, 179.
2. Zur conformen Abbildung der Cyklide auf Rechteck und unbegrenzte Ebene. Holzmüller. Crelle XCIV, 237, 342.
3. Ueber eine ein-dreideutige ebene Abbildung einer Fläche dritter Ordnung. S. Kantor. Crelle XCV, 147.
4. Sur la représentation sphérique des surfaces. G. Darboux. Compt. rend. XCVI, 366.

Vergl. Differentialgleichungen 91.

### Abel'sche Transcendenten.

5. On some Abelian integrals. H. J. R. Rink. Quart. Journ. math. XIX, 347.
6. Ueber einige Abel'sche Integrale erster Gattung. H. J. Rink. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 272.
7. Sur les équations différentielles abéliennes dans le cas de la réduction du nombre des périodes. E. Picard. Compt. rend. XCV, 898.

Vergl. Differentialgleichungen 83.

### Analytische Geometrie der Ebene.

8. Sur l'équation intrinsèque des courbes. E. Cesaro. Mathesis IV, 233.
9. Propriété de points harmoniques. Bastin. Mathesis IV, 206. — Cesaro ibid. 207.
10. Ueber das gleichseitige Dreieck. Em. Hain. Grun. Archiv LXIX, 44.
11. Ueber das Centrum der mittleren Entfernungen der Schnittpunkte einer Geraden mit drei festen Geraden M. Greiner. Grun. Archiv LXIX, 323.
12. Trouver, sur une droite donnée, le point $M$ tel que le triangle ayant pour sommets les projections de ce point sur les côtés d'un triangle donné $ABC$, soit un minimum. Bastin. Mathesis IV, 118. — J. Neuberg ibid. 119.
13. Lieu géométrique faisant ressortir deux triangles équivalents. Bastin. Mathesis IV, 88.
14. Équation entre les aires de trois triangles construits sous certaines conditions. F. Minoliti. Mathesis IV, 69.
15. Zur Trisection des Winkels. B. Sporer. Grun. Archiv LXIX, 224.
16. Anerkennung einer Priorität. C. Hossfeld. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 192. [Vergl. Bd. XXIX, Nr. 8.]
17. Sur une courbe du 3. et une autre du 8. degré. Bastin. Mathesis IV, 225. — Bergmans ibid. 236.
18. On the bitangents of a plane quartic. A. Cayley. Crelle XCIV, 93.
19. Résumé de differentes recherches sur les ovales de Descartes et quelques autres courbes. A. Genocchi. Mathesis IV, 49.
20. Sur une courbe dont l'abscisse s'exprime en fonction de l'ordonnée par une quadrature. Brocard. Mathesis IV, 126.
21. Trajectoires orthogonales des courbes $\varrho^2 = a^2 \log \frac{tg\,\omega}{c}$. Brocard. Mathesis IV, 125.

Vergl. Cissoide. Conchoide. Elliptische Transcendenten 184. Kegelschnitte.

**Analytische Geometrie des Raumes.**

22. Ueber Coordinatentransformationen $n^{ten}$ Grades. Th. Reye. Crelle XCIV, 312.
23. On curvilinear coordinates. A. Cayley. Quart. Journ. math. XIX, 1.
24. Zur Polarentheorie der Complexe zweiten Grades. W. Stahl. Crelle XCIV, 319.
25. Ueber Strahlensysteme zweiter Ordnung. W. Stahl. Crelle XCV, 297.
26. Erzeugung von Complexen ersten und zweiten Grades aus linearen Congruenzen. A. Weiler. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 187. [Vergl. Bd. XXVIII, Nr. 132.]
27. Bemerkungen über einige Complexe. A. Weiler. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 191.
28. Einfache Erzeugung einiger Complexe zweiten Grades. A. Weiler. Crelle XCV, 140.
29. Ueber lineare und quadratische Strahlencomplexe und Complexen-Gewebe. Th. Reye. Crelle XCV, 330.
30. Zur Theorie der Raumcurven. C. Hossfeld. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 242.
31. Sur les courbes du sextant. Gruey. Compt. rend. XCVI, 240.
32. Sur une espèce de courbes symétriques de la sixième classe. C. Crone. Acta mathematica II, 81.

Vergl. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung.

**Astronomie.**

33. Sur l'équation différentielle qui donne immédiatement la solution du problème des trois corps jusqu'aux quantités du deuxième ordre inclusivement. H. Gyldén. Compt. rend. XCV, 57.
34. Sur un point de la théorie des perturbations. R. Radau. Compt. rend. XCV, 117.
35. Sur les perturbations de Saturne dues à l'action de Jupiter. A. Gaillot. Compt. rend. XCVI, 626.
36. Tables auxilières pour calculer l'anomalie vraie des planètes. Ch. V. Zenger. Compt. rend. XCV, 208.
37. Théorie du mouvement diurne de l'axe du monde. Folie. Compt. rend. XCV, 163.
38. Sur le calcul des variations séculaires des éléments des orbites. O. Callandreau. Compt. rend. XCVI, 1841.
39. Des termes à courte période dans le mouvement de rotation de la terre. C. Rozé. Compt. rend. XCV, 827.
40. Sur la théorie du Soleil de C. W. Siemens. Faye. Compt. rend. XCV, 612, 1110; XCVI, 79, 136, 292, 355. — Siemens ibid. XCV, 769, 1037; XCVI, 43. — Hirn ibid. XCV, 812, 1195. — Rey de Morande ibid. XCV, 980. — J. Violle ibid. XCVI, 253.
41. Méthodes nouvelles pour la détermination des ascensions droites et des déclinaisons absolues des étoiles. Loewy. Compt. rend. XCVI, 1098, 1179, 1329, 1745, 1813.
42. Sur une manière de déterminer l'angle de position d'un point de la surface d'un astre à l'aide d'une lunette horizontale. Ch. Trépied. Compt. rend. XCVI, 1198.
43. Sur l'emploi de la lunette horizontale pour les observations de spectroscopie solaire. Thollon. Compt. rend. XCVI, 1200.
44. Sur la possibilité d'accroître dans une grande proportion la précision des observations des éclipses des satellites de Jupiter. A. Cornu. Compt. rend. XCVI, 1609.

Vergl. Keppler'sches Problem. Oberflächen 342. Reihen 417.

## B.

**Bernoulli'sche Zahlen.**

45. Studien über die Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen. J. Worpitzky. Crelle XCIV, 203. — Kronecker ibid. 268.
46. Ueber die Partialbruchzerlegung der Functionen, mit besonderer Anwendung auf die Bernoulli'schen. J. Worpitzky. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 45.

**Bestimmte Integrale.**

47. On certain definite integrals connected with spherical harmonics. P. Frost. Quart. Journ. math. XIX, 242.
48. Sur une classe de fonctions représentées par des intégrales définies. E. Goursat. Acta mathematica II, 1.

72. Beziehungen zwischen den Fundamentalintegralen einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung. L. Königsberger. Mathem. Annal. XXII, 269.
73. Sur une équation linéaire du second ordre à coefficients doublement périodiques. M. Elliot. Acta mathematica II, 233.
74. Sur l'intégration algébrique d'une classe d'équations linéaires. E. Goursat. Compt. rend. XCVI, 323.
75. Zur Integration der Differentialgleichungen. Wold. Heymann. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 257.
76. Eigenschaften der algebraisch-logarithmischen Integrale linearer nicht homogener Differentialgleichungen. L. Königsberger. Crelle XCIV, 291.
77. Eigenschaften irreductibler Functionen. L. Königsberger. Crelle XCV, 171.
78. Ueber einen speciellen Fall der dem Connex $(1, n)$ entsprechenden Differentialgleichung. E. Müllendorff. Grun. Archiv LXIX, 113.
79. Ueber Differentialgleichungen, welche durch hypergeometrische Functionen integrirt werden können. Wold. Heymann. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 144.
80. On linear differential equations, in particular that satisfied by the series $1+\frac{\alpha\beta\Theta}{\gamma\varepsilon}x+\frac{\alpha(\alpha+1).\beta(\beta+1).\Theta(\Theta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1).\varepsilon(\varepsilon+1)}x^2+\ldots$ A. R. Forsyth. Quart. Journ. math. XIX, 292.
81. A method of expressing any particular arbitrary constant in the solution of linear differential equations in terms of the initial conditions. E. J. Routh. Quart. Journ. math. XIX, 262.
82. Sur l'intégrale algébrique d'une équation trouvée par M. Allégret en forme irrationnelle et ramenée à une forme rationnelle. P. A. Mac Mahon. Compt. rend. XCV, 831.
83. On the differential equation $X^{-2/3}dx+Y^{-2/3}dy+Z^{-2/3}dz=0$. P. A. Mac Mahon. Quart. Journ. math. XIX, 158. — A. Cayley ibid. 182.
84. Note on a differential equation due to Kummer. A. R. Forsyth. Quart. Journ. math. XIX, 125.
85. Sur la nature des intégrales algébriques de l'équation de Riccati. L. Autonne. Compt. rend. XCVI, 1354.
86. Méthode pour obtenir la formule donnant l'intégrale générale de l'équation différentielle $x^n\frac{d^n y}{dx^n}+A_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+A_2x^{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+A_n y=f(x)$ au moyen d'une intégrale définie multiple. Aoust. Compt. rend. XCVI, 775.
87. Ueber die Differentialgleichung der Functionen des elliptischen Cylinders. H. Lindemann. Mathem. Annal. XXII, 117.
88. Conditions pour que deux équations différentielles linéaires sans second membre aient $p$ solutions communes. Équation qui donne ces solutions. H. Lemonnier. Compt. rend. XCV, 476.
89. Ueber die Integration simultaner partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln. J. Vályi. Crelle XCV, 99.
90. Sur une équation linéaire aux dérivées partielles. G. Darboux. Compt. rend. XCV, 69.
91. Sur les équations aux dérivées partielles. G. Darboux. Compt. rend. XCVI, 766.
92. Ueber die Ableitung der singulären Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen aus den Differentialgleichungen selbst. A. Mayer. Mathem. Annal. XXII, 368.

## E.

### Elasticität.

93. Sur l'équilibre du cylindre élastique. P. Schiff. Compt. rend. XCVI, 487.
94. Sur le choc d'une plaque élastique plane, supposée indéfinie en longueur et en largeur, par un solide qui vient la heurter perpendiculairement en un de ses points et qui lui reste uni. J. Boussinesq. Compt. rend. XCV, 123.
95. Équilibre d'élasticité d'un solide limité par un plan. J. Boussinesq. Compt. rend. XCV, 1052, 1149.
96. Du choc longitudinal d'une barre élastique libre contre une barre élastique d'autre matière ou d'autre grosseur, fixée au bout non heurté; considération du cas extrême où la barre heurtante est tres raide et très courte. De Saint-Venant. Compt. rend. XCV, 359.

97. Solution, en termes finis et simples, du problème du choc longitudinal, par un corps quelconque, d'une barre élastique fixée à son extrémité non heurtée. De Saint-Venant. Compt. rend. XCV, 423.
98. Sur le choc longitudinal d'une tige élastique fixée par l'une de ses extrémités. Sébert & Hugoniot. Compt. rend. XCV, 381.
99. Sur les vibrations longitudinales des barres élastiques dont les extrémités sont soumises à des efforts quelconques. Sebert & Hugoniot. Compt. rend. XCV, 213, 278, 338.
100. Sur les vibrations longitudinales des verges élastiques et le mouvement d'une tige portant à son extrémité une masse additionnelle. Sébert & Hugoniot. Compt. rend. XCV, 775.
101. Sur une question de principe qui se rapporte à la théorie du choc des corps imparfaitement élastiques. H. Resal. Compt. rend. XCV, 547.
102. Sur le choc des corps imparfaitement élastiques. H. Resal. Compt. rend. XCV, 578.
103. Du choc de deux sphères en ayant égard à leur degré d'élasticité et au frottement développé au contact. H. Resal. Compt. rend. XCV, 615.
104. Du choc de deux billes posées sur un tapis de billard. H. Resal. Compt. rend. XCV, 655.
105. De l'effet d'un coup de queue incliné sur une balle. H. Resal. Compt. rend. XCV, 700.
106. Sur la théorie des chocs. H. Resal. Compt. rend. XCV, 745.

**Elektricität.**

107. Conception rationnelle de la nature et de la propagation de l'électricité. A. Ledieu. Compt. rend. XCV, 669, 753, 1026. — E. Decharme ibid. 914, 1273.
108. Objections d'ordre mécanique à la théorie actuelle de l'électricité. A. Ledieu. Compt. rend. XCV, 619.
109. Sur quelques théorèmes d'électricité, démontrés d'une manière inexacte dans des ouvrages didactiques. Yves Machai. Compt. rend. XCV, 210.
110. Sur l'expression des grandeurs électriques dans les systèmes électrostatique et électromagnétique, et sur les relations qu'on en déduit. E. Mercadier & Vaschy. Compt. rend. XCVI, 118, 250, 334. — M. Levy ibid. 248, 430.
111. Sur la théorie des couches doubles électriques de Mr. Helmholtz. Calcul de la grandeur d'un intervalle moléculaire. G. Lippmann. Compt. rend. XCV, 686.
112. Considérations théoriques et pratiques sur les phénomènes de l'induction électromagnétique. Applications aux types des machines les plus répandues. G. Le Goarant de Tromelin. Compt. rend. XCV, 439.
113. Sur la relation entre la force électromotrice d'une machine dynamo-électrique et sa vitesse de rotation. M. Levy. Compt. rend. XCV, 832.
114. De la puissance mécanique passive, de la résistance intérieure et du champ magnétiques des régimes allure-intensité; détermination électrique de leurs valeurs effectives. G. Cabanellas. Compt. rend. XCVI, 1651.
115. Transmission du travail à grande distance. M. Deprez. Compt. rend. XCV, 633; XCVI, 192, 777, 1574. — M. Levy ibid. XCV, 1220; XCVI, 329. — Beetz ibid. XCVI, 332. — Tresca ibid. XCVI, 457, 530. — M. Cornu ibid. XCVI, 992. — G. Cabanellas ibid. XCVI, 1363.
116. Le transport de la force par des batteries d'appareils électriques. J. Moser. Compt. rend. XCVI, 779.
117. Nouvelles expressions du travail et du rendement économique des moteurs électriques. M. Deprez. Compt. rend. XCV, 778.
118. Méthode générale pour renforcer les courants téléphoniques. J. Moser. Compt. rend. XCVI, 438.

Vergl. Magnetismus. Mechanik 308.

**Ellipse.**

119. Einfache Construction der Ellipse aus zwei conjugirten Durchmessern. C. Rodenberg. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 225.
120. Triangles dont les côtés sont les tangentes menées à une ellipse d'un point donnée, la droite menant de ce point au centre et les rayons vecteurs du centre aux deux points où les tangentes touchent l'ellipse. E. Liénard & C. Thiry. Mathesis IV, 93.
121. Théorèmes sur l'ellipse. Barbarin. Mathesis IV, 13.

122. Moyenne de rayons vecteurs d'une ellipse. E. Cesaro. Mathesis IV, 40.
Vergl. Cubatur 61. Hyperbel 256. Normalen 338. Quadratur 404, 406. Rectification.

**Ellipsoid.**

123. Propriété de l'ellipsoide. J. Neuberg. Mathesis VII, 227.
Vergl. Cubatur 62.

**Elliptische Transcendenten.**

124. A revision of chapters XXIV and XXVI of Legendre's Fonctions Elliptiques T. I. A. G. Greenhill. Quart. Journ. math. XIX, 225.
125. Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen. O. Rausenberger. Crelle XCIV, 251. [Vergl. Bd. XXVIII, Nr. 512.]
126. Zur Transformationstheorie der elliptischen Functionen. L. Kiepert. Crelle XCV, 218. [Vergl. Bd. XXV, Nr. 350.]
127. On certain formulae in elliptic functions. J. W. L. Glaisher. Quart. Journ. math. XIX, 22.
128. Expressions for $argsn\,a$ and $(argsn\,a)^2$ as definite integrals. J. W. L. Glaisher. Quart. Journ. math. XIX, 71.
129. A system of integrals involving elliptic functions. J. W. L. Glaisher. Quart. Journ. math. XIX, 145.
130. Sur une nouvelle série dans les fonctions elliptiques. Faa de Bruno. Compt. rend. XCV, 22.
131. Algebraische Ableitung der Multiplication von $cos\,am\,u$. C. Runge. Crelle XCIV, 349.
132. Ableitung des Additionstheorems für elliptische Integrale aus der Theorie eines Kegelschnittbüschels. Ad. Schumann. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 55.
133. Sur l'application des intégrales elliptiques et ultraelliptiques à la théorie des courbes unicursales. Laguerre. Compt. rend. XCVI, 769.
134. Ueber das Cartesische Oval. E. Haentzschel. Grun. Archiv LXIX, 395.
Vergl. Umkehrungsproblem.

## F.

**Factorenfolge.**

135. Sur le produit indéfini $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots$ Sylvester. Compt. rend. XCVI, 674.
Vergl. Gammafunctionen 182.

**Formen.**

136. Ueber Relationen zwischen Classenanzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante. Jos. Gierster. Mathem. Annal. XXII, 190. [Vergl. Bd. XXIX, Nr. 130.]
137. Sur certaines formes quadratiques et sur quelques groupes discontinus. E. Picard. Compt. rend. XCV, 763.
138. Sur les formes quadratiques binaires à indéterminées conjuguées. E. Picard. Compt. rend. XCVI, 1567.
139. Sur la réduction continuelle de certaines formes quadratiques. E. Picard. Compt. rend. XCVI, 1779.
140. Bemerkungen über die Aequivalentsubstitutionen binärer quadratischer Formen. J. Hermes. Crelle XCV, 165.
141. Sur la réduction des formes quadratiques positives ternaires. Minkowski. Compt. rend. XCVI, 1205.
142. Table des formes quadratiques quaternaires positives reduites dont le déterminant est égal ou inférieur à 20. L. Charve. Compt. rend. XCVI, 773.
143. Geometrischer Beweis der bekanntesten Eigenschaften einer binären cubischen Form. G. Loria. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 245.
144. Ueber abhängige Punktsysteme und deren Bedeutung für die reciproke Verwandtschaft zweier Ebenen. Rosanes. Crelle XCV, 247. [Vergl. Bd. XXVI, Nr. 322.]
145. Sur la formation des déterminants irréguliers. Jos. Perott. Crelle XCV, 232.
Vergl. Geometrie (höhere) 198, 206. Invariantentheorie.

**Fourier'sche Reihe.**

146. Sur la série de Fourier. Halphen. Compt. rend. XCV, 1217.
147. Démonstration simplifiée des formules de Fourier. P. Gilbert. Mathesis IV, Supplém. V.

148. Ueber die Integration der trigonometrischen Reihe. P. du Bois-Reymond. Mathem. Annal. XXII, 260.

**Functionen.**

149. Sur les transcendantes entières. H. Poincaré. Compt. rend. XCV, 23.
150. Sur les fonctions Fuchsiennes. H. Poincaré. Compt. rend. XCV, 626; XCVI, 1485.
151. Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable. Mittag-Leffler. Compt. rend. XCV, 335. [Vergl. Bd. XXIX, Nr. 678.]
152. Sur les fonctions uniformes d'une variable, liées par une relation algébrique. E. Picard. Compt. rend. XCVI, 476.
153. Sur la théorie des fonctions uniformes. E. Goursat. Compt. rend. XCVI, 565.
154. Sur les fonctions uniformes. J. Farkas. Compt. rend. XCVI, 1646.
155. Sur les fonctions uniformes affectées de coupures et sur une classe d'équations différentielles linéaires. Appell. Compt. rend. XCVI, 1018.
156. Sur les fonctions à espaces lacunaires. H. Poincaré. Compt. rend. XCVI, 1134.
157. Ueber den allgemeinen Functionsbegriff und dessen Darstellung durch eine willkürliche Curve. F. Klein. Mathem. Annal. XXII, 249.
158. Zusammenhang der Hyperbeln und Lemniscaten höherer Ordnung mit dem Ausgangspunkte der Functionentheorie. G. Holzmüller. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 120.
159. Ueber eine gewisse Erweiterung des Cantor'schen Satzes, dass $\lim a_n = 0$ und $\lim b_n = 0$, sofern innerhalb der Grenzen $a < x < b$ immer $\lim(a_n . \sin nx + b_n . \cos nx) = 0$ stattfindet. C. Neumann. Mathem. Annal. XXII, 406.
160. Sur le rapport de la circonférence au diamètre et sur les logarithmes népériens des nombres commensurables ou des irrationnelles algébriques. F. Lindemann. Compt. rend. XCV, 72.
161. Ueber cyklische Functionen. O. Dziobek. Grun. Archiv LXIX, 265.
162. Die algebraische Transformation der doppeltperiodischen Functionen. M. Veltmann. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, Supplem. 73.
163. Ueber die Perioden solcher eindeutiger, $2n$-fach periodischer Functionen, welche im Endlichen überall den Charakter rationaler Functionen besitzen und reell sind für reelle Werthe ihrer $n$ Argumente. Ad. Hurwitz. Crelle XCIV, 1.
164. Définition naturelle des paramètres différentiels des fonctions, et notamment de celui du second ordre $\Delta_2$. J. Boussinesq. Compt. rend. XCV, 479.
165. Ueber arithmetische Eigenschaften gewisser transcendenter Functionen. Ad. Hurwitz. Mathem. Annal. XXII, 211. [Vergl. Bd. XXIX, Nr. 411.]
166. Sur les fonctions d'un point analytique. Appell. Compt. rend. XCV, 624.
167. Relations entre les résidus d'une fonction d'un point analytique $(x, y)$ qui se reproduit, multipliée par une constante, quand le point $(x, y)$ décrit un cycle. Appell. Compt. rend. XCV, 714.
168. Sur des fonctions uniformes de deux points analytiques qui sont laissées invariables par une infinité de transformations rationnelles. Appell. Compt. rend. XCVI, 1643.
169. Sur une classe de fonctions uniformes de deux variables indépendantes. E. Picard. Compt. rend. XCV, 594.
170. Beweis des Satzes, dass eine einwerthige Function beliebig vieler Variabeln, welche überall als Quotient zweier Potenzreihen dargestellt werden kann, eine rationale Function ihrer Argumente ist. A. Hurwitz Crelle XCV, 201.
171. Sur des fonctions de deux variables indépendantes analogues aux fonctions modulaires. Em. Picard. Acta mathematica II, 114.
172. Sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur. E. Goursat. Compt. rend. XCVI, 185.
173. Sur les fonctions hypergéométriques de deux variables. E. Goursat. Compt. rend. XCV, 717, 903, 1044.
174. Sur les fonctions de plusieurs variables imaginaires. Ed. Combescure. Compt. rend. XCVI, 235, 483.
175. Sur les fonctions de deux variables. H. Poincaré. Compt. rend. XCVI, 238.
176. Sur une classe de fonctions de deux variables indépendantes. E. Picard. Compt. rend. XCVI, 320.
177. Sur une classe de fonctions de deux variables indépendantes. P. Appell. Acta mathematica II, 71.
178. Sur les fonctions de deux variables. H. Poincaré. Acta mathematica II, 97.

Vergl. Abel'sche Transcendenten. Bernoulli'sche Zahlen. Bestimmte Integrale. Differentialgleichungen. Elliptische Transcendenten. Factorenfolge. Fourier'sche Reihe. Hyperbolische Functionen. Imaginaires. Mannichfaltigkeiten. Modulargleichungen. Quaternionen. Reihen. Substitutionen. Thetafunctionen. Ultraelliptische Transcendenten. Zahlentheorie 474.

## G.

### Gammafunctionen.

179. Sur la fonction eulérienne. Bourguet. Compt. rend. XCVI, 1307.
180. Sur les intégrales euleriennes et quelques autres fonctions uniformes. L. Bourguet. Acta mathematica II, 261.
181. Sur la fonction eulerienne. L. Bourguet. Acta mathematica II, 296.
182. Pour toute valeur positive de $q$, entière ou fractionnaire on a $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi^{q-1}.d\varphi = \Pi_1^{\infty} \frac{(2n-1)(2n-1+q)}{2n(2n-2+q)}$. E. Cesaro. Mathesis IV, 65.
183. Ueber die transcendente Function $Q(x) = \Gamma(x) - P(x)$. H. Mellin. Acta mathematica II, 281.
184. Sur l'intégrale $\int_0^1 \sqrt[\alpha]{1-x^\beta}.dx$. Cl. Servais. Mathesis IV, 154.
185. Rectification à une communication antérieure sur les intégrales eulériennes. J. Tannery. Compt. rend. XCV, 75. [Vergl. Bd. XXIX, Nr. 695.]
Vergl. Zahlentheorie 486.

### Geodäsie.

186. Observations astronomiques sans mesures d'angles. Ch. Rouget. Compt. rend. XCV, 120. [Vergl. Bd. XXIX, Nr. 696.]
187. Choix d'un premier méridien. Faye. Compt. rend. XCVI, 135. — De Chancourtois ibid. 182.
Vergl. Hypsometrie.

### Geometrie (descriptive).

188. Ueber einen Fundamentalsatz der constructiven Schattentheorie. J. Streissler. Grun. Archiv LXIX, 144. — C. Pelz ibid. 437.
189. Angle que fait le plan d'une circonférence avec le plan horizontal. Derousseau. Mathesis IV, 91. — Verstraeten ibid. 167.
190. Théorème sur deux triangles non situés dans un même plan. Jeřabek. Mathesis IV, 116. — J. Neuberg ibid. 116.

### Geometrie (höhere).

191. Ueber einen liniengeometrischen Satz. F. Klein. Mathem. Annal. XXII, 234.
192. Ueber Reihen harmonischer Mittelpunkte vom zweiten Grade. Reinh. Slawyk. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, Supplem. 1.
193. Das Zweieckschnittsverhältniss. A. Thaer. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 183.
194. Ueber Tangentenconstructionen. Ad. Hurwitz. Mathem. Annal. XXII, 230.
195. Ueber Collineation und Correlation. R. Sturm. Mathem. Annal. XXII, 569.
196. Courbes avec point de dédoublement. P. Mansion. Mathesis IV, 164. [Vergl. Bd. XXIX, Nr. 430.]
197. Sur une relation d'involution, concernant une figure plane formée de deux courbes algébriques, dont l'une a un point multiple d'un ordre de multiplicité inférieur d'une unité à son degré. G. Fouret. Compt. rend. XCVI, 1213.
198. Ueber conjugirte binäre Formen und deren geometrische Construction. O. Schlesinger. Mathem. Annal. XXII, 520.
199. Ueber sich in einem Punkte schneidende coordinirte Linien und über auf einer geraden Linie liegende coordinirte Punkte. A. Ramisch. Grun. Archiv LXIX, 54.
200. Zur Theorie der Curven gerader Ordnung. Ed. Mahler. Grun. Archiv LXIX, 108.
201. Ueber einige projectivische Sätze von Schlömilch. F. Graberg. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 368.

202. Die Steiner'schen Polygone. P. A. Schoute. Crelle XCV, 105, 317.
203. Ueber die mit der Lösung einer Steiner'schen Aufgabe zusammenhängende Configuration $(12_6, 16_3)$. C. Hossfeld. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 305.
204. Elementare Beweise einiger geometrischen Sätze. Study. Crelle XCIV, 233.
205. Sur un mode de transformation des figures dans l'espace. Vaněček. Compt. rend. XCV, 1049, 1146; XCVI, 1714, 1773. [Vergl. Bd. XXIX, Nr. 700.]
206. Mémoire sur la représentation des homographies binaires par des points de l'espace avec application à l'étude des rotations sphériques. Cyp. Stéphanos. Mathem. Annal. XXII, 299.
207. Neue Constructionen der Perspective und Photogrammetrie. G. Hauck. Crelle XCV, 1.
208. Ueber die eindeutige Beziehung von Räumen mittels projectiver Ebenenbüschel und ihre Anwendung auf Constructionsaufgaben. F. v. Krieg. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, Supplem. 38.
209. Das ebene Kreissystem und seine Abbildung auf den Raum. J. Thomae. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 284.
210. Zur Theorie der Raumcurven. H. Valentiner. Acta mathematica II, 136.

Vergl. Elliptische Transcendenten 132, 133. Formen 143, 144. Mehrdimensionalgeometrie.

**Geometrie (kinématische).**

211. Kinematische Studien. Ant. Sucharda. Grun. Archiv LXIX, 218.
212. Sur les transformations centrales des courbes planes. M. d'Ocagne. Mathesis IV, 73, 97.
213. Sur les propriétés métriques et cinématiques d'une sorte de quadrangles conjugués. Cyp. Stephanos. Compt. rend. XCV, 677.
214. Zur Construction der Wendepunkte. M. Grübler. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 310.

**Geschichte der Mathematik.**

215. Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes. O. Stolz. Mathem. Annal. XXII, 504.
216. Die arabische Tradition der Elemente Euklid's. J. L. Heiberg. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, hist.-lit. Abth. 1.
217. Ueber einige aus dem Arabischen entlehnte Sternnamen. A. Wittstein. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, hist.-lit. Abth. 169.
218. Die Irrationalitäten der Rabbinen. Ed. Mahler. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, hist.-lit. Abth. 41.
219. Der Tractatus „De quadratura circuli" des Albertus de Saxonia. H. Suter. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, hist.-lit. Abth. 81.
220. Esquisse biographique de Willebrord Snell. P. Mansion. Mathesis IV, 64.
221. Eingabe Johann Kepler's an Kaiser Rudolf II. um Ertheilung eines Generalprivilegs für den Druck seiner Werke (1606 vor März 3). R. Döbner. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, hist.-lit. Abth. 174.
222. Discours prononcé à l'inauguration d'une statue de Fermat. Mouchez. Compt. rend. XCV, 399.
223. Sur un manuscrit de Fermat récemment publié. A. Genocchi. Mathesis IV, 106.
224. Le deux-centième anniversaire de l'invention du calcul différentiel. P. Mansion. Mathesis IV, 163, 177.
225. Considérations générales sur les méthodes scientifiques et applications à la méthode *a posteriori* de Newton et à la méthode *a priori* de Leibnitz. E. Chevreul. Compt. rend. XCVI, 1521.
226. Sur le problème de la décomposition d'un polygone convexe en triangles. E. Catalan. Mathesis IV, 37.
227. Ueber die Einführung der complexen Zahlen. R. Baltzer. Crelle XCIV, 87.
228. Sur les travaux de Frédéric Houtman. Veth. Compt. rend. XCV, 982.
229. Manuscrits sur la théorie de la Lune laissés par M. Biot. F. Lefort. Compt. rend. XCVI, 1483.
230. Funérailles de Jos. Liouville. Faye. Compt. rend. XCV, 468. — Laboulaye ibid. 469.
231. Notice sur Jos. Liouville † 11. Sept. 1882. Jamin. Compt. rend. XCVI, 873.
232. Sur la vie et les travaux de Ém. Plantamour. Faye. Compt. rend. XCV, 495.
233. Sur les travaux de M. Roche. F. Tisserand. Compt. rend. XCVI, 1171.
234. Note biographique sur H. J. S. Smith † 9. Févr. 1883. C. Jordan. Compt. rend. XCVI, 1095.

235. Funérailles de J. A. C. Bresse † 22. Mai 1883. Phillips. Compt. rend. XCVI, 1518.

Vergl. Metrologie 332, 333.

**Gleichungen.**

236. Démonstration du théorème que toute équation algébrique a une racine. Walecki. Compt. rend. XCVI, 772.
237. Ueber die Darstellung der Wurzeln der algebraischen Gleichungen durch unendliche Reihen. R. Dietrich. Grun. Archiv LXIX, 337.
238. Beitrag zur Lösung von Gleichungen höheren Grades. Th. Sinram. Grün. Archiv LXIX, 111. [Vergl. Bd. XXVIII, Nr. 569.]
239. Sur les fonctions du genre zéro et du genre un. Laguerre. Compt. rend. XCV, 828. [Vergl. Bd. XXIX, Nr. 772.]
240. On Mr. Anglin's formula for the successive powers of the root of an algebraical equation. A. Cayley. Quart. Journ. math. XIX, 223.
241. Die Rationalisirung irrationaler algebraischer Functionen. S. Polewski. Grun. Archiv LXIX, 149. [Vergl. Bd. XXVIII, Nr. 576.]
242. Ueber Gleichungen, deren Discriminante ein Quadrat ist. E. Netto. Crelle XCV, 237.
243. Zur Theorie der Gleichungen vierten Grades. Em. Oekinghaus. Grun. Archiv LXIX, 169.
244. Reduction einer biquadratischen Gleichung auf eine cubische. Hoppe. Grun. Archiv LXIX, 111.
245. Résoudre l'équation $\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^2+\left(\frac{x-b}{x+b}\right)^2+\left(\frac{x-c}{x+c}\right)^2+2\frac{x-a}{x+a}\cdot\frac{x-b}{x+b}\cdot\frac{x-c}{x+c}=1.$ Gelin, Gob, Roersch, Collin, Pisani. Mathesis IV, 213.
246. Conditions de divisibilité de $x^p+ax^{p-q}y^q+bx^{p-2q}y^{2q}+cx^{p-3q}y^{3q}+y^p$ par $(x+y)^3$. Gelin. Mathesis IV, 60, 165.
247. Identité de deux expressions algébriques. E. Cesaro. Mathesis IV, 67.
248. Vérification de l'égalité de deux expressions irrationelles. Stuyvaerts. Mathesis IV, 198.
249. On the standard solutions of a system of linear equations. A. Cayley. Quart. Journ. math. XIX, 38.

Vergl. Determinanten 63. Imaginäres 262. Kepler'sches Problem. Substitutionen.

## H.

**Hydrodynamik.**

250. Sur le mouvement et la déformation d'une bulle liquide qui s'élève dans une masse liquide d'une densité plus grande. H. Resal. Compt. rend. XCVI, 822.
251. On the forces experienced by a solid moving in an infinite mass of liquid. H. Lamb. Quart. Journ. math. XIX, 66.
252. On the motion of a liquid in and about cylinders whose transverse sections are the inverse of confocal ellipses with respect to their centre. A. B. Basset. Quart. Journ. math. XIX, 190.
253. On certain physical problems connected with surfaces which are the inverses of ellipsoids of revolution. A. B. Basset. Quart. Journ. math. XIX, 349.
254. Sur le rapport de l'action lunaire à l'action solaire dans le phénomène des marées. Hatt. Compt. rend. XCV, 960.

**Hyperbel.**

255. Chercher le lieu des centres des hyperboles équilatères touchant deux droites données en deux points qui sont en ligne droite avec un point fixe. Bastin. Mathesis IV, 39. — Liénard & Gillet ibid. 39.
256. L'ordonnée du point d'intersection d'une ellipse et d'une hyperbole homofocale rencontre les asymptotes sur la circonférence qui a pour diamètre le grand axe de l'ellipse. Kaelhoff & Pisani. Mathesis IV, 208.

**Hyperbolische Functionen.**

257. Précis de la théorie des fonctions hyperboliques. P. Mansion. Mathesis IV, 5, 28, 80, 101.

**Hyperboloid.**

258. Droites dans un tétraèdre situées sur un même hyperboloide. Jamet. Mathesis IV, 190.

**Hypsometrie.**

259. Sur la différence des pressions barométriques en deux points d'une même verticale. J. Jamin. Compt. rend. XCVI, 395.

## I.

**Imaginäres.**

260. Zur Interpretation der complexen Elemente in der Geometrie. F. Klein. Mathem. Annal. XXII, 242.
261. Eine Uebertragung des Pascal'schen Satzes auf Raumgeometrie. F. Klein. Mathem. Annal. XXII, 246.
262. Construction der imaginären Wurzeln einer Gleichung vierten oder dritten Grades mittels einer festen Parabel. R. Hoppe. Grun. Archiv LXIX, 216.

Vergl. Zahlentheorie 475.

**Invariantentheorie.**

263. On seminvariants. A. Cayley. Quart. Journ. math. XIX, 131. — P. A. Mac Mahon ibid. 337.
264. Zur Theorie der Combinanten. E. Stroh. Mathem. Annal. XXII, 393.
265. Reduction zweier Covarianten binärer Formen. E. Stroh. Mathem. Annal. XXII, 290.
266. Sur les relations qui existent entre les covariants et invariants des formes binaires. R. Perrin. Compt. rend. XCVI, 426, 479, 563, 1717, 1776, 1842.
267. Sur les relations qui existent entre les covariants et les invariants de caractère pair d'une forme binaire du sixième ordre. Cyp. Stephanos. Compt. rend. XCVI, 232, 1564.
268. Sur quelques propriétés d'une forme binaire du huitième ordre. F. Brioschi. Compt. rend. XCVI, 1689.

## K.

**Kegelschnitte.**

269. Ueber das gemischte Kegelschnittbüschel. H. E. M. O. Zimmermann. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 176.
270. Bemerkungen über perspectivische Dreiecke auf einem Kegelschnitte und über eine specielle Reciprocität. C. Beyel. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 250.
271. Zur Construction der Durchschnittspunkte zweier Kegelschnitte. F. Tomes. Grun. Archiv LXIX, 307.
272. Einige Sätze über Kegelschnitte. H. Schroeter. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 160.
273. Osculationstripel am Kegelschnitt. K. Zahradnik. Grun. Archiv LXIX, 419.
274. Méthode simple pour détermiuer les foyers dans les courbes du second degré. G. Dostor. Grun. Archiv LXIX, 432.
275. Équation quadratique des droites menées d'un point aux intersections d'une conique avec une droite. G. Dostor. Grun. Archiv LXIX, 427.
276. Construction der gemeinschaftlichen Tangenten eines Kreises und einer Kegelschnittslinie. C. Schirek. Grun. Archiv LXIX, 408.
277. Conique enveloppe d'une certaine droite. Jeřabek. Mathesis IV, 155. — Bastin ibid. 157.
278. Ueber den Ort der Berührungspunkte der Tangenten von einem Punkte an die Kegelschnitte einer Schaar oder eines Büschels. M. Greiner. Grun. Archiv LXIX, 30.
279. Enveloppe des axes des coniques tangentes à deux droites données en deux points donnés. Pisani. Mathesis IV, 230.

Vergl. Conchoide 60. Ellipse. Elliptische Transcendenten 132. Formen 143. Hyperbel. Kreis. Parabel. Tetraeder 450.

**Kepler'sches Problem.**

280. Solution rapide du problème de Kepler. Ch. V. Zenger. Compt. rend. XCV, 171, 207.
281. Solution du problème de Kepler pour des excentricités considérables. Ch. V. Zenger. Compt. rend. XCV, 416.
282. Remarques concernant le problème de Kepler. R. Radau. Compt. rend. XCV, 274.
283. Sur le problème de Kepler. A. de Gasparis. Compt. rend. XCV, 446.

**Kettenbrüche.**

284. Sur la théorie des fractions continues périodiques. E. de Jonquières. Compt. rend. XCVI, 568, 694, 832, 1020, 1129, 1210, 1297, 1351, 1420, 1490, 1571, 1721.
285. Studien über Kettenbrüche. K. E. Hoffmann. Grun. Archiv LXIX, 205.

**Kreis.**

286. The triplicate-ratio circle. R. Tucker. Quart. Journ. math. XIX, 342.
287. Sur une demi-circonférence partagée en 7 parties égales. Fauchamps & Liénard. Mathesis IV, 41.
288. Circonférence passant par les projections de deux sommets d'un triangle sur la bissectrice du troisième angle. Van Laer & E. Liénard. Mathesis IV, 67. — Thiry ibid. 68.
289. Inscrire à un cercle donné un triangle qui soit semblable à un triangle donné, et homologique avec un second triangle donné, inscrit dans le même cercle. Gob & Stuyvaert. Mathesis IV, 197.
290. Sur un biangle et un triangle formés par des arcs de cercle. Weill. Mathesis IV, 219.
291. Aire d'une quadrilatère curviligne formé par des arcs de circonférence. Tasté. Mathesis IV, 115. — Dethier ibid. 115. — Jeřābek & Janeček ibid. 115.
292. On systems of circles and bicircular quartics. Hom. Cox. Quart. Journ. math. XIX, 74.
293. Sur deux circonférences homothétiques. De Rocquigny etc. Mathesis IV, 211.
294. Propriété géométrique d'un certain groupe de deux systèmes de circonférences concentriques. Brocard. Mathesis IV, 219.
295. Construire deux circonférences tangentes entre elles, tangente chacune à une droite donnée en un point donné, et dont les rayons soient dans un rapport donné. De Boischevalier. Mathesis IV, 42. — Liénard ibid. 43. — Lamarle ibid. 43.

**Krümmung.**

296. Ueber die Krümmung der Flächen. O. Böklen. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 129. [Vergl. Nr. 369.]
297. Ueber die Krümmungsmittelpunkte der Polbahnen. M. Grübler. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 212, 382.

Vergl. Oberflächen 343, 353.

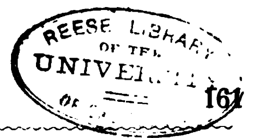
## M.

**Magnetismus.**

298. Les carrés des forces d'induction, produites par le Soleil dans les planètes et dues à la vitesse de révolution de ces corps, sont, toutes choses égales d'ailleurs, en raison inverse des septièmes puissances des distances à l'astre. Induction des comètes des bolides et des étoiles filantes. Quet. Compt. rend. XCV, 514.
299. Les forces d'induction que le soleil développe dans le corps par sa rotation varient, toutes choses égales d'ailleurs, en raison inverse des carrés des distances. Quet. Compt. rend. XCV, 682.
300. Induction lunaire et ses périodes. Quet. Compt. rend. XCV, 722.
301. Sur l'induction terrestre des planètes et, en particulier, sur celle de Jupiter. Quet. Compt. rend. XCV, 1155.
302. Action magnétique du soleil sur la terre et les planètes; elle ne produit pas de variation séculaire dans les grands axes des orbites. Quet. Compt. rend. XCVI, 372.
303. Sur les rapports de l'induction avec les actions électrodynamiques et sur une loi générale de l'induction. Quet. Compt. rend. XCVI, 1849.

**Mannichfaltigkeiten.**

304. Traduction des travaux principaux de Mr. Georg Cantor sur la théorie des ensembles publiés autrefois en allemand. Acta mathematica II, 305, 311, 329, 336, 349, 381.
305. Sur divers théorèmes de la théorie des ensembles de points situés dans un espace continu à $N$ dimensions. G. Cantor. Acta mathematica II, 409.
306. Quelques théorèmes de la theorie des ensembles de points. J. Bendixson. Acta mathematica II, 415.




**Mechanik.**

307. De la nécessité d'introduire certaines modifications dans l'enseignement de la mécanique, et d'un bannir certains problèmes; par exemple, le mouvement du corps solide des géomètres. Y. Villarceau. Compt. rend. XCV, 1321.
308. Sur une extension des principes des aires et du mouvement du centre de gravité. M. Lévy. Compt. rend. XCV, 772, 986.
309. Rapport sur un mémoire de M. Ph. Gilbert sur divers problèmes de mouvement relatif. C. Jordan. Compt. rend. XCV, 111. [Vergl. Bd. XXIX, Nr. 811.]
310. Bewegung eines Cylinders im Hohlcylinder auf schiefer Ebene unter Berührung ohne Gleitung. R. Hoppe. Grun. Archiv LXIX, 162.
311. Einfache Darstellung der Trägheitsmomente von Körpern. R. Mehmke. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 61.
312. Méthode générale pour la solution des problèmes relatifs aux axes principaux et aux moments d'inertie. Balance d'oscillation pour l'évaluation des moments d'inertie. E. Brassinne. Compt. rend. XCV, 337, 446.
313. Die Trägheitsbahn auf der Erdoberfläche. H. Bruns. Mathem. Annal. XXII, 296.
314. Ueber die zusammengesetzte Centripetalbeschleunigung. M. Grübler. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 313.
315. Proportion des distances des sommets d'un triangle à la résultante de trois forces dirigées suivant les côtés. Pisani & Liénard. Mathesis IV, 244.
316. On the energy of strain of an isotropic solid. H. T. Stearn. Quart. Journ. math. XIX, 140.
317. Réduction à la forme canonique des équations d'équilibre d'un fil flexible et inextensible. Appell. Compt. rend. XCVI, 688.
318. Comment se répartit, entre les divers points de sa petite base d'appui, le poids d'un corps dur, à surface polie et convexe, posé sur un sol horizontal élastique. J. Boussinesq. Compt. rend. XCVI, 245.
319. Sur une propriété générale d'un agent dont l'action est proportionnelle au produit des quantités en présence et à une puissance quelconque de la distance. E. Mercadier. Compt. rend. XCVI, 188.
320. Sur les solides d'égale résistance. H. Léauté. Compt. rend. XCV, 1219.
321. Théorie de la résistance des étoffes tissées à l'extension. Tresca. Compt. rend. XCV, 1315.
322. Sur les trajectoires des divers points d'une bielle en mouvement. H. Léauté. Compt. rend. XCVI, 639.
323. Règles pratiques pour la substitution, à un arc donné, de certaines courbes fermées engendrées par les points d'une bielle en mouvement. H. Léauté. Compt. rend. XCVI, 1356, 1649.
324. Sur le poinçonnage et les proues dont il détermine la formation. Tresca. Compt. rend. XCVI, 816.
325. Sur un nouveau système de bascule. A. Picart. Compt. rend. XCVI, 1782.

Vergl. Astronomie. Elasticität. Elektricität. Hydrodynamik. Hyperboloid. Magnetismus. Molekularphysik. Optik. Parabel 377. Pendel. Potential. Schwerpunkt. Wärmelehre.

**Mehrdimensionalgeometrie.**

326. Numerische Berechnung der Winkel von vier Dimensionen. R. Hoppe. Grun. Archiv LXIX, 278.
327. Relation zwischen fünf Elementartetratopen mit vier unabhängigen Grössen. R. Hoppe. Grun. Archiv LXIX, 287.
328. Tetratop auf beliebiger Basis. R. Hoppe. Grun. Archiv LXIX, 297.
329. Drei Sätze für Inhaltsberechnung in der Mehrdimensionengeometrie. R. Hoppe. Grun. Archiv LXIX, 385.
330. Partielles Maximum eines Elementartetratops. R. Hoppe. Grun. Archiv LXIX, 439.

Vergl. Zahlentheorie 477.

**Metrologie.**

321. Sur la théorie générale des unités. A. Ledieu. Compt. rend. XCV, 1328; XCVI, 986.
332. Sur deux mètres en platine ayant appartenu à de Prony. Tresca. Compt. rend. XCVI, 667.
333. Sur deux étalons de l'anne et du pied de Roi, récemment retrouvés. C. Wolf. Compt. rend. XCV, 977.

**Mittelgrössen.**

334. Sur une suite de moyennes. J. Neuberg. Mathesis IV, Supplém. 3.

**Modulargleichungen.**

335. Ueber Congruenzgruppen von Primzahlstufe. J. Gierster. Mathem. Annal. XXII, 176. [Vergl. Bd. XXVII, Nr. 443.]

**Molecularphysik.**

336. La synthèse des cieux et de la terre. Moigno. Compt. rend. XCVI, 1166.
337. Sur l'influence de la quantité du gaz dissous dans un liquide sur sa tension superficielle. S. Wroblewski. Compt. rend. XCV, 284.

## N.

**Normalen.**

338. Zum Normalenproblem der Ellipse. C. Schirek. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 239.
339. Quelques théorèmes sur les normales de la parabole. Gerondal. Mathesis IV, 128.

Vergl. Cubatur 62.

## O.

**Oberflächen.**

340. Il est possible de tracer sur des surfaces quelconques, données de forme et de position, une série indéfinie de lignes identiques de part et d'autre. Gaspar & E. Cesaro. Mathesis IV, 41.
341. Ueber dreifach-orthogonale Flächenschaaren. Ed. Mahler. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 111.
342. Haupteigenschaften einer krummen in der Astronomie auftretenden Oberfläche. A. Wittstein. Grun. Archiv LXIX, 195.
343. Ueber die Eigenschaften des Linienelementes der Flächen von constantem Krümmungsmaass. J. Weingarten. Crelle XCIV, 181; XCV, 325.
344. Ueber die Curven, welche sich so bewegen können, dass sie stets geodätische Linien der von ihnen erzeugten Flächen bleiben. J. N. Hazzidakis. Crelle XCV, 120.
345. Ueber die Classification der Flächen nach der Verschiebbarkeit ihrer geodätischen Dreiecke. H. v. Mangoldt. Crelle XCIV, 21.
346. Ueber die Flächen mit einem System sphärischer Krümmungslinien. H. Dobriner. Crelle XCIV, 116. — A. Enneper ibid. 329.
347. Sur les cercles géodésiques. G. Darboux. Compt. rend. XCVI, 54.
348. Détermination d'une classe particulière de surfaces à lignes de courbure planes dans un système et isothermes. G. Darboux. Compt. rend. XCVI, 1202, 1294.
349. Die geodätische Linie auf der Kreiskegelfläche. Em. Czuber. Grun. Archiv LXIX, 125.
350. On lines of striction. G. Larmor. Quart. Journ. math. XXIX, 381.
351. Ein Beitrag zur Theorie der biplanaren und uniplanaren Knotenpunkte. K. Rohn. Mathem. Annal. XXII, 124.
352. Rapport sur un mémoire de M. de Salvert sur les ombilics coniques. C. Jordan. Compt. rend. XCVI, 105.
353. Sur les surfaces à courbure moyenne nulle sur lesquelles on peut limiter une portion finie de la surface par quatre droites situées sur la surface. H. A. Schwarz. Compt. rend. XCVI, 1011.
354. Die developpable Fläche der conischen Schraubenlinie. Fr. Schiffner. Grun. Archiv LXIX, 444.
355. Zur Theorie der Flächen, deren Krümmungsmittelpunktsflächen confocale Flächen zweiten Grades sind. F. Rudio. Crelle XCV, 240.
356. Propriété de la surface dont l'équation est $F(x,y)+f(z)=0$, $F(x,y)$ étant une fonction homogène. E. Cesaro & C. Servais. Mathesis IV, 45.
357. Note on parallel surfaces. Th. Craig. Crelle XCIV, 162. [Vergl. Bd. XXVIII, Nr. 688.]
358. Surfaces dont l'équation contient une fonction arbitraire. Brocard. Mathesis IV, 127.
359. Ueber das Minimum des Winkels zwischen zwei conjugirten Tangenten auf positiv gekrümmter Fläche. R. Hoppe. Grun. Archiv LXIX, 19.

360. Sur les plans tangents et osculateurs des courbes à double courbure et des surfaces. M. N. Vaněček. Compt. rend. XCVI, 1562. [Vergl. Bd. XXIX, Nr. 708.]
361. Zur Theorie der Flächen dritter Ordnung. Fr. Schur. Crelle XCV, 207.
362. On the sixteen-nodal quartic surface. A. Cayley. Crelle XCIV, 270.
363. Ueber gewisse transcendente Flächen, welche die Cyklide als speciellen Fall enthalten. Holzmüller. Crelle XCIV, 239.
Vergl. Differentialgleichungen 91. Krümmung 296. Quaternionen 409.

**Oberflächen zweiter Ordnung.**

364. Unterscheidungszeichen der Flächen zweiter Ordnung. A. Thaer. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 369.
365. Lineare Construction einer Fläche zweiten Grades aus neun gegebenen Punkten. C. Beyer. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 170.
366. Bemerkungen über die Mittelpunkte von Kegelschnitten einer Fläche zweiten Grades. Beyel. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 123.
367. Généralisation d'une propriété des surfaces du deuxième ordre. Jamet. Mathesis IV, Supplém. II.
368. Problèmes sur les plans tangents aux surfaces de révolution du second degré. Songalayo. Mathesis IV, 166.
369. Ueber die cubische Parabel mit Directrix. O. Böklen. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 378. [Vergl. Nr. 296.]
Vergl. Ellipsoid. Hyperboloid. Sphärik. Tetraeder 445. Ultraelliptische Transcendenten 463.

**Optik.**

370. Neue Untersuchungen über die Lage der Brennlinien unendlich dünner copulirter Strahlenbündel gegen einander und gegen einen Hauptstrahl. L. Matthiessen. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, Supplem. 86.
371. Allgemeine Formeln zur Bestimmung der Cardinalpunkte eines brechenden Systems centrirter sphärischer Flächen mittels Kettenbruchdeterminanten dargestellt. L. Matthiessen. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 343.
372. Ueber Länge und Vergrösserung, Helligkeit und Gesichtsfeld des Kepler-, Ramsden- und Campani-Fernrohrs. C. Bohn. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 25, 74.
373. Du pouvoir amplifiant des instruments d'Optique. Monoyer. Compt. rend. XCVI, 1785.
374. Beiträge zur graphischen Dioptrik. F. Kessler. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 65.
375. Ueber Achromasie. F. Kessler. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 1.
376. Sur l'action de l'éther intermoléculaire dans la propagation de la lumière. De Klercker. Compt. rend. XCV, 588.
Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 31.

## P.

**Parabel.**

377. On the time of descent down the arc of a vertical parabola. J. W. L. Glaisher. Quart. Journ. math. XIX, 141.
378. Parabole enveloppe d'un côté d'un triangle. Derousseau etc. Mathesis IV, 89. — E. Liénard ibid. 91.
379. Propriétés de la parabole. Cl. Thiry. Mathesis IV, 236.
380. Une parabole se déplace parallèlement à elle même en touchant une circonférence donnée. Quel est le lieu des foyers? Timmerhans. Mathesis IV, 92.
Vergl. Imaginäres 262. Normalen 389.

**Paraboloid.**

Vergl. Complanation.

**Pendel.**

381. Sur le pendule. R. Lipschitz. Compt. rend. XCV, 1141.

**Planimetrie.**

382. Zur Theilung einer Strecke in $n$ gleiche Theile. M. Sternberg. Grun. Archiv LXIX, 215.
383. Synthetischer Beweis eines elementar-geometrischen Satzes, sowie Einiges über Vertauschbarkeit der Elemente anharmonischer Gebilde. Fr. Hofmann. Grun. Archiv LXIX, 214.

384. Théorèmes sur trois points situés en ligne droite. Van Graefschepe & G. Andrien. Mathesis IV, 158, 189.
385. Étude de transversales. E. Cesaro. Mathesis IV, 85.
386. Théorie des médianes antiparallèles. Gillet. Mathesis IV, 193, 195. — Falisse ibid. 194, 195. — Sum ibid. 193, 194. — Jeřabek ibid. 195. — Lemoine ibid. 196.
387. Nouvelles propriétés du triangle. H. Brocard. Mathesis IV, Supplém. 1.
388. Sur les antiparallèles des côtés d'un triangle. E. Lemoine. Mathesis IV, 201.
389. Théorèmes sur le triangle rectangle. Servais. Mathesis IV, 53.
390. Trouver sur les côtés $AB$, $AC$ du triangle $ABC$ les points $M$, $N$ tels que la droite $MN$ soit parallèle à une direction donnée, et que sa longueur soit à la somme des segments $MB$, $MC$ dans un rapport donné. Jeřabek. Mathesis IV, 89. — Liénard ibid. 89.
391. Condition sous laquelle la moitié d'un côté d'un triangle est moyenne proportionelle entre les deux autres côtés. Van Laer etc. Mathesis IV, 174.
392. Somme constante des aires de trois triangles semblables dont deux sont circonscrits d'une certaine manière au troisième. Fonchamps. Mathesis IV, 66. — J. Neuberg ibid. 66.
393. Sur le point d'intersection des droites qui joignent les sommets d'un triangle aux points où le cercle inscrit touche les côtés opposés. Vandenbroeck etc. Mathesis IV, 245.
394. Démonstration de trois théorèmes élémentaires. Thiry. Mathesis IV, 53.
395. Constructions de triangles. Thiry. Mathesis IV, 54. — Gillet ibid. 55. — — Sum ibid. 55.
396. Transversales d'une série de triangles. Kiehl. Mathesis IV, 239.
397. Zu den Eigenschaften des vollständigen Vierseits. A. Ehlert. Grun. Archiv LXIX, 332.
398. Quadrilatère à diagonales rectangulaires. Cl. Thiry. Mathesis IV, 236.
399. Sur le quadrilatère inscrit à diagonales rectangulaires. Gelin etc. Mathesis IV, 243.

Vergl. Kreis. Mittelgrössen. Schwerpunkt 431.

**Potential.**

400. Examen de l'analogie entre les anneaux électrochimiques et hydrodynamiques et les courbes $\Delta V = 0$. Meilleur procédé de discussion dans la méthode expérimentale. A. Ledieu. Compt. rend. XCVI, 98.

Vergl. Elektricität. Mechanik 313.

**Princip der Homogeneität.**

401. De l'homogénéité des formules. A. Ledieu. Compt. rend XCVI, 1692, 1834.

## Q.

**Quadratur.**

402. Sur un nouvel intégromètre. Abdank-Abakanowicz. Compt. rend. XCV, 1047.
403. Sur les quadratures et les cubatures approchées. P. Mansion. Compt. rend. XCV, 324.
404. Inhaltsbestimmung der einem Dreieck einbeschriebenen, umschriebenen und conjugirten Ellipsen. M. Greiner. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 222.
405. Aire d'un secteur de la courbe $\varrho^2 = a^2 . log \frac{tg \omega}{tg \alpha}$. Brocard. Mathesis IV, 125.
406. Ueber die Verallgemeinerung des Pythagoräischen Lehrsatzes und des Satzes über die Lunulae Hippokratis. P. Schönemann. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 306.
407. Minimum de la somme de trois triangles. Gob & Roersch. Mathesis IV, 241. — Bertrand & Collin ibid. 241. — Minoliti & Pisani ibid 242. — E. Lemoine ibid. 243.

**Quaternionen.**

408. Sur la théorie des quaternions. Cyp. Stéphanos. Mathem. Annal. XXII, 589.
409. Einige Sätze über abwickelbare Flächen, abgeleitet mit Hilfe von Quaternionen. Fr. Graefe. Grun. Archiv LXIX, 1.

Vergl. Geometrie (höhere) 206.

## R.

### Reihen.

410. Ueber Irrationalität von Reihen. M. Stern. Crelle XCV, 197.
411. Sur un théorème d'Abel. E. Catalan. Mathesis IV, 25.
412. Zur Theorie der Potenzreihen. O. Stolz. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 127. [Vergl. Bd. XXIX, Nr. 417.]
413. Ueber gewisse Reihen, welche in getrennten Convergenzgebieten verschiedene, willkürlich vorgeschriebene Functionen darstellen. Alf. Pringsheim. Mathem. Annal. XXII, 109.
414. Ueber die Werthveränderungen bedingt convergenter Reihen und Producte. Alf. Pringsheim. Mathem. Annal. XXII, 455.
415. Ueber Convergenzbezirke. R. Dietrich. Grun. Archiv LXIX, 381.
416. Sur les séries des polynômes. H. Poincaré. Compt. rend. XCVI, 687.
417. Une nouvelle formule générale pour le développement de la fonction perturbatrice. B. Baillaud. Compt. rend. XCVI, 1286, 1641.
418. Sur une série pour développer les fonctions d'une variable. Halphen. Compt. rend. XCV, 629.
419. Sur les séries trigonométriques. H. Poincaré. Compt. rend. XCV, 766.
420. Sur quelques développements en séries. Stieltjes. Compt. rend. XCV, 901, 1043.
421. Sur le développement des fonctions en séries d'autres fonctions. Hugoniot. Compt. rend. XCV, 907, 983. — P. du Bois-Reymond ibid. XCVI, 61. [Vergl. Nr. 146.]
422. Toute puissance $m^n$ d'un nombre $m$ est égale à la somme des $m$ premiers termes d'une progression arithmétique commençant par 1 et ayant pour raison $2(1+m+m^2+\ldots+m^{n-2})$. G. Farisano. Mathesis IV, 166.
423. Sommation d'une série finie. L. Vandenbroeck. Mathesis IV, 238.
424. Sommation de $\sum_{0,n}^{k}\binom{n}{k}a_k$ étant donné $a_0=1,\ a_1=0,\ a_k=(k-1)(a_{k-1}+a_{k-2})$. E. Cesaro. Mathesis IV, 173.
425. Ueber die Lambert'sche Reihe. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 384.
426. Sur les sommes de puissances semblables d'une suite de cosinus. A. Radicke. Mathesis IV, 161.
427. Sommation de deux séries trigonométriques. J. Gillet. Mathesis IV, 46.
428. Une correction des formules stéréotypées de la préface de Callet (tirage de 1879). Em. Barbier. Compt. rend. XCVI, 1648.

Vergl. Elliptische Transcendenten 130. Fourier'sche Reihe. Gleichungen 237. Wahrscheinlichkeitsrechnung 468, 469.

### Rectification.

429. Sur l'approximation des intégrales définies et, en particulier, du périmètre de l'ellipse. P. Mansion. Mathesis IV, Supplém. IV.
430. Ueber den Ellipsenquadranten. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 376.

Vergl. Function 160.

## S.

### Schwerpunkt.

431. Propriété du centre de gravité d'un triangle. Falisse & Henrard. Mathesis IV, 45.
432. Centre de gravité d'un tronc de pyramide triangulaire. J. Mister. Mathesis IV, 84.
433. Centre de gravité du tronc de prisme triangulaire et du parallélipipède tronqué. J. Mister. Mathesis IV, 121.

### Sphärik.

434. Problèmes sur les sphères. Barbarin. Mathesis IV, 217.
435. On spherical cycloidal and trochoical curves. H. M. Jeffery. Quart. Journ. math. XIX, 44.
436. Théorèmes de géométrie sphérique. J. Neuberg. Mathesis IV, 56.
437. On the spherical triangle in elliptic functions. W. W. Johnson. Quart. Journ. math. XIX, 185. [Vergl. Bd. XXVI, Nr. 319.]
438. Ueber sphärische Vielecke, die einem Kreise eingeschrieben und einem andern Kreise umgeschrieben sind. Stoll. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 91.
439. Soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les inclinaisons des médianes d'un triangle sphérique sur les côtés opposés. Démontrer que

$$\frac{\cot\alpha}{\cos\frac{a}{2}(\cos b-\cos c)}=\frac{\cot\beta}{\cos\frac{b}{2}(\cos c-\cos a)}=\frac{\cot\gamma}{\cos\frac{c}{2}(\cos a-\cos b)}.$$

Liénard. Mathesis IV, 23.

440. Un triangle sphérique n'est pas forcément isoscèle, lorsque deux medianes sont égales. E. Gelin etc. Mathesis IV, 209.

**Stereometrie.**

441. Description du dodécaèdre régulier complet. Em. Barbier. Compt. rend. XCV, 560.

Vergl. Mehrdimensionalgeometrie. Schwerpunkt 432, 433. Tetraeder.

**Substitutionen.**

442. Gruppentheoretische Studien. W. Dyck. Mathem. Annal. XXII, 70. [Vergl. Bd. XXIX, Nr. 434.]
443. Sur la primitivité des groupes. W. Dyck. Compt. rend. XCVI, 1024.
444. Sur les fonctions de sept lettres. F. Brioschi. Compt. rend. XCV, 665, 814, 1254.

## T.

**Tetraeder.**

445. Ueber die einer algebraischen Fläche eingeschriebenen regulären Tetraeder mit Berücksichtigung der Flächen zweiter Ordnung. C. Hossfeld. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 351.
446. Sur les tétraèdres de Möbius. P. Mansion. Mathesis IV, 221.
447. Das gleichseitige Tetraeder. Ad. Schmidt. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 321.
448. Théorèmes sur le tétraèdre. V. Jamet. Mathesis IV, 68.
449. Si l'on choisit un point arbitrairement sur chaque arète d'un tétraèdre, les quatre sphères passant respectivement par chaque sommet et par les points situés sur les trois arêtes adjacentes ont un point commun. J. Neuberg. Mathesis IV, 16.
450. Lieu du sommet des tétraedres sur une base fixe, aux 6 arêtes desquels on peut inscrire une sphère. Jamet. Mathesis IV, 140. — J. Neuberg ibid. 141.

Vergl. Hyperboloid.

**Thetafunctionen.**

451. Berechnung der Moduln Rosenhain'scher Thetafunctionen. J. Thomae. Ztschr. Math. Phys. XXIX, 117.
452. Ueber Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind. A. Krazer. Mathem. Annal. XXII, 416.
453. Zur Theorie der Thetafunctionen mit zwei Argumenten. F. Caspary. Crelle XCIV, 74.
454. Ueber die principale Transformation der Thetafunctionen mehrerer Variabeln. G. Frobenius. Crelle XCV, 264.

**Trigonometrie.**

455. La théorie des projections en trigonométrie. C. Bergmans. Mathesis IV, 222.
456. Sur trois équations trigonométriques qui sont une conséquence l'une de l'autre. Gelin. Mathesis IV, 47.
457. Sur une division d'un arc de cercle. H. Brocard. Mathesis IV, 86.
458. Rapport du triangle dont les sommets sont les symétriques des sommets d'un triangle donné par rapport aux côtés opposés à ce premier triangle. Bastin. Mathesis IV, 112. — Polet ibid. 113. — Cesaro ibid. 114.
459. Rapport des côtés de deux triangles, des sommets de l'un étant les symétriques des sommets de l'autre par rapport aux côtés opposés. Janeček etc. Mathesis IV, 140.
460. Expression for the area of a convex quadrilateral when the sum of two opposite angles is given. A. H. Anglin. Quart. Journ. math. XIX, 138.

Vergl. Gleichungen 245. Sphärik.

## U.

**Ultraelliptische Transcendenten.**

461. Zur Transformationstheorie der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. M. Krause. Crelle XCV, 256.

462. Ueber Integrale zweiter Gattung. J. Thomae. Crelle XCIV, 241. [Vergl. Bd. XXVIII, Nr. 769.]
463. Geometrische Deutung der Additionstheoreme der hyperelliptischen Integrale und Functionen 1. Ordnung im System der confocalen Flächen zweiten Grades. O. Staude. Mathem. Annal. XXII, 1, 145.
Vergl. Elliptische Transcendenten 133.

**Umkehrungsproblem.**

464. Ueber das Umkehrproblem der elliptischen Integrale. M. Tichomandritzky. Mathem. Annal. XXII, 450.

## W.

**Wärmelehre.**

465. Expressions générales de la température absolue et de la fonction de Carnot. G. Lippmann. Compt. rend. XCV, 1058.
466. Sur la théorie des machines à vapeur de Mr. G. Zeuner. G. A. Hirn. Compt. rend. XCVI, 361, 413.
467. Sur le rendement maximum que peut atteindre un moteur à vapeur. P. Charpentier. Compt. rend. XCVI, 782.

**Wahrscheinlichkeitsrechnung.**

468. Ueber die Entwicklung reeller Functionen in Reihen mittels der Methode der kleinsten Quadrate. J. P. Gram. Crelle XCIV, 41.
469. Détermination des progressions arithmétiques dont les termes ne sont connus qu'approximativement. F. Lucas. Compt. rend. XCVI, 1026.
470. Einführung unvollständiger Beobachtungen in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. W. Küttner. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 193.
471. Die Berechnung der Rententafeln aus Sterblichkeits- und Invaliditätsbeobachtungen. Helm. Zeitschr. Math. Phys. XXIX, 315.
472. Probabilité de certains faits arithmétiques. E. Cesaro. Mathesis IV, 150.

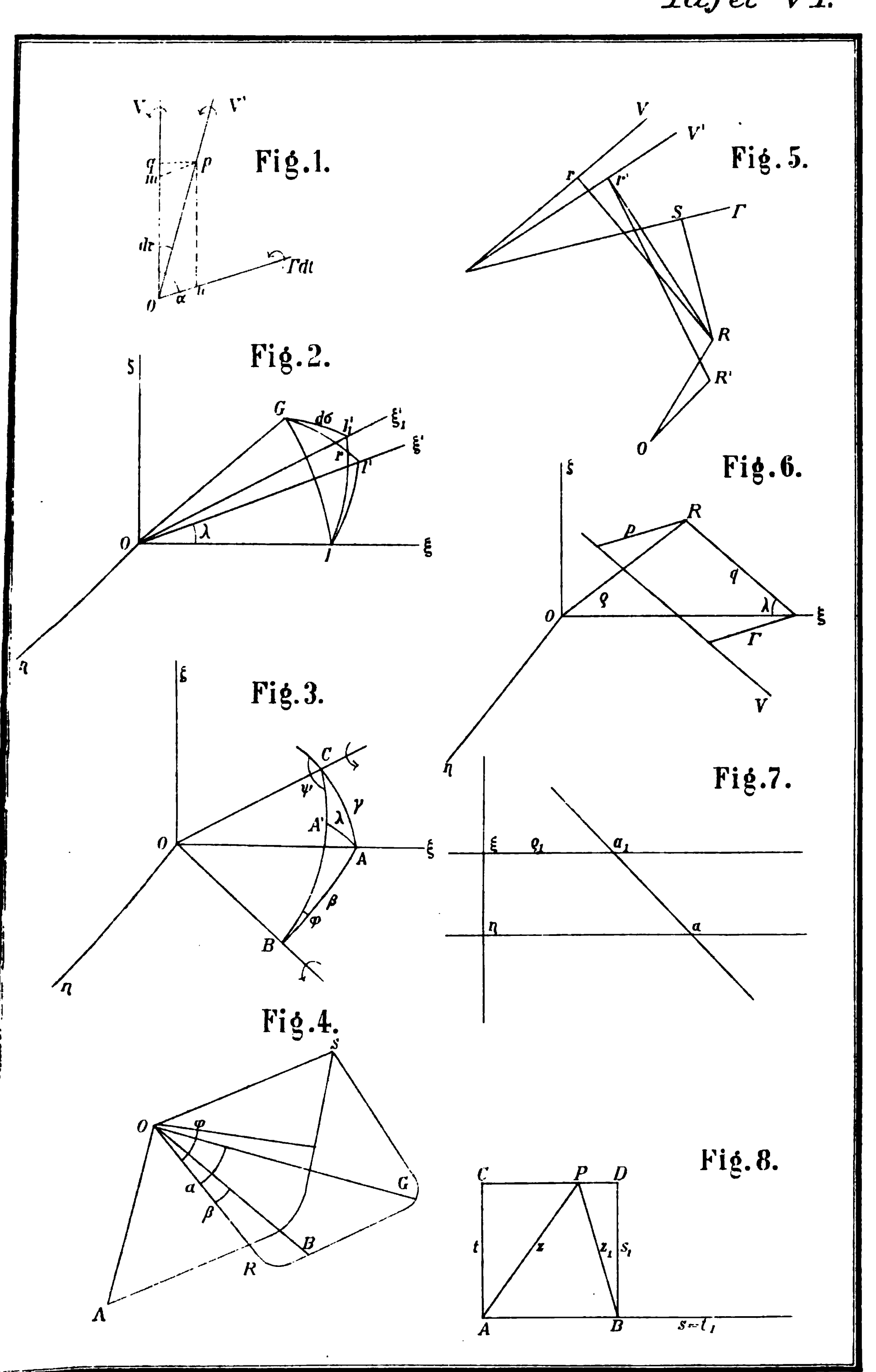
## Z.

**Zahlentheorie.**

473. Formule pour déterminer combien il y a de nombres premiers n'excédant pas un nombre donné. E. de Jonquières. Compt. rend. XCV, 1144; XCVI, 231. — R. Lipschitz ibid. XCV, 1344; XCVI, 58, 114, 327.
474. Die Zerlegung der ganzen Grössen eines natürlichen Rationalitätsbereiches in ihre irreductiblen Factoren. Kronecker. Crelle XCIV, 344. [Vergl. Bd. XXVIII, Nr. 402.]
475. Sur les unités complexes. L. Kronecker. Compt. rend. XCVI, 93, 148, 216.
476. Sur les nombres de fractions ordinaires inégales qu'on peut exprimer en se servant de chiffres qui n'excèdent pas un nombre donné. Sylvester. Compt. rend. XCVI, 409.
477. Ueber polydimensionale Zahlenfiguren. Th. Harmuth. Grun. Archiv LXIX, 90. [Vergl. Bd. XXVIII, Nr. 411.]
478. Sur la fonction $F(n)$ employée par Dirichlet dans son mémoire sur les valeurs moyennes. Ch. Hermite. Acta mathematica II, 299. — R. Lipschitz ibid. 301.
479. Sur l'approximation des sommes de fonctions numériques. Halphen. Compt. rend. XCVI, 634.
480. Décomposition d'un nombre entier $N$ en ses puissances $n^{\text{ièmes}}$ maxima. E. Lemoine. Compt. rend. XCV, 719.
481. Note sur un théorème de Legendre. Sylvester. Compt. rend. XCVI, 463.
482. Théorèmes de partition. Sylvester. Compt. rend. XCVI, 674, 743, 1110, 1276.
483. Sur une généralisation du théorème de Fermat. Picquet. Compt. rend. XCVI, 1136, 1424. — Ed. Lucas ibid. 1300. — Pellet ibid. 1301. — S. Kantor ibid. 1423.
484. Theorems relating to the sum of the uneven divisors of a number. J. W. L. Glaisher. Quart. Journ. math. XIX, 216.
485. Sur une question de divisibilité. A. de Polignac. Compt. rend. XCVI, 485. [Vergl. Bd. XXIX, Nr. 561 u. 943.]
486. Sur le nombre des diviseurs d'un nombre entier. T. Q. Stieltjes. Compt. rend. XCVI, 764. — E Césaro ibid. 1029.

487. Sur un théorème de Crelle. H. Brocard. Mathesis IV, 38.
488. Sur quelques théorèmes de divisibilité. Bastin & E. Lienard. Mathesis IV, 20. — Weill ibid. 21. — D. André ibid. 21.
489. Combien de fois le nombre premier $p$ est-il facteur dans le produit $1.2.3 \ldots m$? E. Cesaro. Mathesis IV, 109.
490. Si $p$ est premier $5^p - 2.3^p + 1$ est multiple de $p$. Servais. Mathesis IV, 110. — Radicke ibid. 111. — Cesaro ibid. 111. — Barrieu ibid. 111. — Realis ibid. 112. — A. Genocchi ibid. 167.
491. $8(2n^2-1)(3n^2-1)-1$ est divisible par $n$, $n$ n'étant divisible ni par 3, ni par 5. Vandenbroeck. Mathesis IV, 245. — Jeřabek ibid. 246.
492. Chiffres ne pouvent servir de terminaison à un nombre triangulaire. H. Brocard. Mathesis IV, 70.
493. Sur le problème de la décomposition des nombres entiers en une somme de cinq carrés. C. Jordan. Compt. rend. XCVI, 879. — J. Bertrand ibid. 1097.
494. Mettre $4(a^2+b^2)^2$ sous la forme d'une somme de cinq carrés. Gob & Roersch. Mathesis IV, 212.
495. On the compositions of a number as a sum of two and four uneven squares. J. W. L. Glaisher. Quart. Journ. math. XIX, 212.
496. Si $n = 2^p$ et $a+b$ est somme de deux carrés, l'expression $a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots \ldots + b^{n-1}$ est également somme de deux carrés. De Rocquigny & Edm. van Aubel. Mathesis IV, 70.
497. Trouver quatre nombres tels que le produit de deux quelconques d'entre eux, augmenté de l'unité, fasse un carré. Boije of Gennäs. Mathesis VI, 235.
498. Questions d'arithmologie avec indication des solutions. De Rocquigny. Mathesis IV, 57.

Vergl. Formen. Kettenbrüche. Wahrscheinlichkeitsrechnung 472.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.

# Historisch-literarische Abtheilung.

## Ueber das quadratische Reciprocitätsgesetz.

**Eine vergleichende Darstellung der Beweise des Fundamentaltheoremes in der Theorie der quadratischen Reste und der denselben zu Grunde liegenden Principien.**

Von

OSWALD BAUMGART.

### Einleitung.

Die höhere Arithmetik zerfällt im Wesentlichen in zwei Hauptabschnitte, in die Theorie der Congruenzen und in die Theorie der homogenen Formen. Einen integrirenden Bestandtheil der Congruenzenlehre überhaupt bildet die Theorie der binomischen Congruenzen, deren Angelpunkt wiederum die Lehre von den Potenzresten ist. „Den Schlussstein dieser letzterwähnten Theorie aber bilden die Reciprocitätsgesetze.“[1]) Obwohl nun die Auffindung dieser Gesetze „von einfach ausgeprägtem Inhalt“[2]) verhältnissmässig leicht durch Induction gelang, so war doch die Begründung derselben mit ganz gewaltigen Schwierigkeiten verbunden: neue Methoden mussten zu diesem Zwecke gefunden und von Gebieten, die mit der Arithmetik anscheinend in gar keinem Zusammenhange standen, musste Beweismaterial herbeigeschafft werden. Und doch gelang zuvörderst nur, die Richtigkeit des quadratischen Gesetzes darzuthun. Aber die Principien, die einzelnen der Beweise für das quadratische Reciprocitätsgesetz zu Grunde lagen, waren in so hohem Maasse der Verallgemeinerung fähig, dass sie auch zur Ableitung der allgemeinen Gesetze benutzt werden konnten.

Im Folgenden sollen nun die sämmtlichen vorhandenen Beweise für das quadratische Reciprocitätsgesetz zusammengestellt und die ihnen zu Grunde liegenden Principien einer vergleichenden Betrachtung unterzogen werden. Der Verfasser glaubt, dass ein solches Beginnen nicht ganz unnütz sei, weil eben jenes Gesetz das Fundamentaltheorem der Lehre von den quadratischen Resten und Nichtresten ist, weil man ferner durch die Principien, die den

---

1) Kummer, Berliner Abh. 1859, S. 19.

2) Gauss, Vorwort zu Eisenstein's Math. Abh., Berlin 1847.

Beweisen dafür zu Grunde liegen, zu neuen, sehr allgemeinen Methoden gelangt, und weil endlich durch die Beweise jenes Gesetzes eine förderliche Wechselwirkung zwischen bis dahin ziemlich oder ganz isolirten Gebieten der Mathematik eingetreten ist. Dazu kommt, dass die Geschichte unseres Satzes die gleichzeitige Geschichte unserer gesammten Mathematik im Kleinen treu wiederspiegelt.

Auf diesen ebenerwähnten eigenthümlichen und reizvollen Umstand wurde ich zuerst durch Herrn Professor Scheibner hingewiesen.

Im ersten Theile sind die sämmtlichen vorhandenen Beweise, soweit sie mir zugänglich waren, in Capitel so geordnet dargestellt, dass die Beweise je eines Capitels denselben Grundgedanken haben. Innerhalb der Capitel folgen sich die Beweise chronologisch. Die Principien selbst werden im zweiten Theile entwickelt. Historische Notizen beginnen und beschliessen die Arbeit.

Zur Bequemlichkeit des Lesers, und auch um die Uebereinstimmung oder Verschiedenheit der Beweise in recht helles Licht zu rücken, ist eine möglichst einheitliche Bezeichnung und Darstellung angewandt worden. Dass dabei nicht nur der Kernpunkt, sondern auch das individuelle Gepräge der einzelnen Beweise unangetastet geblieben ist, braucht wohl nicht erst erwähnt zu werden.

---

## Erster Theil.

### Darstellung der Beweise für das quadratische Reciprocitätsgesetz.

---

### I. Capitel.

#### Vorarbeiten von Fermat bis Legendre.

Nachdem Bachet de Méziriac[1]) die Theorie der linearen diophantischen Gleichungen zu einem gewissen Abschlusse gebracht hatte, trat an die Mathematiker die Frage nach der Auflösung der Gleichungen zweiten Grades, *in specie* der binomischen Congruenzen zweiten Grades heran. Mit anderen Worten, es handelte sich um Aufsuchung leicht erkennbarer Bedingungen, unter welchen die Congruenz

$$x^2 \equiv p \bmod q,$$

wenn $p$ und $q$ gegeben sind, lösbar ist oder nicht.

Es wurden zunächst specielle Fälle untersucht.

Aus einem Briefe aus dem Jahre 1658 von Fermat an den Engländer Kenelm Digby[2]) geht da hervor, dass bereits Fermat die Beding-

---

1) Théorèmes plaisans et délect. qui se font par les nombres.

2) Joh. Wallis' Werke, Bd. II S. 857.

ungen kannte, unter welchen $\pm 1$, 2, $\pm 3$, 5 quadratische Reste oder Nichtreste von ungeraden Primzahlen $q$ sind; aus einem 1641 von Frenicle[1]) an Fermat gerichteten Schreiben ist ferner evident, dass bereits Frenicle Kenntniss hatte, wann $-2$ quadratischer Rest oder Nichtrest von einer Primzahl ist. Wahrscheinlich war dies aber, wie auch Lagrange[2]) annimmt, dem Fermat eher bekannt und von diesem erst aus Frenicle herausgefragt worden.

All' diese Sätze sind durch Induction gefunden und sind ohne Beweis aufgestellt. Für $-1$ wurde der Satz zuerst von Euler[3]) mit Hilfe verwandter Reste *(residua socia)* bewiesen; doch misslang ihm das Verfahren für $\pm 2$. Diese Lücke wurde ausgefüllt von Lagrange[4]). Es ist eine merkwürdige Thatsache, dass Euler der Beweis für $\pm 2$ nicht gelang, merkwürdig nämlich insofern, als er den Beweis des Gesetzes für $\pm 3$[5]) kannte. Um noch über $\pm 5$ zu berichten, so war es wiederum Lagrange[6]), dem es zuerst gelang, nachzuweisen, unter welchen Bedingungen diese Zahl quadratischer Rest oder Nichtrest einer Primzahl ist.

Diese Daten, ohne Einfluss auf die eigentliche Darstellung des Gesetzes, sind der Vollständigkeit halber angeführt und um darzuthun, mit welchen Schwierigkeiten die Mathematiker in diesem Falle zu kämpfen gehabt haben. Ist nämlich auch nicht zu verkennen, dass die Aufmerksamkeit der Mathematiker durch die Erfindung der Infinitesimalrechnung von der Zahlentheorie wesentlich abgelenkt wurde, so ist es doch eine bezeichnende Thatsache, dass so einfache Gesetze, wie die eben angeführten, über hundert Jahre ohne Beweis bleiben konnten.

Bis jetzt wurden nur specielle Fälle behandelt. Der Erste nun, der unser Gesetz in seiner vollen Allgemeinheit aufzufassen und aufzustellen versuchte, war Euler. Und es gelang ihm, einen bedeutenden Schritt vorwärts zu thun. In einer „Observationes circa divisionem quadratorum per numeros primos"[7]) betitelten Abhandlung theilt er vier Sätze mit, die das quadratische Reciprocitätsgesetz vollständig ausmachen. Sie heissen:

1. *Si divisor primus fuerit formae* $4ns + (2x+1)^2$, *existente* s *numero primo, tum in residuis occurrent numeri* $+s$ *et* $-s$.
2. *Si divisor primus fuerit formae* $4ns - (2x+1)^2$, *existente* s *numero primo, tum in residuis occurret numerus* $+s$, *at* $-s$ *in non-residuis.*

---

1) Varia opera math. D. Petri de Fermat, senatoris Tolosani. Tolosae (Joh. Pech), 1679. S. 168.

2) Nouv. mém. de l'ac. Royale des sciences et belles lettres de Berlin. 1775. S. 337.

3) Opusc. analyt. 1783. Bd. I S. 135. Vergl. S. 227 dieser Abh.

4) Nouv. mém de l'ac. de Berlin 1775. S. 349, 351.

5) Comment. nov. Petropol., Bd. VIII S. 165.

6) Nouv. mém. de l'ac. Royale etc. 1775, S. 352.

7) Opusc. analyt. 1783, I S. 64, oder: Comm. arithm. collectae, I S. 486.

3. *Si divisor primus fuerit formae* $4ns-4z-1$ *excludendo omnes valores in forma* $4ns-(2x+1)^2$ *contentos, existente* s *numero primo, tum in residuis occurret* $-s$; *at* $+s$ *erit non-residuum.*
4. *Si divisor primus fuerit formae* $4ns+4z-1$, *excludendo omnes valores in forma* $4ns+(2x+1)^2$ *contentos, existente* s *numero primo, tum tam* $+s$ *quam* $-s$ *in non-residuis occurret.*

Wie eine leichte Rechnung zeigt, ist Euler bei Aufstellung des Satzes 3 ein Fehler untergelaufen. Dieses Theorem muss nämlich in seinem zweiten Theile heissen: Ist $s$ von der Form $4n+1$, so ist $+s$ Nichtrest und $-s$ Rest; für $s=4n-1$ tritt das Umgekehrte ein.

Diese vier Sätze, ebenfalls ohne Beweis aufgestellt, involviren, wie schon bemerkt und wie eine spätere Vergleichung ohne Weiteres ergeben wird, das quadratische Reciprocitätsgesetz vollständig. Gauss scheint die eben besprochene Arbeit Euler's nicht gekannt zu haben und schreibt daher die Entdeckung unseres Gesetzes Legendre[1]) zu.

Dieser berühmte Zahlentheoretiker hat allerdings das Verdienst, das Fundamentaltheorem zum ersten Male klar und deutlich in Formeln ausgesprochen [und zwar 1785 in seinen „Rech. d'analyse indéterminée"[2])] und zum Theil bewiesen zu haben. Im vierten Abschnitte seiner ebenerwähnten Arbeit sind folgende acht Theoreme aufgestellt, wobei $A$, $a$ Primzahlen von der Form $4n+1$, $B$, $b$ dagegen solche von der Form $4n+3$ sind.

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Théor. I.* | *Si* $b^{\frac{a-1}{2}}=1$, | *il s'ensuit* | $a^{\frac{b-1}{2}}=1$.[3]) |
| „ *II.* | „ $a^{\frac{b-1}{2}}=-1$, | „ „ | $b^{\frac{a-1}{2}}=-1$. |
| „ *III.* | „ $a^{\frac{A-1}{2}}=1$, | „ „ | $A^{\frac{a-1}{2}}=1$. |
| „ *IV.* | „ $a^{\frac{A-1}{2}}=-1$, | „ „ | $A^{\frac{a-1}{2}}=-1$. |
| „ *V.* | „ $a^{\frac{b-1}{2}}=-1$, | „ „ | $b^{\frac{a-1}{2}}=-1$. |
| „ *VI.* | „ $b^{\frac{a-1}{2}}=-1$, | „ „ | $a^{\frac{b-1}{2}}=-1$. |
| „ *VII.* | „ $b^{\frac{B-1}{2}}=1$, | „ „ | $B^{\frac{b-1}{2}}=-1$. |
| „ *VIII.* | „ $b^{\frac{B-1}{2}}=-1$, | „ „ | $B^{\frac{b-1}{2}}=1$. |

Man sieht hieraus, dass Legendre bei Aufstellung seiner Sätze das Fermat'sche Theorem benutzt hat. In der That folgt aus:

$$x^2 \equiv p \; mod\, q \quad \text{und} \quad p^{q-1} \equiv 1 \; mod\, q,$$

dass die Möglichkeit der Congruenz $x^2 \equiv p \; mod\, q$ abhängig ist von $p^{\frac{q-1}{2}}$. Ist nämlich $p^{\frac{q-1}{2}} \equiv 1 \; mod\, q$, so ist jene Congruenz lösbar; ist dagegen

1) Disquis. Arithm. Art. 151.
2) Hist. de l'ac. Royale des sciences 1785, S. 516—517.
3) $b^{\frac{a-1}{2}}=1, \ldots$ muss eigentlich heissen $b^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1 \; mod\, a, \ldots$

$p^{\frac{q-1}{2}} \equiv -1 \mod q$ (andere Fälle können überhaupt nicht eintreten), so ist jene Congruenz nicht lösbar.

Zum ersten Male in der Form, wie wir den Satz gegenwärtig aussprechen, ist er ebenfalls von Legendre gegeben worden und zwar in seinem „Essai sur la théorie des nombres".[1]) Auf S. 186 bemerkt da zunächst Legendre: „*Comme les quantités analogues* $N^{\frac{c-1}{2}}$ *se rencontreront fréquemment dans le cours de nos recherches nous emploierons le caractère abrégé* $\left(\frac{N}{c}\right)$ *pour exprimer le reste que donne* $N^{\frac{c-1}{2}}$ *divisé par* c, *reste qui suivant ce qu'on vient de voir ne peut être que* $+1$ *ou* $-1$." Auf S. 214 heisst es dann weiter: „*Quelques soient les nombres premiers* m *et* n, *s'ils ne sont tous deux de la forme* $4x-1$, *on aura toujours* $\left(\frac{n}{m}\right)=\left(\frac{m}{n}\right)$; *et s'ils sont tous deux de la forme* $4x-1$, *on aura* $\left(\frac{n}{m}\right)=-\left(\frac{m}{n}\right)$. *Ces deux cas généraux sont compris dans la formule:*

$$\left(\frac{n}{m}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}}\left(\frac{m}{n}\right)."$$

Dies Gesetz nennt Legendre das quadratische Reciprocitätsgesetz im Unterschied von Gauss, der es „Theorema fundamentale in doctrina de residuis quadraticis" bezeichnet. 150 Jahre nachdem die ersten speciellen Fälle entdeckt waren, war es also einem der bedeutendsten Zahlentheoretiker gelungen, das Gesetz in allgemeinster Form und elegantester Fassung auszusprechen.

Auf die Art, wie Legendre den Satz zu beweisen suchte, werden wir später zurückzukommen Gelegenheit haben. Hier bemerken wir nur, dass der Nachweis unvollständig ist; und eben dieser Unvollständigkeit halber übergehen wir ihn hier.[2])

Wenden wir die Legendre'sche Bezeichnung an, so haben wir bis jetzt bemerkt:

$$\text{I)}\ \left(\frac{-1}{q}\right)=(-1)^{\frac{q-1}{2}}; \qquad \text{II)}\ \left(\frac{2}{q}\right)=(-1)^{\frac{q^2-1}{8}};$$

$$\text{III)}\ \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}},$$

wobei $p$ und $q$ positive ungerade Primzahlen bedeuten.

Diese drei Formeln drücken das quadratische Reciprocitätsgesetz aus.

In den zunächst folgenden fünf Abschnitten werden wir nun den Beweis hauptsächlich für Formel III) erbringen und in einem besondern Capitel,

1) A Paris chez Duprat. An VI (1798).
2) Disquis. Arithm. Art. 151, 296, 297 und Additamenta.

S. 227, „die Ergänzungssätze des quadratischen Reciprocitätsgesetzes“, wie die durch Formel I) und II) ausgedrückten Gesetze heissen, darthun.

Ehe wir dazu übergehen, haben wir noch eine von Jacobi[1]) angegebene Verallgemeinerung des Legendre'schen Symbols zu erwähnen, weil dieselbe für das Rechnen mit jenem Symbol von grosser Wichtigkeit ist. Während nämlich Legendre voraussetzt, dass in $\left(\frac{a}{q}\right)$ $q$ eine ungerade positive Primzahl und $a$ eine zu derselben relative Primzahl ist, lässt Jacobi für $q=b$ auch zusammengesetzte Zahlen zu. In $\left(\frac{a}{b}\right)$ werden $a$ und $b$ nur relativ prim vorausgesetzt, die nicht zugleich negativ sind und von denen die letztere ungerade ist. Diese verallgemeinerten Legendreschen Symbole werden von Jacobi durch die Formeln

$$\left(\frac{a}{pqr..}\right)=\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{a}{q}\right)\cdots,\quad \left(\frac{a}{-b}\right)=\left(\frac{a}{b}\right),\quad \left(\frac{abc..}{q}\right)=\left(\frac{a}{q}\right)\left(\frac{b}{q}\right)\cdots$$

definirt, worin $p$, $q$, $r$, ... absolute Primzahlen, welche verschieden, aber auch theilweise oder sämmtlich gleich sein können, bedeuten.

## II. Capitel.

### Gauss' Beweis durch vollständige Induction[2]) in der von Dirichlet[3]) gegebenen Form dargestellt.

#### 1.

Gauss unterscheidet bei seinem ersten Beweise, ebenso wie Legendre, acht verschiedene Fälle, je nach der verschiedenen Natur der in Frage kommenden Primzahlen, so dass der eigentliche Beweis in acht Beweise zerfällt. Die acht Einzelfälle sind:

1. Ist $q=4n+1$, $p=4n+1$ und $\left(\frac{p}{q}\right)=1$, so ist zu beweisen, dass $\left(\frac{q}{p}\right)=1$;
2. ist $q=4n+1$, $p=4n+3$ und $\left(\frac{p}{q}\right)=1$, so ist zu beweisen, dass $\left(\frac{q}{p}\right)=1$;
3. ist $q=4n+1$, $p=4n+1$ und $\left(\frac{p}{q}\right)=-1$, so ist zu beweisen, dass $\left(\frac{q}{p}\right)=-1$;

---

1) Crelle J. XXX, S. 170.
2) Disquis. Arithm. Art. 135—144.
3) Dirichlet, Crelle J. XLVII, S. 139.

4. ist $q=4n+1$, $p=4n+3$ und $\left(\frac{p}{q}\right)=-1$, so ist zu beweisen, dass $\left(\frac{q}{p}\right)=-1$;

5. ist $q=4n+3$, $p=4n+3$ und $\left(\frac{p}{q}\right)=1$, so ist zu beweisen, dass $\left(\frac{q}{p}\right)=-1$;

6. ist $q=4n+3$, $p=4n+1$ und $\left(\frac{p}{q}\right)=1$, so ist zu beweisen, dass $\left(\frac{q}{p}\right)=1$;

7. ist $q=4n+3$, $p=4n+3$ und $\left(\frac{p}{q}\right)=-1$, so ist zu beweisen, dass $\left(\frac{q}{p}\right)=1$;

8. ist $q=4n+3$, $p=4n+1$ und $\left(\frac{p}{q}\right)=-1$, so ist zu beweisen, dass $\left(\frac{q}{p}\right)=-1$.

Diese acht einzelnen Sätze machen also das Reciprocitätsgesetz[1]) vollständig aus; sie lassen sich nun zunächst in die folgenden drei zusammenziehen:

I. Ist $q=4n+1$ und $\left(\frac{p}{q}\right)=1$, so ist zu zeigen, dass $\left(\frac{q}{p}\right)=1$;

II. „ $q=4n+1$ „ $\left(\frac{p}{q}\right)=-1$, „ „ „ „ „ $\left(\frac{q}{p}\right)=-1$;

III. „ $q=4n+3$ „ $\left(\frac{\alpha}{q}\right)=1$, „ „ „ „ „ $\left(\frac{q}{\alpha}\right)=(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}$.

Im Falle III ist $\alpha=\pm p$. Ist nämlich $\left(\frac{p}{q}\right)=-1$, so folgt aus $\left(\frac{p}{q}\right)\equiv p^{\frac{q-1}{2}} \mod q$ $\left(\frac{-p}{q}\right)=+1$, so dass der Fall $\left(\frac{p}{q}\right)=-1$ einer weiteren Untersuchung nicht bedarf.

Fassen wir noch den I. und III. Fall zusammen, so reducirt sich unser Beweis darauf, zu zeigen, dass, wenn

I. $q=4n+1$, $4n+3$ und $\left(\frac{\alpha}{q}\right)=1$, $\left(\frac{q}{\alpha}\right)=(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$ und

II. $q=4n+1$ „ $\left(\frac{p}{q}\right)=-1$, $\left(\frac{q}{p}\right)=-1$ ist.

$p$ repräsentirt dabei eine beliebige ungerade positive Primzahl, $\alpha$ eine beliebige ungerade positive oder negative Primzahl.

Im Folgenden setzen wir nun, was immer geschehen darf, $q>p$ voraus und nehmen an, das Gesetz gälte für alle Primzahlen kleiner als $q$ und

1) Das Wort „quadratisch" soll vor Rest, Nichtrest, Reciprocitätsgesetz fortgelassen werden, wenn nicht die Deutlichkeit darunter leidet.

für die aus denselben als Factoren gebildeten zusammengesetzten Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler.

2.

Ist $\left(\frac{\alpha}{q}\right)=+1$, so ist zu zeigen, dass $\left(\frac{q}{\alpha}\right)=(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$ ist. Aus der Voraussetzung folgt, dass die Congruenz $x^2\equiv\alpha \mod q$ lösbar ist. Bezeichnet man die gerade Wurzel derselben mit $e$ $(e<q)$, so ist also

1) $$e^2=\alpha+fq.$$

$f$ ist hierin eine von Null verschiedene ganze Zahl, weil im andern Falle $\alpha=e^2=4e'$ wäre; ferner positiv, weil sonst $\alpha=+p$ und $p-e^2>q$ wäre, was gegen die Voraussetzung $q>p$ streitet; und ungerade, weil $fq=e^2-\alpha$ ungerade ist. Ferner ist $f<q-1$, denn $e$ und $p$ sind kleiner als $q-1$, woraus $qf<q.q-1$ und $f<q-1$ folgt. Nun sind in Gleichung 1) zwei Fälle möglich.

1. *e* und *f* sind relativ prim zu $\alpha$. Aus $e^2\equiv fq \mod \alpha$ ergiebt sich, dass $\left(\frac{fq}{\alpha}\right)=1$ oder $\left(\frac{f}{\alpha}\right)=\left(\frac{q}{\alpha}\right)$, während aus $e^2\equiv\alpha \mod f$ $\left(\frac{\alpha}{f}\right)=1$ folgt. Mithin ist

$$\left(\frac{q}{\alpha}\right)=\left(\frac{f}{\alpha}\right)=\left(\frac{\alpha}{f}\right)(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}\frac{f-1}{2}}=(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}\frac{f-1}{2}},$$

da nach unserer Voraussetzung das Gesetz für alle Primzahlen $<q$ gilt. Da nun $e\equiv \mod 2$, so ist

$$-\alpha\equiv qf \mod 4$$

oder

$$-(\alpha+1)\equiv qf-1\equiv q-1+f-1 \mod 4$$

und

$$-\left(\frac{\alpha^2-1}{4}\right)\equiv\frac{q-1}{2}\cdot\frac{\alpha-1}{2}+\frac{f-1}{2}\cdot\frac{\alpha-1}{2} \mod 2.$$

$\frac{\alpha^2-1}{4}=\frac{\alpha-1}{2}\cdot\frac{\alpha+1}{2}$ ist aber das Product zweier aufeinander folgender Zahlen, folglich gerade, woraus

$$\frac{f-1}{2}\cdot\frac{\alpha-1}{2}\equiv\frac{q-1}{2}\cdot\frac{\alpha-1}{2} \mod 2$$

resultirt, was zu beweisen war.

2. *f* und *e* sind durch $\alpha$ theilbar. Ist $f=\alpha\varphi$ und $e=\alpha\varepsilon$, so wird

2) $$\alpha\varepsilon^2=1+\varphi q,$$

worin $\alpha$ und $q$ relativ prim sind. Zunächst ist nun $\left(\frac{\alpha}{\varphi}\right)=1$ und aus $1^2\equiv-\varphi q \mod \alpha$ folgt $\left(\frac{q}{\alpha}\right)=\left(\frac{-\varphi}{\alpha}\right)$, so dass mit Benutzung unserer allgemeinen Voraussetzung

$$\left(\frac{q}{\alpha}\right)=\left(\frac{-\varphi}{\alpha}\right)\left(\frac{\alpha}{\varphi}\right)=(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}\cdot\frac{\varphi+1}{2}}$$

wird. Da nun $e$ gerade ist, so ergiebt sich $\varphi q \equiv -1 \ mod 4$, woraus wiederum folgt, dass $\varphi + 2 \equiv q \ mod 4$ oder dass $\frac{\varphi+1}{2} \equiv \frac{q-1}{2} \ mod 2$ ist, so dass $\left(\frac{q}{\alpha}\right) = (-1)^{\frac{\alpha-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$ wird, was zu beweisen war.

3.

Wenn $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$ und $q = 4n+1$, so ist darzuthun, dass $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$ wird. Gauss beweist zunächst den Satz, dass es zu $q = 4n+1$ stets eine Primzahl $p' < q$ giebt, von welcher $q$ quadratischer Nichtrest ist, und unterscheidet dabei zwei Fälle.

1. $q = 8n+5$. Ist $q-2$ eine Primzahl, so ist, wenn wir $q-2 = p'$ setzen, $q \equiv 2 \ mod p'$ und damit $\left(\frac{q}{p'}\right) = \left(\frac{2}{p'}\right) = (-1)^{[(8n-3)^2-1]/8} = -1,$[1] so dass $q-2 = p'$ die verlangte Eigenschaft hat. Ist dagegen $q-2$ zusammengesetzt, so muss $q-2$ mindestens einen Primfactor von der Form $8n \pm 3$ haben. Denn hätte $q-2$ nur solche von der Form $8n \pm 1$, so wäre $q-2 = 8\nu - 1$, was gegen die Voraussetzung $q = 8n+5$ ist. Bezeichnen wir einen solchen Primfactor von $q-2$, der die Form $8n \pm 3$ hat, mit $p'$, so ist also $q \equiv 2 \ mod p'$ und wiederum $\left(\frac{q}{p'}\right) = -1$, so dass es auch in diesem Falle eine Primzahl $p' < q$ giebt, von der $q$ quadratischer Nichtrest ist.

2. $q = 8n+1$. Wäre in diesem Falle $q$ quadratischer Rest aller ungeraden Primzahlen kleiner als $2m+1$ $(< q)$, so wäre $q$, weil Modulo 8 der positiven Einheit congruent, quadratischer Rest von jeder Zahl, die nur aus Factoren kleiner oder gleich $2m+1$ bestände. Folglich gäbe es Zahlen $k$, welche der Congruenz genügten:

$$k^2 \equiv q \ mod M, \quad M = 1.2 \ldots 2m+1 = (2m+1)!$$

$k$ selbst wäre relativ prim zu $M$ und $q$, weil sonst $M$ und $q$ einen Factor gemeinsam hätten, was nicht möglich ist. Aus jener Congruenz würde folgen:

$$k^2-1 \ldots . k^2-m^2 \equiv q-1 . q-2^2 \ldots . q-m^2 \ mod M.$$

Es ist nun aber

$$k . k^2-1 \ldots . k^2-m^2 = k-m . k-m+1 \ldots . k . k+1 \ldots k+m$$

als Product von $2m+1$ aufeinanderfolgenden Zahlen durch $M$ theilbar, folglich müsste

1) Der Nachweis für die Richtigkeit der Formel $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$ findet sich S. 227 flgg.

$$3)\qquad \frac{k.q-1^2.q-2^2.\ldots.q-m^2}{1.2\ldots(2m+1)}=z$$

eine ganze Zahl sein. Nun ist aber

$$\begin{aligned}(2m+1)! &= [(m+1)-m].[(m+1)-(m-1)]\ldots.[(m+1)-1]\\ &\times[(m+1)-0].[(m+1)+m]\ldots.[(m+1)+1]\\ &=(m+1)[(m+1)^2-m^2]\ldots.[(m+1)^2-1].\end{aligned}$$

Setzt man diesen Werth in 3) ein, so würde sich ergeben, dass

$$z=\frac{1}{m+1}\cdot\frac{q-1^2}{(m+1)^2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{q-m^2}{(m+1)^2-m^2}$$

eine ganze Zahl sein müsste.

Nimmt man nun für $m$ die grösste ganze Zahl unterhalb $\sqrt{q}$ an, so dass unsere Voraussetzung $2m+1<q$ bestehen bleibt, so folgt, da $(m+1)^2<q$, dass $z$ ein echter Bruch ist. Die Voraussetzung über den Restcharakter von $q$ ist daher falsch und man kommt zu dem Resultat: Ist $q$ eine Primzahl von der Form $8n+1$, so giebt es unterhalb $2\sqrt{q}+1$, also unterhalb $q$ mindestens eine ungerade Primzahl $p'$, von der $q$ quadratischer Nichtrest ist.

4.

Es giebt also für jede ungerade Primzahl $q=4n+1$ eine ungerade Primzahl $p'<q$, so dass $\left(\frac{q}{p'}\right)=-1$ ist. Nun muss aber auch $\left(\frac{p'}{q}\right)=-1$ sein; denn wäre $\left(\frac{p'}{q}\right)=+1$, so hätte man nach dem Vorhergehenden $\left(\frac{q}{p'}\right)=(-1)^{\frac{p'-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}=+1$. Für $p'$ und $q$ gilt also das Reciprocitätsgesetz.

Es war darzuthun, dass $\left(\frac{q}{p}\right)=-1$ ist. Da aber $\left(\frac{q}{p'}\right)=-1$ ist, so kann die Aufgabe dahin modificirt werden: nachzuweisen, dass

$$\left(\frac{q}{pp'}\right)=+1$$

wird. Nach Voraussetzung ist $\left(\frac{p}{q}\right)=-1$, folglich $\left(\frac{pp'}{q}\right)=+1$, d. h.: die Congruenz $x^2\equiv pp' \bmod q$ ist lösbar. Bezeichnet man die gerade Wurzel mit $e\,(<q)$, so ist

$$4)\qquad e^2=pp'+fq,$$

wobei $f$ eine ungerade ganze Zahl, kleiner als $q$ repräsentirt. Man hat nun zu unterscheiden:

1. $e$ und $f$ sind weder durch $p$, noch durch $p'$ theilbar. Dann ist $e^2\equiv pp' \bmod f$, mithin $\left(\frac{pp'}{f}\right)=1$, und ferner $e^2\equiv qf \bmod pp'$, mithin $\left(\frac{qf}{pp'}\right)=1$ oder $\left(\frac{q}{pp'}\right)=\left(\frac{f}{pp'}\right)$, so dass sich ergiebt

$$\left(\frac{q}{pp'}\right) = (-1)^{\frac{f-1}{2}\cdot\frac{pp'-1}{2}}.$$

Da aber $e \equiv 0 \; mod 2$ und ausserdem $q \equiv 1 \; mod 4$, so ist

$$f \equiv -pp' \; mod 4, \quad \text{mithin} \quad \frac{f-1}{2}\cdot\frac{pp'-1}{2} \equiv -\frac{pp'+1}{2}\cdot\frac{pp'-1}{2} \; mod 2.$$

Die rechte Seite der vorstehenden Congruenz ist aber das Product zweier aufeinander folgender Zahlen, also gerade, so dass

$$\left(\frac{q}{pp'}\right) = 1$$

resultirt, w. z. b. w.

2. *e* und *f* sind durch $p'$, nicht aber durch $p$ theilbar. Setzt man $e = \varepsilon p'$, $f = \varphi p'$, so wird $\varepsilon^2 p' = p + q\varphi$, worin $\varphi$ relativ prim zu $p$, $p'$ und $q$ ist. Wir erhalten somit

$$\left(\frac{pp'}{\varphi}\right) = \left(\frac{q\varphi p'}{p}\right) = 1 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{\varphi}{p}\right)\left(\frac{p'}{p}\right).$$

Da ferner $\varepsilon^2 pp' = p^2 + pq\varphi$, so ist $\left(\frac{-q\varphi p}{p'}\right) = 1$, also $\left(\frac{q\varphi}{p'}\right) = \left(\frac{-p}{p'}\right)$, so dass

$$\left(\frac{q}{pp'}\right) = \left(\frac{\varphi}{pp'}\right)\left(\frac{pp'}{\varphi}\right)\left(\frac{p'}{p}\right)\left(\frac{-p}{p'}\right)$$

sich ergiebt. Man erhält so mit Rücksicht auf unsere Voraussetzung:

$$\left(\frac{q}{pp'}\right) = (-1)^{\frac{pp'-1}{2}\,\frac{\varphi-1}{2} + \frac{p-1}{2}\,\frac{p'-1}{2} + \frac{p'-1}{2}}.$$

Nun ist aber in $\varepsilon^2 p' = p + q\varphi$ $\varepsilon$ gerade wegen $e \equiv 0 \; mod 2$, folglich $\varphi \equiv -p \; mod 4$. Demgemäss wird

$$\frac{\varphi-1}{2}\cdot\frac{pp'-1}{2} + \frac{p+1}{2}\cdot\frac{p'-1}{2} \equiv \frac{p+1}{2}\left\{\frac{pp'-1}{2} + \frac{p'-1}{2}\right\}$$

$$\equiv -p\cdot\frac{p+1}{2}\cdot\frac{p'-1}{2} \; mod 2,$$

so dass $\left(\frac{q}{pp'}\right) = +1$ wird, w. z. b. w.

3. Der Fall, dass *e* und *f* durch $p$, nicht aber durch $p'$ theilbar ist, ist dem vorigen durchaus analog.

4. *e* und *f* sind durch $p$ und $p'$ theilbar. Ist $e = \varepsilon pp'$, $f = \varphi pp'$, so wird

$$(\varepsilon pp')^2 \equiv pp' + q\varphi pp' \quad \text{und} \quad \varepsilon^2 pp' = 1 + q\varphi,$$

worin $\varphi$ relativ prim ist zu $p$, $p'$ und $q$.

Daraus folgt zunächst $\left(\frac{-q\varphi}{pp'}\right) = +1$ oder $\left(\frac{q}{pp'}\right) = \left(\frac{-\varphi}{pp'}\right)$. Da ferner $\left(\frac{pp'}{\varphi}\right) = 1$ ist, so ergiebt sich $\left(\frac{q}{pp'}\right) = \left(\frac{-\varphi}{pp'}\right)\left(\frac{pp'}{\varphi}\right)$, welche Gleichung zu dem Resultat führt:

$$\left(\frac{q}{pp'}\right) = (-1)^{\frac{\varphi+1}{2}\cdot\frac{pp'-1}{2}},$$

da $\varphi$, $p$, $p'$ sämmtlich kleiner als $q$ sind und somit unsere allgemeine Voraussetzung Platz greift. Nun ist aber $e$ gerade und $q \equiv 1 \; mod 4$, folglich $\varphi \equiv -1 \; mod 4$ oder $\frac{\varphi+1}{2} \equiv 0 \; mod 2$, so dass

$$\left(\frac{q}{pp'}\right) = +1$$

sich ergiebt. Damit ist auch der zweite Theil des Beweises erledigt.

Es ist aber das Gesetz für $p$ und $q$ nur unter der Voraussetzung bewiesen, dass es zwei Primzahlen giebt, kleiner als die grösste jener beiden, für welche das Gesetz schon Giltigkeit hat, und dass, wenn das Reciprocitätsgesetz für Primzahlen gilt, dann auch das entsprechende Gesetz für verallgemeinerte Restcharakteristiken gilt.

Was den ersten Theil der Voraussetzung betrifft, so erledigt sich derselbe dadurch, dass die beiden kleinsten ungeraden Primzahlen 3 und 5 dem Euler'schen Gesetze gehorchen. In Bezug auf den zweiten Theil der Voraussetzung sei Folgendes bemerkt.[1])

Sind in $\left(\frac{P}{Q}\right)$ $P$ und $Q$ positive zusammengesetzte ungerade Zahlen ohne gemeinsamen Theiler und zerlegt man $P$ und $Q$ in ihre Primfactoren

$$P = p.p'.p''\ldots, \quad Q = q.q'.q''\ldots,$$

so wird sein

$$\left(\frac{P}{Q}\right)\left(\frac{Q}{P}\right) = \prod \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right),$$

wo jedes $p$ mit jedem $q$ zu combiniren ist.

Nimmt man nun an, das quadratische Reciprocitätsgesetz gälte für alle $p$ und $q$, so erhält man

$$\left(\frac{P}{Q}\right)\left(\frac{Q}{P}\right) = \prod (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} = (-1)^{\Sigma\left(\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}\right)},$$

wo das Summenzeichen alle Combinationen von $p$ und $q$ umfasst, so dass

$$\sum\left(\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}\right) = \sum\frac{p-1}{2}\cdot\sum\frac{q-1}{2}$$

wird. Aus

$$R = \Pi r = \Pi\{(r-1)+1\} \equiv 1 + \Sigma(r-1) \; mod 4,$$

$r$ ungerade vorausgesetzt, ergiebt sich aber, dass

$$\frac{R-1}{2} \text{ und } \sum\frac{r-1}{2}$$

gleichartige Zahlen sind. Aus demselben Grunde erhalten wir

$$\sum\frac{p-1}{2}\cdot\sum\frac{q-1}{2} \equiv \frac{P-1}{2}\cdot\frac{Q-1}{2} \equiv \sum\left(\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}\right) \; mod 2,$$

so dass

$$\left(\frac{P}{Q}\right)\left(\frac{Q}{P}\right) = (-1)^{\frac{P-1}{2}\cdot\frac{Q-1}{2}}.$$

Die gemachte Voraussetzung ist also zulässig, folglich gilt das quadratische Reciprocitätsgesetz in voller Allgemeinheit.

1) Gauss, Disq. Ar. Art. 132 und Dirichlet, Crelle J. XLVII, S. 143.

## III. Capitel.

### Beweise durch Reduction.

#### I. Gauss'[1]) dritter Beweis.

1.

Bezeichnet $q$ eine positive Primzahl, so ist $1, 2, \cdots \frac{q-1}{2}$ ein vollständiges System incongruenter positiver absolut kleinster Reste Modulo $q$; während, $a$ relativ prim zu $q$ vorausgesetzt, $a, 2a, \cdots \frac{q-1}{2}a$ nur $\frac{q-1}{2}$ incongruente, nicht aber nothwendig positive absolut kleinste Reste Modulo $q$ liefert. Sind in dieser letzteren Reihe $\varrho_1, \ldots \varrho_\lambda$ positive absolut kleinste, $-\sigma_1, \ldots -\sigma_\mu$ negative absolut kleinste Reste Modulo $q$, so erhellt zunächst, dass die $\varrho$ und die $\sigma$ sämmtlich von einander und von Null verschieden sind, also abgesehen von der Reihenfolge Modulo $q$ den Zahlen $1, \ldots \frac{q-1}{2}$ congruent sind.

Wären nämlich zwei Reste $ta \mod q$ und $sa \mod q$ einander gleich, so müsste sein

$$(t-s)a \equiv 0 \mod q$$

oder, wenn man vom Vorzeichen der $\sigma$ absieht,

$$(t+s)a \equiv 0 \mod q,$$

was beides nicht möglich ist, da $t$ und $s$ von einander verschieden und kleiner als $\frac{q}{2}$ sind. Man erhält somit

$$a^{\frac{q-1}{2}}\, 1.2 \cdots \frac{q-1}{2} \equiv (-1)^\mu \Pi\varrho\, \Pi\sigma \mod q \quad \text{oder} \quad a^{\frac{q-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{q}\right) = (-1)^\mu \mod q.$$

Diese Formel gilt für jedes zu $q$ relativ prime $a$, also auch für eine von $q$ verschiedene Primzahl $p$, so dass sich das Resultat findet: Sind $p$ und $q$ zwei positive ungerade Primzahlen, so ist $\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^\mu$, wenn $\mu$ die Anzahl der negativen absolut kleinsten Reste in $p, 2p, \ldots \frac{q-1}{2}p \mod q$ bedeutet.

2.

Um die in dem vorstehenden Lemma gefundene Zahl $\mu$ weiter zu untersuchen, wendet Gauss die Bezeichnung $\left[\frac{x}{y}\right]$ als grösste in $\frac{x}{y}$ enthaltene ganze Zahl an und findet

$$\mu = \sum_{r=1}^{\frac{q-1}{2}} \left\{\left[\frac{2pr}{q}\right] - 2\left[\frac{pr}{q}\right]\right\} \equiv \sum_r \left[\frac{2pr}{q}\right] \mod 2.$$

1) Comm. Soc. Gott. Vol. XVI S. 69, 1808, Jan. 15 oder Gauss' Werke II, S. 1.

Aendert man in dieser letzteren Summe die letzten $\left[\frac{q+1}{4}\right]$ Glieder nach der Formel $[p-x]+[x]=p-1$, d. h. nach der Formel

$$\left[\frac{2pr}{q}\right]=p-1-\left[\frac{p(q-2r)}{q}\right],$$

so ergiebt sich nach Weglassung der Vielfachen von $p-1\equiv 0 \bmod 2$

$$\mu\equiv\left[\frac{2p}{q}\right]+\left[\frac{4p}{q}\right]+\cdots+\left[\frac{q-1-2\left[\frac{q+1}{4}\right]}{q}\right]$$
$$-\left[\frac{p}{q}\right]-\left[\frac{3p}{q}\right]-\cdots-\left[\frac{\left[\frac{q+1}{4}\right]p}{q}\right] \bmod 2$$

oder

$$\mu\equiv\sum_{r=1}^{\frac{q-1}{2}}\left[\frac{pr}{q}\right] \bmod 2.$$

Diese Summe besteht aus $\frac{q-1}{2}$ Gliedern, deren erstes gleich Null — wenn man $p<q$ voraussetzt — und deren letztes nach

$$\left[\frac{\frac{q-1}{2}p}{q}\right]=\left[\frac{q\frac{p-1}{2}+\frac{q-p}{2}}{q}\right]$$

gleich $\frac{p-1}{2}$ ist; es müssen also Glieder mehrfach vorkommen.

Ist nun $\left[\frac{mp}{q}\right]=n-1$ und $\left[\frac{(m+1)p}{q}\right]=n$, so folgt aus der Ungleichheit

$$\frac{mp}{q}<n<\frac{m+1}{q}p \quad m=\left[\frac{nq}{p}\right].$$

Die Anzahl der Glieder in $\sum_r\left[\frac{pr}{q}\right]$, welche kleiner als $n$ sind, ist daher $\left[\frac{nq}{p}\right]$ Abgesehen von den Grenzwerthen 0 und $\frac{p-1}{2}$ ist mithin $\left[\frac{n+1}{p}q\right]-\left[\frac{nq}{p}\right]$ die Anzahl der Glieder gleich $n$. Da ferner die obige Summe $\frac{q-1}{2}$ Glieder hat, so ist die Anzahl derselben, welche gleich dem Grenzwerth $\frac{p-1}{2}$ sind,

$$\frac{q-1}{2}-\left[\frac{\frac{p-1}{2}q}{p}\right].$$

Daher ist

$$\mu \equiv \sum_r \left[\frac{pr}{q}\right] = 1\left\{\left[\frac{2q}{p}\right]-\left[\frac{q}{p}\right]\right\}+2\left\{\left[\frac{3q}{p}\right]-\left[\frac{2q}{p}\right]\right\}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{p-1}{2}\left\{\frac{q-1}{2}-\left[\frac{\frac{p-1}{2}q}{p}\right]\right\}$$

$$\equiv -\sum_{\varrho=1}^{\frac{1}{2}(p-1)}\left[\frac{q\varrho}{p}\right]+\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2} \mod 2$$

oder

$$\sum_r \left[\frac{pr}{q}\right]+\sum_\varrho \left[\frac{q\varrho}{p}\right] \equiv \frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2} \mod 2.$$

Damit ist aber das Reciprocitätsgesetz bewiesen.

## II. Gauss' fünfter Beweis.[1])

### 1.

In der Reihe der Zahlen

I) $$1,\ 2,\ \ldots\ pq-1,$$

worin $p$ und $q > p$ zwei von einander verschiedene positive ungerade Primzahlen bedeuten mögen, sind $q$ und nur $q$ Zahlen, die Modulo $p$ einem positiven absolut kleinsten Reste $r_p$ congruent sind, nämlich

II) $$r_p,\ r_p+p,\ \ldots\ r_p+(q-1)p.$$

Diese Reihe stellt ein vollständiges Restsystem Modulo $q$ dar, denn es ist offenbar die Differenz zweier Glieder dieser Reihe nicht durch $q$ theilbar. Von den $q$ Gliedern der Reihe II) ergeben nun, wenn man sie Modulo $q$ in drei Theile spaltet, $\frac{q-1}{2}$ Glieder positive absolut kleinste Reste und $\frac{q-1}{2}$ Glieder negative absolut kleinste Reste; die restirenden sind Vielfache von $q$. Man erhält dadurch den Satz:

In der Reihe $1, 2, \ldots pq-1$ giebt es $\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}$ Zahlen, welche Modulo $p$ und Modulo $q$ positiven absolut kleinsten Resten congruent sind, und ebenfalls $\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}$ Zahlen, welche Modulo $p$ positiven absolut kleinsten, Modulo $q$ aber negativen absolut kleinsten Resten congruent sind.

### 2.

Setzt man zur Abkürzung:

$$s = 1, 2, \ldots \frac{pq-1}{2}, \quad S = \frac{pq+1}{2}, \ldots pq-1,$$

$$r_p = 1, 2, \ldots \frac{p-1}{2}, \quad R_p = \frac{p+1}{2}, \ldots\ p-1,$$

$$r_q = 1, 2, \ldots \frac{q-1}{2}, \quad R_q = \frac{q-1}{2}, \ldots\ q-1$$

1) Comm. Soc. Gott. XVI S. 69, 1818, Febr. 10 oder Gauss' Werke II S. 47.

und bezeichnet man mit $(s)_{rR}$ die Anzahl der $s$, welche Modulo $p$ positiven absolut kleinsten, Modulo $q$ aber negativen absolut kleinsten Resten congruent sind, ferner mit $(s)_{Rr}$ die Anzahl der $s$, welche Modulo $p$ negativen absolut kleinsten, Modulo $q$ aber positiven absolut kleinsten Resten congruent sind, so ergiebt sich zunächst

$$1)\qquad (s)_{Rr} = (S)_{rR},$$

wobei das Zeichen $(S)$ in Bezug auf $S$ dieselbe Bedeutung hat, wie $(s)$ in Bezug auf $s$. Nach dem oben abgeleiteten Satze ist aber ferner

$$2)\qquad (s)_{rR} + (S)_{rR} = \frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}.$$

Gauss betrachtet nun die Reihe

$$\begin{array}{ccc} \frac{q+1}{2}, & \frac{q+3}{2}\ \cdots & q-1, \\ q+\frac{q+1}{2}, & \cdots & 2q-1, \\ \frac{p-3}{2}q+\frac{q+1}{2}, & \cdots & \frac{p-1}{2}q-1. \end{array}$$

Die Anzahl der Glieder ist $\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}$ und es sind sämmtliche Zahlen $s$, die Modulo $q$ negativen absolut kleinsten Resten congruent sind, denn die nächste Horizontalreihe würde mit $\frac{pq+1}{2}$ beginnen. Gauss trennt jene $\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}$ Zahlen in 3 Classen.

1. In die erste nimmt er die, welche Modulo $p$ positiven absolut kleinsten Resten congruent sind; ihre Anzahl ist $(s)_{rR}$.
2. In die zweite nimmt er die, welche Modulo $p$ negativen absolut kleinsten Resten congruent sind; ihre Anzahl ist $(s)_{RR}$.
3. Die übrig bleibenden haben die Form $pr_q \equiv R_q \mod q$. Bezeichnet man daher den zum Reste $p$ und zum Modul $q$ gehörigen Exponenten mit $\nu$, so erhält man durch diese Eintheilung

$$3)\qquad (s)_{rR} + (s)_{RR} + \nu = \frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}.$$

Auf ganz analoge Weise folgt aus der Betrachtung des Systemes:

$$\begin{array}{cccc} \frac{p+1}{2}, & \frac{p+3}{2}, & \cdots & p-1, \\ p+\frac{p+1}{2}, & p+\frac{p+3}{2}, & \cdots & 2p-1, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{q-3}{2}p+\frac{p+1}{2}, & \frac{q-3}{2}p+\frac{p+1}{2}, & \cdots & \frac{q-1}{2}p-1, \end{array}$$

wenn man den zum Reste $q$ und zum Modul $p$ gehörigen Exponenten mit $\mu$ bezeichnet:

$$(s)_{Rr} + (s)_{RR} + \mu = \frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}$$

oder mit Rücksicht auf 1)

$$4) \qquad (S)_{rR} + (s)_{RR} + \mu = \frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}.$$

Addirt man 3) und 4) und subtrahirt davon 2), so ergiebt sich:

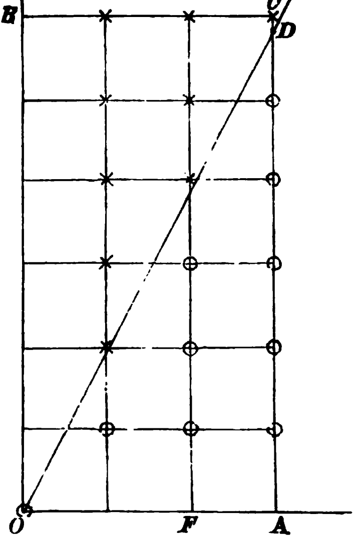
$$2(s)_{RR} + \mu + \nu = \frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}$$

oder

$$\mu + \nu \equiv \frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2} \mod 2, \text{ q. e. d.}$$

## III. Eisenstein's geometrischer Beweis.[1])

Zu den Axen eines ebenen rechtwinkligen Coordinatensystems zieht Eisenstein Parallelen in den Abständen Eins und nennt die Schnittpunkte dieser Geraden Gitterpunkte.




Dies vorausgeschickt, sei nun eine Gerade durch die Gleichung $y = \frac{q}{p} x$ gegeben, in welcher Gleichung $p$ und $q$ wie gewöhnlich zwei von einander verschiedene positive ungerade Primzahlen bedeuten mögen.

Nimmt nun für

$$x = a = 1, 2, \dots \frac{p-1}{2}$$

$y$ den Werth $b$ an, so dass also $b = q\frac{a}{p}$ wird, so wird $[b] = \left[\frac{qa}{p}\right]$ die Anzahl der Gitterpunkte sein, die auf der in $F (OF = a)$ auf der $x$-Axe errichteten Senkrechten zwischen $y = 0$ und $y = b$ liegen. Da nun nach Gauss:

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\left[\frac{q}{p}\right] + \cdots + \left[\frac{\frac{p-1}{2} q}{p}\right]} = (-1)^{\nu}$$

ist, so folgt unmittelbar durch Anschauung, dass $\nu$ (abgesehen von einem geraden Summanden) gleich ist der Anzahl der Gitterpunkte innerhalb des Dreieckes $OAD$, wenn $OA = \frac{p-1}{2}$. Ganz analog erhält man mit Hilfe derselben Gleichung, nur in der Form $x = \frac{p}{q} y$ geschrieben, für $\mu$ in

1) Crelle J. XXVIII (1847) S. 246.

$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^\mu$ eine Zahl, welche (wiederum von einem geraden Summanden abgesehen) gleich ist der Anzahl der Gitterpunkte innerhalb $OBCD$, wenn noch $OB = \frac{q-1}{2}$ ist. Mithin ist $\mu + \nu$ Modulo 2 congruent der Anzahl der Gitterpunkte innerhalb $OABC$; denn es treten keine Punkte doppelt auf, da diese, wie sofort evident, auf der Geraden selbst liegen müssten, was nicht möglich ist. Die Anzahl jener Gitterpunkte ist aber, wie die Anschauung lehrt, gleich $\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}$, womit unser Gesetz abermals seinen Beweis gefunden hat.

### IV. Beweis von Genocchi.[1])

Genügen $p$ und $q$ wiederum den oft angegebenen Bedingungen und setzt man zur Abkürzung:

$$1) \qquad \begin{cases} r = \frac{pq-1}{2} \\ u = hq - kp \\ v = hq + kp - r \end{cases} \qquad \left(\begin{matrix} h < \frac{p-1}{2} \\ k < \frac{q-1}{2} \end{matrix}\right),$$

ist ferner $h'$ diejenige ganze positive Zahl, für welche

$$2) \qquad hq = ip + h' \quad \text{oder} \quad ip < hq < \frac{pq}{2}$$

wird, dann wird

$$3) \qquad kp < hq \quad \text{für} \quad k = 1,\, 2,\, \ldots i,$$

so dass für einen vorgegebenen Werth $h$ der Ausdruck $u$, wenn darin $k$ alle möglichen ganzzahligen positiven Werthe annimmt, $i$ aber auch nur $i$ positive Werthe hat. Das Nullwerden von $u$ ist ausgeschlossen, was unmittelbar aus der Definition dafür folgt. Mit Hilfe von 2) ergiebt sich ferner:

$$hq + kp = (i+k)p + h',$$

woraus, wenn man berücksichtigt, dass $r = \frac{pq-1}{2} = p\frac{q-1}{2} + \frac{p-1}{2}$ ist, sich ableitet

$$hq + kp > r \qquad \text{für} \quad k = \frac{q-1}{2} - i + 1,\ \ \frac{q-1}{2} - i + 2,\ \ldots\ \frac{q-1}{2}$$

$$\text{und für} \quad k = \frac{q-1}{2} - i,$$

wenn in diesem Falle ausserdem noch $h' > \frac{p-1}{2}$ ist. Denn $\frac{q-1}{2} - i$ kann nicht Null werden, weil sonst $hq > r$ sein müsste, was nicht möglich ist. Also wird

$v$, wenn $k$ die ganzen Zahlen $1,\, 2,\, \ldots\, \frac{q-1}{2}$ durchläuft,
$i$ positive Werthe annehmen, wenn $h' < \frac{p}{2}$ und
$i+1$, wenn $h' > \frac{p}{2}$,

1) Mém. courr. et mém. des sav. étrang. XXV, 1852.

d. h.:

$$\text{Anz.}_k \text{ pos. } v = \text{Anz.}_k \text{ pos. } u\text{[1]}, \qquad h' < \frac{p}{2},$$

$$\text{Anz.}_k \text{ pos. } v = \text{Anz.}_k \text{ pos. } u + 1, \quad h' > \frac{p}{2}.$$

Lässt man nun $h$ die Werthe von 1 bis $\frac{p-1}{2}$ durchlaufen, und bezeichnet man mit $\mu$ die Anzahl der Reste $hq$, welche Modulo $p$ grösser als $\frac{p}{2}$ sind, so ist also

4) $$\mu \equiv \text{Anz.}_{h,k} \text{ pos. } v - \text{Anz.}_{h,k} \text{ pos. } u \mod 2.$$

Ist analog Anz. pos. $u'$ = Anzahl der positiven $(kp - hq)$ und $\nu$ die Anzahl der Reste $kp$, welche Modulo $q$ negative absolut kleinste sind, so ist ebenso

5) $$\nu \equiv \text{Anz.}_{h,k} \text{ pos. } v - \text{Anz.}_{h,k} \text{ pos. } u' \mod 2,$$

woraus, wenn man die Werthe für $u$ und $u'$ einsetzt, sich ergiebt:

$$\text{Anz.}_{h,k} \text{ pos. } (hq - kp) - \text{Anz.}_{h,k} \text{ pos. } (kp - hq) \equiv \mu + \nu \mod 2, \quad \text{q. e. d.}$$

## V. Beweis von Stern.[2])

### 1.

Sind $p$ und $q$ wie bisher zwei ungerade positive Primzahlen, so gilt die Congruenz:

1) $$1 \,.\, 2 \,\ldots\, \frac{p-1}{2} \equiv (-1)^u \, 2 \,.\, 4 \,\ldots\, p-1 \mod p,$$

wenn $u$ die Anzahl der ungeraden Zahlen in der Reihe $1, \ldots \frac{p-1}{2}$ ist. Danach wird

2) $$u = \frac{p-\varepsilon}{4},$$

wenn $\varepsilon$ gleich 1 oder $-1$ ist, je nachdem $p$ die Form $4n+1$ oder $4n-1$ hat. Ebenso wird

$$q \,.\, 2q \,\ldots\, \frac{p-1}{2} q = q^{\frac{p-1}{2}} 1 \,\ldots\, \frac{p-1}{2} \equiv (-1)^{u_1} . 2 \,.\, 4 \,\ldots\, p-1 \mod p,$$

wenn $u_1$ die Anzahl der positiven ungeraden Reste Modulo $p$ in der Reihe $q,\ 2q,\ \ldots\ \frac{p-1}{2} \cdot q$ repräsentirt, oder

$$q^{\frac{p-1}{2}} . 1 . 2 \ldots . \frac{p-1}{2} \equiv q^{\frac{p-1}{2}} (-1)^u \, 2 . 4 \ldots . p-1 \mod p,$$

woraus

$$q^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{u_1 - u}$$

folgt. Daher ergiebt sich

3) $$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{u_1 + v_1 - u - v},$$

1) Die Bezeichnung $\text{Anz.}_k$ pos. $v$ ist nach Schering gewählt und ist zu lesen: Anzahl der positiven Werthe von $v$ bei variabelem $k$.

2) Göttinger Nachrichten 1870, S. 237. Dieser Beweis ist nicht ganz correct. Er ist gleichwohl eingereiht der Vollständigkeit halber und weil in ihm ein neuer fruchtbringender Gedanke liegt.

wenn $v$ und $v_1$ in Bezug auf $q$ dieselbe Bedeutung haben, wie $u$ und $u_1$ in Bezug auf $p$. Mit Rücksicht auf 2) hat man daher, um das Reciprocitätsgesetz darzuthun, zu zeigen, dass

$$4)\quad \begin{cases} u_1 + v_1 \equiv \dfrac{p-1}{4} + \dfrac{q-1}{4} \; mod\, 2, \text{ wenn } p \text{ und } q \text{ gleichförmige Zahlen[1]}, \\ \text{oder} \\ u_1 + v_1 \equiv \dfrac{p-1}{4} \; mod\, 2, \text{ wenn } p \text{ und } q \text{ ungleichförmige Zahlen sind.} \end{cases}$$

Ist ferner $u'$ resp. $v'$ die Anzahl der geraden positiven Reste in

$$q,\ 2q,\ \cdots\ xq,\ \cdots\ \frac{p-1}{2} q \; mod\, p$$

resp.

$$p,\ 2p,\ \cdots\ yp,\ \cdots\ \frac{q-1}{2} p \; mod\, q$$

so ist zunächst $u_1 + u' = \frac{p-1}{2}$, $v_1 + v' = \frac{q-1}{2}$ oder $(u_1 + v_1) + (u' + v') = \frac{p-1}{2} + \frac{q-1}{2}$.

Setzt man nun zur Abkürzung

$$5)\qquad U = u_1 + v_1, \quad G = u' + v',$$

so hat man, um das Reciprocitätsgesetz darzuthun, mit Rücksicht auf 4) zu zeigen, dass

$$U - G \equiv 0 \; mod\, 4, \text{ wenn } p \text{ und } q \text{ gleichförmige Zahlen,}$$

$$U - G \equiv 1 \; mod\, 4, \text{ wenn } p \text{ und } q \text{ ungleichförmige Zahlen sind,}$$

oder dass

$$6)\qquad U - G \equiv \frac{q-p}{2} \; mod\, 4 \text{ [2]}$$

wird.

## 2.

Um die Formel $U - G \equiv \frac{q-p}{2} \; mod\, 2$ zu verificiren, bemerkt Stern zunächst, dass nicht derselbe Rest $r$ zugleich in $xq \; mod\, p$ und $yp \; mod\, q$ vorkommen kann. Wäre nämlich gleichzeitig $aq = gp + r$ und $a'p = g'q + r$, so müsste

$$7)\qquad (a + g')\, q = (a' + g)\, p$$

sein. Nun ist aber $a' < \frac{q}{2}$, folglich $g' < \frac{p}{2}$, so dass, da auch $a < \frac{p}{2}$ ist, $a + g' < p$ wird.

Mit Rücksicht auf die Eigenschaften von $p$ und $q$ folgt daher die Unmöglichkeit der Gleichung 7) und die Richtigkeit der obigen Bemerkung.

---

1) Zwei Zahlen heissen gleichförmig, wenn sie beide von der Form $4n+1$ oder $4n+3$ sind, ungleichförmig, wenn die eine von der Form $4n+1$, die andere von der Form $4n+3$ ist.

2) Stern erbringt im Folgenden nur den Nachweis, dass $U - G \equiv \frac{q-p}{2} \; mod\, 2$ ist. Hierauf wurde ich zuerst durch Herrn Prof. Schering aufmerksam gemacht.

Macht man nun die Voraussetzung $q > p$ und setzt man

$$8)\qquad aq = gp + r, \quad a < \frac{p}{2}, \quad r < p,$$

so muss $g < \frac{q-1}{2}$ sein. Wäre nämlich $g = \frac{q-1}{2}$, so wäre, da $a$ für dieses $g$ gleich $\frac{p-1}{2}$ wird, $r = \frac{p-1}{2}q - \frac{q-1}{2}p = -\frac{q-p}{2}$, also negativ, was nicht eintreten soll. Es ist also $g < \frac{q-1}{2}$. Gleichung 7) kann aber auch geschrieben werden:

$$(g+1)\,p = aq + (p-r)$$

oder

$$9)\qquad bp \doteq aq + r', \quad b = g+1 < \frac{q}{2}, \quad r' = p - r < q.$$

Aus 7) und 9) resultirt aber:

Setzt man $q < p$ voraus, so enthalten die beiden Restsysteme $xq \bmod p$ und $yp \bmod q$ sämmtliche Zahlen $p-1$, jedes davon die Hälfte. — Die Anzahl der Reste in $yp \bmod q$ ist $\frac{q-1}{2}$, so dass in dieser Reihe $\frac{q-p}{2}$ Reste grösser als $p$ vorkommen. Sind hierunter $G'$ gerade und $U'$ ungerade, so ist also

$$U' + G' = \frac{q-p}{2},$$

ferner ist, wie sofort evident:

$$G = \frac{p-1}{2} + G', \quad U = \frac{p-1}{2} + U',$$

woraus

$$U - G \equiv U' + G' \equiv \frac{q-p}{2} \bmod 2$$

folgt.

## VI. Beweis von Zeller.[1])

### 1.

Nach dem Gauss'schen Lemma ist $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\mu+\nu}$, wenn $\mu$ resp. $\nu$ die Anzahl der negativen absolut kleinsten Reste in

$$1)\qquad q,\ 2q,\ \cdots \frac{p-1}{2}q \bmod p$$

resp.

$$2)\qquad p,\ 2p,\ \cdots \frac{q-1}{2}p \bmod q$$

bedeuten.

Setzt man $p < q$ voraus, so kommen die $\frac{p-1}{2}$ Reste $1, 2, \cdots \left[\frac{p}{2}\right]$ entweder in Reihe 1) oder in Reihe 2), nie aber in beiden Reihen zugleich

1) Monatsber. der Berl. Ak. 1872, S. 846.

vor. Denn ist $hq \equiv r \; mod \, p$, so gilt die Gleichung $hq - kp = r$, woraus nach der Voraussetzung $p < q$ folgt, dass $k$ eine ganze positive Zahl ist. Daraus ergiebt sich

$$kp \equiv -r \; mod \, q;$$

mithin erhalten wir

$$\mu + \nu \equiv \frac{p-1}{2} + \tau \; mod \, 2,$$

wo $\tau$ die Anzahl der negativen absolut kleinsten Reste in 2) bedeutet, welche grösser als $\frac{p}{2}$ sind.

2.

Ist nun

$$kp \equiv -r \; mod \, q \quad \left(k < \frac{q-1}{2} \;\text{ und }\; \frac{p}{2} < r < \frac{q}{2}\right)$$

und setzt man

$$k' = \frac{1}{2}(q-1) - k, \quad r' = \frac{p+q}{2} - r,$$

so ergiebt sich, dass $k'$ und $r'$ denselben Ungleichheitsbedingungen genügen wie $k$ und $r$ und dass $k'p \equiv -r' \; mod \, q$ ist. Das heisst: Im Allgemeinen kommen alle zwischen $\frac{p}{2}$ und $\frac{q}{2}$ liegenden negativen absolut kleinsten Reste $kp \; mod \, q$ paarweise vor, geben also keinen Beitrag zu $\tau$, da $\tau$ Exponent von $-1$ ist, man aber Multipla von 2 fortlassen kann. Ausgenommen sind, wie sofort erhellt, die Fälle

$$k = 0 \quad \text{und} \quad k = k'\left(= \frac{q-1}{4}\right).$$

1. Ist zuerst $k = 0$, so wird $k' = \frac{q-1}{2}$ und $k'p \equiv \frac{q-1}{2} p \equiv \frac{q-p}{2} \; mod \, q$. Da aber $q > p$, so ist dieser Rest positiv und giebt daher keinen Beitrag zu $\tau$.
2. Ist zweitens $k = k' = \frac{q-1}{4}$, so kann nur dann von einem Reste die Rede sein, wenn $q$ von der Form $4n+1$ ist.

Für $q = 4n+3$ erhält man somit

$$\tau \equiv 0 \; mod \, 2 \quad \text{und} \quad \mu + \nu \equiv \frac{p-1}{2} \; mod \, 2.$$

Für $q = 4n+1$ wird $kp = \frac{q-1}{4} p \equiv \frac{1}{4}(-p \pm q) \; mod \, q$ und man hat zu unterscheiden:

1. $p \equiv 1 \; mod \, 4$. Dann giebt $kp$ einen positiven Rest: $\tau \equiv 0 \; mod \, 2$.
2. $p \equiv 3 \; mod \, 4$. In diesem Falle muss $q$ negativ genommen werden, so dass $\tau \equiv 1 \; mod \, 2$ resultirt.

Fasst man alle diese Fälle zusammen, so erhält man unsere bekannte Formel.

## VII. Beweis von Kronecker.[1])

Sind wiederum $p$ und $q$ zwei von einander verschiedene positive ungerade Primzahlen, und definirt man das Symbol $\left(\frac{p}{q}\right)$ als das Vorzeichen von

$$\prod_{h,k}\left(\frac{h}{p}-\frac{k}{q}\right)\left(\begin{matrix} h=1,\ldots \frac{p-1}{2} \\ k=1,\ldots \frac{q-1}{2}\end{matrix}\right),$$

so ist unmittelbar evident, dass

$$1)\qquad \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$$

ist. Aus

$$\prod\left(\frac{h}{p}-\frac{k}{q}\right)=\frac{1}{p}\prod\left(h-\frac{kp}{q}\right)$$

ergiebt sich ferner

$$\left(\frac{p}{q}\right)=(-1)^{\sum\limits_k\left[\frac{kp}{q}\right]}.$$

Setzt man nun $p\equiv p' \bmod q$, so wird $\left[\frac{kp'}{q}\right]\equiv\left[\frac{kp}{q}\right] \bmod q$ und daher

$$2)\qquad \left(\frac{p'}{q}\right)=\left(\frac{p}{q}\right),$$

während $p'\equiv -p \bmod q$

$$3)\qquad \left(\frac{p'}{q}\right)=\left(\frac{p}{q}\right)(-1)^{\frac{q-1}{2}}$$

giebt. Ist ferner $kp\equiv \pm k' \bmod q$, wo $k'$ ebenfalls einem absolut kleinsten Restsystem Modulo $q$ angehören soll, und bezeichnet man mit $r$ die positive Grösse $k'$ resp. $q-k'$, so wird:

$$\left[\frac{kpp'}{q}\right]=p'\left[\frac{kp}{q}\right]+\left[\frac{p'r}{q}\right]$$

oder, wenn man die Identität:

$$\left[\frac{p'r}{q}\right]+\left[p'\frac{q-r}{q}\right]=p'-1$$

berücksichtigt:

$$\left[\frac{kpp'}{q}\right]=p'\left[\frac{kp}{q}\right]+p'-1-\left[p'\frac{q-r}{q}\right],$$

woraus wiederum folgt:

$$\left[\frac{kpp'}{q}\right]\equiv\left[\frac{kp}{q}\right]+\left[\frac{k'p'}{q}\right] \bmod 2.$$

1) Berl. Mon.-Ber. 1876, S. 301

Aus dieser Formel ergiebt sich die Beziehung

$$4)\qquad \left(\frac{pp'}{q}\right)=\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p'}{q}\right).$$

Wendet man hierauf Formel 1) an und vertauscht dann $p'$ mit $q$, so wird

$$5)\qquad \left(\frac{p'}{pq}\right)=\left(\frac{p'}{p}\right)\left(\frac{p'}{q}\right).$$

Die Formeln 2) bis 5) zeigen nun, dass die in 1) vorkommenden Symbole $\left(\frac{p}{q}\right)$ und $\left(\frac{q}{p}\right)$ genau denselben Gesetzen gehorchen, wie die Legendre-Jacobi'schen Zeichen. Sollen sie mit diesen identisch sein, so muss noch werden:

$$\left(\frac{p}{q}\right)=+1, \text{ wenn } p \text{ quadratischer Rest von } q \text{ ist, und}$$

$$\left(\frac{p}{q}\right)=-1, \text{ wenn } p \text{ quadratischer Nichtrest von } q \text{ ist.}$$

Und diese Beziehungen gelten in der That. Setzt man, um dies für den ersten Fall darzuthun, in 4) $p'=p$, so ergiebt sich sofort in Verbindung mit 2) $\left(\frac{p^2}{q}\right)=+1$. Was den zweiten Fall betrifft, so wäre, wenn es nur eine einzige Zahl $p$ gäbe, für die $\left(\frac{p}{q}\right)=-1$ wäre, mit Hilfe von 2) und 4) evident, dass jeder andere Nichtrest dieselbe Bedingung erfüllte. Und eine solche Zahl $p$ giebt es. Für $q=8n+1$ hat dies bereits Gauss in seinem ersten Beweise, wie wir gesehen haben, dargethan; es erübrigt also nur noch, den Nachweis für $q=8n+3,\ 8n+5,\ 8n+7$ oder, was dasselbe ist, für

$$q\equiv -1 \mod 4 \quad \text{und} \quad q\equiv 5 \mod 8$$

zu erbringen.

Ist zunächst $q\equiv -1 \mod 4$, so folgt aus Formel 3), wenn man $p=2q-1$ setzt, unmittelbar $\left(\frac{p}{q}\right)=-1$.

Für $q\equiv 5 \mod 8$ und $p=\frac{q+1}{2}$ erhält man mit Hülfe derselben Formel 3) $\left(\frac{q}{p}\right)=\left(\frac{2p-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}=-1$ und wegen Formel 1) wiederum $\left(\frac{p}{q}\right)=-1$.

Nach alledem ist erwiesen, dass $\left(\frac{p}{q}\right)$ identisch ist mit dem Legendre-schen Symbole, und Formel 1) enthält somit den Beweis für unseren Satz.

## VIII. Beweis von Bouniakowsky.[1])

### 1.

Sind $a$ und $r$ $(1 < r < 2a-1)$ zwei positive ungerade Zahlen ohne gemeinsamen Theiler und ist $p = 2an + r$ eine ungerade Primzahl, so werden die Zahlen $1, 2, \ldots \frac{p-1}{2}$ oder $1, 2, \ldots an + \frac{r-1}{2}$ dargestellt werden durch das System:

$$1)\quad \begin{cases} 1, & 1+a \ldots & 1+(n-1)a, & 1+na, \\ 2, & 2+a \ldots & 2+(n-1)a, & 2+na, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \frac{r-1}{2}, & \frac{r-1}{2}+a \ldots & \frac{r-1}{2}+(n-1)a, & \frac{r-1}{2}+na, \\ \frac{r+1}{2}, & \frac{r+1}{2}+a \ldots & \frac{r+1}{2}+(n-1)a, & \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \\ a-1, & a-1+a \ldots & a-1+(n-1)a, & \\ a, & 2a \ldots & na. & \end{cases}$$

Bezeichnet man das Product der Glieder einer Horizontalreihe mit dem Anfangsgliede $r_\lambda$ mit $(r_\lambda, a)$, so dass

$$(r_\lambda, a) = r_\lambda (r_\lambda + a)(r_\lambda + 2a) \ldots$$

ist, so wird:

$$2)\qquad 1.2 \ldots \frac{p-1}{2} = (1, a).(2, a) \ldots (a, a).$$

Da die Zahlen $1, 2, \ldots a$ Modulo $a$ mit den Zahlen

$$0, r_1 \ldots r_{\frac{a-1}{2}}, \ldots a - r_1, \ldots a - r_{\frac{a-1}{2}}$$

zusammenfallen, wenn

$$\lambda r \equiv r_\lambda \bmod a,$$

bedeutet, so kann man 2) auch schreiben:

$$3)\quad 1.2 \ldots \frac{p-1}{2} = (0, a) \prod_\lambda (r_\lambda, a) \prod_\lambda (a - r_\lambda, a), \quad \lambda = 1, \ldots \frac{a-1}{2}.$$

Bouniakowsky betrachtet nun in Bezug auf den Modul $p$ das Verhalten der einzelnen Factoren von

A) $(0, a)$; B) $(r_\lambda, a)$; C) $(a - r_\lambda, a)$.

A) $$(0, a) = a.2a.3a \ldots$$

Jeder Factor von $(0, a)$ ist Modulo $p$ einem positiven Vielfachen $(ka)$ von $a$ congruent; und da $n < \frac{p-1}{2}$, so ist stets $k < \frac{p-1}{2}$.

B) $$(r_\lambda, a) = r_\lambda.(r_\lambda + a).(r_\lambda + 2a) \ldots$$

1) Bull. d. St. Pétersbourg, Bd. XXII (1876).

Bouniakowsky nimmt an, $r_\lambda$ sei Modulo $p$ einem negativen Vielfachen von $a$ congruent, d. h. es sei $r_\lambda \equiv -ka \mod p$.

Substituirt man den Werth für $r_\lambda = \lambda r - aq_\lambda$, so wird:

$$\lambda r - aq_\lambda \equiv -ka \mod p, \text{ oder, da } r + 2an = p,$$
$$-ka \equiv -2a\lambda n - aq_\lambda \mod p \text{ oder}$$
$$k \equiv 2\lambda n + q_\lambda \mod p.$$

Die Annahme über $r_\lambda$ ist also richtig: $r_\lambda$ ist, wie die letzte Congruenz zeigt, in der That Modulo $p$ einem negativen Vielfachen ($> n$) von $a$ congruent.

Das Maximum von $\lambda$ ist: $\frac{a-1}{2}$ und das von $q$: $\left[\frac{\frac{a-1}{2}r}{a}\right]$, welches letztere sich aus $r_\lambda = \lambda r - aq_\lambda$ ergiebt.

Da nun $\frac{\frac{a-1}{2}r}{a} = \frac{r-1}{2} + \frac{a-r}{2a}$, so wird: $\left[\frac{\frac{a-1}{2}r}{a}\right] = \frac{r-1}{2}$.

Das Maximum von $k$ wird also

$$(a-1)n + \frac{r-1}{2} = \frac{p-1}{2} - n.$$

Es ist also in $r\lambda \equiv ka \mod p$

$$n < k < \frac{p-1}{2}. \tag{4}$$

Man kann nun unmittelbar das System Congruenzen aufstellen:

$$\left.\begin{array}{r} r_\lambda \equiv -ka \\ r_\lambda + a \equiv -(k-1)a \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ r_\lambda + (n-1)a \equiv -(k-n+1)a \\ \text{und im Falle } r_\lambda \overline{\overline{<}} \frac{r-1}{2} \\ r_\lambda + na \equiv -(k-n)a \end{array}\right\} \mod p.$$

Mit Rücksicht auf 4) ergiebt sich so das Resultat: Jeder Factor von $(r_\lambda, a)$ ist Modulo $p$ congruent $-ka$, $k < \frac{p-1}{2}$, d. h. einem negativen Vielfachen von $a$.

C) Ganz analog zeigt man, dass jeder Factor in $(a - r_\lambda, a)$ Modulo $p$ $ka$, $k < \frac{p-1}{2}$, d. h. einem positiven Vielfachen von $a$ congruent ist.

Ist daher $M$ die Anzahl der Factoren in $\Pi(r_\lambda, a)$, so wird aus 3):

$$1.2 \ldots \frac{p-1}{2} \equiv 1.a.2a, \ldots \frac{p-1}{2}a.(-1)^M \mod p. \tag{5}$$

Auf der rechten Seite müssen als Factoren von $a$ sämmtliche Zahlen $1, \ldots \frac{p-1}{2}$ stehen, wie leicht zu übersehen ist. Aus 5) folgt weiter

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^M.$$

Es ist aber

$$\Pi(r_\lambda, a) = (r_1, a) \cdot (r_2, a) \ldots \left(r_{\frac{a-1}{2}}, a\right).$$

Jedes $(r_\lambda, a)$ besteht aus $\binom{n}{n+1}$ Factoren, wenn $r_\lambda \begin{pmatrix} > \frac{r-1}{2} \\ \leq \frac{r-1}{2} \end{pmatrix}$.

Bezeichnet man daher die Anzahl der $(r_\lambda, a)$, welche aus $n+1$ Factoren bestehen, mit $m$, so dass $m$ nur abhängig ist von $a$ und $r$, so erhält man:

$$M = m(n+1) + \left(\frac{a-1}{2} - m\right)n = \frac{a-1}{2}n + m,$$

also resultirt:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{2}n + m}.$$

Ist nun $q = 2an' + r$, so erhält man die wichtige Beziehung:

$$\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{a}{q}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{2}(n+n')}. \tag{6}$$

2.

Sind $p$ und $q < p$ zwei positive ungerade Primzahlen, so können beide nur durch dieselbe lineare Form ausgedrückt werden, so dass also

$$p = 2an + r, \quad q = 2an' + r \quad (a \equiv r \equiv 1 \bmod 2)$$

ist. Ist nämlich

$$p = q + 2^\nu a, \quad \text{so ist} \quad a = \frac{p-q}{2^\nu}. \tag{7}$$

Wäre aber nun

$$p = 2an + r, \quad q = 2an' + r', \quad \text{so dass} \quad p - q = 2a(n - n') + (r - r'),$$

so müsste $r - r'$, dessen Maximalwerth $2(a-1)$ ist, durch $2a$ theilbar sein, was nicht möglich ist. Es muss also $r = r'$ sein. Aus 7) folgt aber

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{2^\nu a}{q}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{-2^\nu a}{p}\right).$$

Setzt man $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = (-1)^{\left[\frac{p+1}{4}\right]}$ als bekannt voraus[1]), so erhält man mit Hilfe von 5):

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} + \nu\left\{\left[\frac{p+1}{4}\right] + \left[\frac{q+1}{4}\right]\right\} + \frac{a-1}{2}(n+n')}. \tag{8}$$

---

1) Vergl. S. 227.

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden:

I. $p \equiv q \mod 4$. Dann wird $\nu \left\{ \left[\frac{p+1}{4}\right] + \left[\frac{q+1}{4}\right] \right\} \equiv 0 \mod 2$. Ist erstens $p = 4\mu + 1$, $q = 4\mu' + 1$, so ist $\left[\frac{p+1}{4}\right] + \left[\frac{q+1}{4}\right] = \mu + \mu'$ und $p - q = 4(\mu - \mu') = 2^\nu a$. Die Fälle $\nu = 0, 1, 2$ kommen hier nicht in Betracht, da $a$ ungerade vorausgesetzt ist und $p - q \equiv 0 \mod 4$ ist. Wird aber $\nu > 2$, so ist $\mu - \mu'$, mithin auch $\mu + \mu' \equiv 0 \mod 2$, so dass $\nu \left\{ \left[\frac{p+1}{4}\right] + \left[\frac{q+1}{4}\right] \right\} \equiv 0 \mod 2$ wird. Ist zweitens $p = 4\mu + 3$, $q = 4\mu' + 3$, so ergiebt sich aus ganz denselben Gründen dasselbe Resultat.

Was $\frac{a-1}{2}(n + n')$ betrifft, so folgt aus $p - q = 2a(n - n') \equiv 0 \mod 2$, dass $n - n'$, also auch $n + n'$ und damit $\frac{a-1}{2}(n + n')$ gerade Zahlen sind.

Man erhält somit:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}, \quad p \equiv q \mod 4.$$

II. $p - q \equiv 2 \mod 4$. Es ist dann $p = 4\mu + 3$, $q = 4\mu' + 1$ oder $p = 4\mu + 1$, $q = 4\mu' + 3$. Beide Fälle sind vertauschbar, da die Voraussetzung $p > q$ nicht mehr nöthig ist. Es genügt daher die Betrachtung eines Falles. Es sei $p = 4\mu + 1$, $q = 4\mu' + 3$. Es ist dann:

$$\nu \left\{ \left[\frac{p+1}{4}\right] + \left[\frac{q+1}{4}\right] \right\} = \mu + \mu' + 1,$$

ferner

$$p - q = 2a = 2\{2(\mu - \mu') - 1\}, \text{ so dass } \mu - \mu' = \frac{a+1}{2}$$

und

$$\mu + \mu' + 1 \equiv \frac{a+1}{2} + 1 \equiv \frac{a-1}{2} \mod 2$$

wird. Es ist also

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} + \frac{a-1}{2}(n+n'+1)}.$$

Bedenkt man nun, dass $p - q = 2a(n - n') = 2a$ ist, so ergiebt sich $n - n' = 1$ und damit $n + n' + 1 \equiv 0 \mod 2$, so dass

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}, \quad p - q \equiv 2 \mod 4.$$

Fasst man die Fälle I und II zusammen, so ergiebt sich die bekannte Formel.

## IX. Beweis von Schering.[1])

Setzt man das Gauss'sche Lemma voraus: $\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^\mu$, und bezeichnet mit $\frac{kp}{q}$ eine der Grössen $\frac{p}{q}, \frac{2p}{q}, \cdots \frac{\frac{q-1}{2}p}{q}$, so wird $\frac{kp}{q}$ einen Beitrag zu $\mu$ liefern, d. h. $kp$ wird Modulo $q$ einen negativen absolut kleinsten Rest geben, wenn es eine ganze Zahl giebt, die zwischen $\frac{kp}{q}$ und $\frac{kp}{q} + \frac{1}{2}$ liegt. Durchläuft also $h$ die Werthe von 1 bis $\tau$, wo $\tau$ eine beliebige ganze Zahl grösser als $\frac{kp}{q}$ ist, so wird die Anzahl der positiven Werthe des Ausdruckes $\frac{kp}{q} + \frac{1}{2} - h$ vermindert um die Anzahl der positiven Werthe des Ausdruckes $\frac{kp}{q} - h$ gleich Eins oder Null sein, je nachdem $kp$ Modulo $q$ einen negativen oder positiven absolut kleinsten Rest giebt. In Zeichen:

$$\underset{h=1}{\overset{\tau}{\text{Anz.}}}\ \text{pos.}\left\{\frac{kp}{q} + \frac{1}{2} - h\right\} - \underset{h=1}{\overset{\tau}{\text{Anz.}}}\ \text{pos.}\left(\frac{kp}{q} - h\right) = 1,\ 0$$

Für $\mu$ erhält man somit:

$$\mu \equiv \sum_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} \left\{ \underset{h=1}{\overset{\tau}{\text{Anz.}}}\ \text{pos.}\left(\frac{kp}{q} + \frac{1}{2} - h\right) - \underset{h=1}{\overset{\tau}{\text{Anz.}}}\ \text{pos.}\left(\frac{hp}{q} - h\right)\right\} \bmod 2.$$

Da nun $\left\{\frac{q-1}{2}p\right\} : q$ der Maximalwerth von $\frac{kp}{q}$ ist, so kann man

$$\tau = \left[\frac{\frac{q-1}{2}p}{q} + \frac{1}{2}\right] = \frac{p-1}{2} = p'$$

setzen. Es ist dann, wenn man noch in $\frac{kp}{q} + \frac{1}{2} - h$ an Stelle von $h$, $\frac{p+1}{2} - h$ substituirt, was offenbar erlaubt ist, da die Anzahl der positiven Glieder einer Reihe unabhängig von der Anordnung dieser Glieder ist und die charakteristische Eigenschaft $1 \leqq h \leqq \tau$ gewahrt bleibt, und man ferner die einzelnen Summenglieder mit der positiven Grösse $p$ dividirt, was ebenfalls gestattet ist, da es nur auf die Vorzeichen ankommt:

---

1) Gött. Nachr. 1879, Nr. 6 oder Compt. Rend. Bd. 88, S. 1073.

$$\mu \equiv \sum_{k=1}^{q'} \left\{ \underset{h=1}{\overset{p'}{\text{Anz.}}} \text{ pos.} \left( \frac{k}{q} + \frac{h}{p} - \frac{1}{2} \right) - \underset{h=1}{\overset{p'}{\text{Anz.}}} \text{ pos.} \left( \frac{k}{q} - \frac{h}{p} \right) \right\} \bmod 2,$$

$$p' = \frac{p-1}{2}, \quad q' = \frac{q-1}{2}.$$

Bezeichnet man weiter den zum Reste $q$ und Modul $p$ gehörigen Exponenten mit $\nu$, so dass also $\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^\nu$ ist, so erhält man ganz analog wie für $\mu$:

$$\nu \equiv \sum_{h=1}^{p'} \left\{ \underset{k=1}{\overset{q'}{\text{Anz.}}} \text{ pos.} \left( \frac{h}{p} + \frac{k}{q} - \frac{1}{2} \right) - \underset{k=1}{\overset{q'}{\text{Anz.}}} \text{ pos.} \left( \frac{h}{p} - \frac{k}{q} \right) \right\} \bmod 2;$$

die beiden Congruenzen für $\mu$ und $\nu$ ergeben nun die folgende:

$$\mu + \nu \equiv \underset{k,h}{\text{Anz.}} \text{ pos.} \left( \frac{k}{q} - \frac{h}{p} \right) + \underset{h,k}{\text{Anz.}} \text{ pos.} \left( \frac{h}{p} - \frac{k}{q} \right) \bmod 2.$$

Die beiden Doppelsummen enthalten je $\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}$ Glieder. Da $p$ und $q$ Primzahlen sind, so kann nie $\frac{k}{q} - \frac{h}{p}$ Null werden. Es ist aber nothwendig dann entweder $\frac{k}{q} - \frac{h}{p}$ oder $\frac{h}{p} - \frac{k}{q}$ positiv, woraus sich ergiebt:

$$\mu + \nu \equiv \frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2} \bmod 2, \text{ q. e. d.}$$

## X. Beweis von Petersen.[1]

Sind $p$ und $q > p$ zwei von einander verschiedene positive ungerade Primzahlen und ist $2n+1 = 1, 3, 5, \ldots q-2$, so wählt Petersen $m$ so, dass in

$$1) \qquad (2n+1)\,p - 2mq = r$$

$r$ zwischen $+q$ und $-q$ liegt und ungerade ist. Ist nun die Anzahl der negativen $r$ gleich $\mu$, so ist offenbar $\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^\mu$. Von den Resten in 1) trennt nun Petersen diejenigen, welche zwischen $+p$ und $-p$ liegen. Als Bedingung erhält er hierfür die Gleichung: $(2n'+1)\,q - 2m'p = r$, oder wenn man in 1) $pq$ additiv und subtractiv hinzufügt:

$$2) \qquad (p-2m)\,q - (q-2m-1)\,p = r.$$

Hieraus folgt, dass in 1) $r$ zwischen $+p$ und $-p$ liegt für:

$$p - 2m = 1, 3, \ldots p-2, \text{ also für } m = 1, 2, \ldots \frac{p-1}{2}.$$

1) Am. Journal of math. pure and applied Bd. II (1879), S. 285 und Tidsskrift for Math. udgived af Zeuthen, 1879, S. 86.

Setzt man nun für $\mu$, wenn man $p$ und $q$ vertauscht, $\nu$, so dass also $\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^\nu$ wird, so sieht man, ergiebt sich $\nu$ aus 2) in ganz derselben Weise, wie sich $\mu$ aus 1) ergiebt.

$\left(\frac{p}{q}\right)$ und $\left(\frac{q}{p}\right)$ werden also das gleiche oder das entgegengesetzte Vorzeichen haben, je nachdem die Anzahl der Reste $r$ zwischen $-p$ und $-q$ gerade oder ungerade ist. Für solche Reste $-q<(2n+1)p-2mq<-p$ ergiebt sich aber, wenn man setzt $m=n-k$, $p=q-2\alpha$:

$$3)\qquad 2m+1<\frac{k+1}{\alpha}q<2n+2.$$

Daher ist die Anzahl jener negativen Reste $r$ gleich der Anzahl der Brüche $\frac{q}{\alpha}$, $\frac{2q}{\alpha}$, ... $\frac{\alpha-1}{\alpha}\cdot q$, in denen die darin enthaltene grösste ganze Zahl ungerade ist. Die Summe der gleichweit von Anfang und Ende abstehenden Brüche ist aber gleich $q$, also ungerade. Daher ist die Summe der zu diesen Brüchen gehörigen ganzen Zahlen gerade, sie selbst sind mithin zugleich gerade oder zugleich ungerade.

1) Ist daher $\alpha\equiv 1 \; mod\, 2$, so ist $\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)$.

2) Ist dagegen $\alpha\equiv 0 \; mod\, 2$, so ist $\frac{q}{2}$, das Mittelglied in jener Bruchreihe, zu berücksichtigen.

Für $q=4n+1$ wird $\left[\frac{q}{2}\right]=2n$, also wird: $\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)$.

Für $q=4n+3$ dagegen ist $\left[\frac{q}{2}\right]=2n+1$, so dass $\left(\frac{p}{q}\right)=-\left(\frac{q}{p}\right)$ entsteht.

Diese Fälle zusammengefasst ergeben: $\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)\cdot(-1)^{\frac{(\alpha-1)(q-1)}{2}}$.

Es war aber $p=q-2\alpha$, folglich ist:

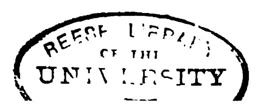
$$(\alpha-1)\frac{q-1}{2}=\frac{q-1}{2}\left(\frac{p-1}{2}-\frac{q-1}{2}-1\right)=\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}-\frac{q-1}{2}\cdot\frac{q-3}{2}$$
$$\equiv\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2} \; mod\, 2,$$

was zu beweisen war.

## XI. Beweis von Voigt.[1])

Bezeichnet man die in $\frac{kp}{q}$ enthaltene grösste ganze Zahl mit $h-1$, so wird $kp$ Modulo $q$ einen negativen absolut kleinsten Rest geben, wenn

1) Schlömilch's Zeitschrift f. Math. u. Phys., Bd. XXVI, 1881, von Prof. Thomae mitgetheilt.



$h-\frac{1}{2}<\frac{kp}{q}<k$ oder $\left(h-\frac{1}{2}\right)q<kp<hq$ ist, und umgekehrt werden zu solchen Grössen $kp$, die die vorstehende Ungleichheit erfüllen, Modulo $q$ negative absolut kleinste Reste gehören. Der Maximalwerth von $h$ ist $\frac{p-1}{2}$, was sich durch Einsetzen des grössten Werthes für $k$, der $\frac{q-1}{2}$ sein soll, in die Ungleichheit ergiebt. Dividirt man die Glieder der Ungleichheitsbedingungen durch $p$, so erhält man: $\frac{h-\frac{1}{2}}{p}q<k<\frac{hq}{p}$, $k$ kann also bei gegebenem $h$ $\left[\frac{hq}{p}\right]-\left[\frac{h-\frac{1}{2}}{p}q\right]$ verschiedene Werthe annehmen. Daher ist, wenn $\nu$ die Anzahl der negativen absolut kleinsten Reste Modulo $q$ in $p,\ 2p,\ \ldots\ \frac{q-1}{2}p$ bezeichnet:

$$\nu=\sum_{h=1}^{\frac{p-1}{2}}\left\{\left[\frac{hq}{p}\right]-\left[\frac{h-\frac{1}{2}}{p}q\right]\right\}.$$

$h-\frac{1}{2}$ durchläuft die Werthe von $\frac{1}{2}$ bis $\frac{p-2}{2}$, was offenbar, abgesehen von der Reihenfolge, die hier aber nicht in Betracht kommt, auch von $\frac{p-2h}{2}\left(h=1,\ldots\frac{p-1}{2}\right)$ geleistet wird, so dass man schreiben kann:

$$\nu=\sum_h\left\{\left[\frac{hq}{p}\right]-\left[\frac{\frac{q}{2}(p-2h)}{p}\right]\right\}=\sum_h\left\{\left[\frac{hq}{p}\right]-\left[\frac{q}{2}-\frac{hq}{p}\right]\right\}$$

oder

$$\nu\equiv\sum_h\left\{\left[\frac{hq}{p}\right]+\left[\frac{q}{2}-\frac{hq}{p}\right]\right\}\ mod\ 2.$$

Setzt man:

$$\left[\frac{hq}{p}\right]=t_h,$$

so wird

$$\nu\equiv\sum\left\{t_h+\left[\frac{q}{2}-t_h-r_h\right]\right\}\ mod\ 2,$$

wo $r_h=\frac{hq}{p}-\left[\frac{hq}{p}\right]$, also wo

$r_h<\frac{1}{2}$, wenn $hq$ Modulo $p$ einen positiven,

$r_h>\frac{1}{2}$, wenn $hq$ Modulo $p$ einen negativen absolut kleinsten Rest giebt.

Nun ist aber:

$$\left[\frac{q}{2} - t_h - r_h\right] = -1 - \left[t_h - \frac{q}{2} - \quad\right]$$

$$= - t_h + \left[\frac{q}{2} - r_h\right],$$

so dass

$$\nu \equiv \sum_h \left[\frac{q}{2} - r_h\right] \mod 2$$

wird. Nach der Definition von $r_h$ ist $\left[\frac{q}{2} - r_h\right] = \frac{q-1}{2}$, wenn $hq$ Modulo $p$ einen positiven, dagegen $= \frac{q-1}{2} - 1$, wenn $hq$ Modulo $p$ einen negativen absolut kleinsten Rest giebt. Bezeichnet man daher den zum Reste $q$ und Modul $p$ gehörigen Exponenten mit $\mu$, so ergiebt sich:

$$\nu \equiv \frac{p-1}{2}\,\frac{q-1}{2} - \mu \mod 2,$$

was zu erweisen war.

## XII. Beweis von Busche.[1])

### 1.

Dem eigentlichen Beweise des quadratischen Reciprocitätsgesetzes schickt Busche folgenden schönen Hilfssatz voraus:

„Nimmt man an, eine und dieselbe Relation $(x, y)$ sei giltig für:

1) $x = \pm 1, \quad y = q;$

2) $x = p, \quad y = \pm 1;$

3) $x = p + 2\lambda q, \quad y = q;$

4) $x = p, \quad y = q + 2\lambda' p,$

worin $\lambda$ und $\lambda'$ ganze Zahlen, $p$ und $p$ zwei ganze ungerade Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler bedeuten, so gilt die Relation $(x, y)$ allgemein für zwei beliebige ganze ungerade Zahlen ohne gemeinsamen Theiler."

Der Beweis dieses eleganten Satzes folgt in einfacher Weise aus dem Euklid'schen Algorithmus:

$$\begin{aligned}
p &= 2g_1\, p_1 + p_2,\\
p_1 &= 2g_2\, p_2 + p_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
p_{\nu-1} &= 2g_\nu\, p_\nu + p_{\nu+1},\\
p_\nu &= 2g_{\nu+1}\, p_{\nu+1} \pm 1.
\end{aligned}$$

$p, p_1, p_2, \ldots$ seien ungerade und $|p_1| > |p_2| > |p_3| \ldots$[2]) Nach Voraussetzung 1) gilt dann die Relation $(x, y)$ für $\pm 1$, $p_{\nu+1}$, folglich nach

1) Inaug.-Diss. Göttingen 1883; enthält ausser dem hier mitgetheilten Beweis noch verschiedene Anwendungen einer neuen Beweismethode.

2) $|x|$ bedeutet nach Kronecker und Weierstrass „absoluter Betrag von $x$".

3) auch für $p_\nu$ und $p_{\nu+1}$, und nach 4) auch für $p_\nu$ und $p_{\nu-1}$ u. s. w., folglich auch für $p$ und $p_1$ oder $p_1$ und $p$. — Fände man nämlich für die Anfangswerthe $x = \pm 1$, $y = p_{\nu+1}$ die Richtigkeit der Relation für $p$ und $p_1$, so würde Voraussetzung 2) die Giltigkeit der Relation für $p_1$ und $p$ ergeben.

Jenen Satz kann man aber auch folgendermassen aussprechen:

„Jede Relation $(p, q)$ zwischen zwei beliebigen ungeraden Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler $p$ und $q$ gilt allgemein, sobald sie gilt für:

$$1)\ \pm 1, q; \quad 2)\ p, \pm 1;$$
$$3)\ p+2\lambda q, q; \quad 4)\ p, q+2\lambda' q$$

($\lambda$, $\lambda'$ ganze Zahlen), immer die Giltigkeit von $(p, q)$ für $p$ und $q$ vorausgesetzt; d. h. sie gilt allgemein, sobald die Relationen:

I) $(\pm 1, q)$; II) $(p, \pm 1)$; III) $(p+2\lambda q, q)$; IV) $(p, q+2\lambda' p)$

immer unter der Annahme der Giltigkeit von $(p, q)$, als richtig sich erweisen lassen."

Das quadratische Reciprocitätsgesetz in seiner einfachsten Form spricht sich in der Formel aus:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}} \quad (p, q \text{ positive ungerade Primzahlen}).$$

Um die Allgemeingiltigkeit dieser Formel nachzuweisen, hat man daher, wenn man die Symmetrie derselben bedenkt, zu zeigen, dass:

$$\text{I)} \qquad \left(\frac{\varepsilon}{q}\right)\left(\frac{q}{\varepsilon}\right) = (-1)^{\frac{\varepsilon-1}{2}\frac{q-1}{2}}, \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

$$\text{II)} \qquad \left(\frac{p+2\lambda q}{q}\right)\left(\frac{q}{p+2\lambda q}\right) = (-1)^{\frac{q-1}{2}\cdot\frac{p+2\lambda q-1}{2}},$$

wenn

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}.$$

## 2.

Da $\left(\frac{\varepsilon}{q}\right) = (-1)^{\frac{\varepsilon-1}{2}\frac{q-1}{2}}$ und $\left(\frac{q}{\varepsilon}\right) = +1$ ist, so ist die Richtigkeit von Formel I) ohne Weiteres klar.

Um Formel II) zu verificiren, sucht Busche eine Relation zwischen

$$\left(\frac{q}{p+2\lambda q}\right) \text{ und } \left(\frac{q}{p}\right)$$

auf, und zwar eine Relation zwischen den Gauss'schen charakteristischen Zahlen, die zu jenen Symbolen gehören. Setzt man:

$$1) \qquad \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\mu},$$

so wird $kq$ $\left(k = 1, \ldots \frac{p-1}{2}\right)$ einen Beitrag zu $\mu$ geben, wenn:

$$2)\qquad \begin{cases} kq = hp + \frac{p+1}{2} + r \quad \text{oder:} \\ kq = hp + p - r', \end{cases}$$

wobei $r$, $r'$ positive ganze Zahlen kleiner als $\frac{p}{2}$ sind. $\mu$ soll jetzt abhängig gemacht werden von $h$. Da der Maximalwerth von $k$ $\frac{p-1}{2}$ ist, so ist der von $h$ $\frac{q-3}{2}$, wobei zu bemerken ist, dass $h$ nicht nothwendig $\frac{q-3}{2}$ werden muss. Lässt man nun $h$ die Werthe von 1 bis $\frac{q-3}{2}$ durchlaufen, so möge es für jedes $h$ $\mu_h$ Werthe $kq$ geben, so dass $\mu_h$ auch definirt werden kann als die Anzahl der Lösungen $k$ von:

$$kq = hp + \frac{p+1}{2} + r, \quad r < \frac{p}{2}.$$

Und es ist:

$$3)\qquad \mu = \sum_{h=0}^{\frac{q-3}{2}} \mu_h.$$

Wenn $q < p$, so wird $\mu_h$ für jedes $h$ grösser als Null, während, wenn $q > p$, $\mu_h = 0$ oder 1 wird. Dies ergiebt sich aus der Vergleichung der Maximalwerthe für $h$ und $k$. Ist ferner für $P = p + 2\lambda q$:

$$4)\qquad \left(\frac{q}{P}\right) = (-1)^M, \quad M = \sum_{h=0}^{\frac{q-3}{2}} M_h,$$

so ist wiederum $M_h$ die Anzahl der Lösungen von:

$$5)\qquad \begin{cases} Kq = hP + \frac{P+1}{2} + r \quad \text{oder:} \\ Kq = hP + P - r'; \quad r, r' < \frac{P}{2}. \end{cases}$$

Nimmt man zunächst an $\mu_h = +1$, d. h. sind die Gleichungen 2) möglich, so ergiebt sich daraus, $\lambda$ positiv vorausgesetzt:

$$\{k + \lambda(2h+1)\}\, q = hP + \frac{P+1}{2} + r,$$

$$\{k + \lambda(2\lambda+2)\}\, q = hP + P - r',$$

oder wenn man

$$6)\qquad K_1 = k + \lambda(2h+1), \qquad K_2 = k + \lambda(2h+2)$$

setzt:

$$7)\qquad \begin{cases} K_1 q = hP + \frac{P+1}{2} + r, \\ K_2 q = hP + P - r'. \end{cases}$$

Hieraus ergiebt sich aber, dass Gleichung 5) $K_2 - K_1 + 1$ verschiedene ganzzahlige Wurzeln hat, dass somit

8) $$M_h = K_2 - K_1 + 1 = \lambda + 1 = \lambda + \mu_h$$

ist. Um zu zeigen, dass die $M_h$ Werthe $K$ Modulo $P$ sowohl unter sich, als auch von denen, welche für ein anderes $h$ entstehen, verschieden sind, dazu genügt der Hinweis auf $q < P$.

Ist zweitens $\mu_h = 0$, so giebt es in dem Intervalle von $hp + \frac{p+1}{2}$ bis $hp + p$ keine durch $q$ theilbare Zahl, also auch nicht in dem Intervalle von $hP + \frac{P+1}{2}$ bis $hP + p + \lambda p$, da $hP + \frac{P+1}{2} \equiv hp + \frac{p+1}{2}$, ... $hP + p + \lambda p \equiv hp + p \mod q$ ist. Nun sind aber von den Zahlen $hP + \frac{P+1}{2}$, ... $hP + P$ mindestens $\lambda$ Zahlen durch $q$ theilbar, weil die Anzahl jener $\frac{p-1}{2} + \lambda q + 1 > \lambda q$ ist; es giebt aber auch nur $\lambda$ solcher Multipla von $q$, da die ersten $\frac{p+1}{2}$ Zahlen durch $q$ nicht theilbar sind. Die Gleichung:

$$Kq = hP + \frac{P+1}{2} + r$$

hat also $\lambda$ Wurzeln; es ist

9) $$M_h = \lambda = \lambda + \mu_h,$$

so dass allgemein, wenn man $q > p$ voraussetzt,

10) $$M_h = \lambda + \mu_h$$

wird. Daher erhält man, da, wie oben gezeigt, jedes $h$ ein von Null verschiedenes $M_h$ liefert:

$$M = \frac{q-1}{2}\lambda + \Sigma\mu_h,$$

d. h.:

11) $$M = \frac{q-1}{2}\lambda + \mu \quad \text{oder} \quad \left(\frac{q}{p+2\lambda q}\right) = (-1)^{\lambda\frac{q-1}{2}}\left(\frac{q}{p}\right).$$

Da $q$ ungerade, so ist auch

$$\left(\frac{q}{p+2\lambda q}\right) = (-1)^{\frac{q-1}{2}\lambda q}\left(\frac{q}{p}\right).$$

Nun ist aber:

$$\left(\frac{p+2\lambda q}{q}\right) = \left(\frac{p}{q}\right),$$

also:

$$\left(\frac{p+2\lambda q}{q}\right)\left(\frac{q}{p+2\lambda q}\right) = (-1)^{\frac{q-1}{2}\lambda q}\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)$$

oder

$$= (-1)^{\frac{q-1}{2}\lambda q + \frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}},$$

$$= (-1)^{\frac{q-1}{2}\cdot\frac{p+2\lambda q-1}{2}},$$

was zu beweisen war.

## IV. Capitel.

### Eisenstein's Beweis durch functionentheoretische Sätze.[1])

#### 1.

Sind $p$ und $q$ zwei von einander verschiedene positive ungerade Primzahlen und die $r$ positive absolut kleinste Reste Modulo $q$, so wird sein $pr \equiv r$ oder $\equiv -r' \bmod q$, wo die $r'$ wiederum positive absolut kleinste Reste Modulo $q$ bedeuten. Oder es ist

$$\frac{pr}{q} = \frac{r'}{q} + f \text{ oder } = -\frac{r'}{q} + f',$$

wobei $f$, $f'$ ganze Zahlen sind. Hieraus folgt:

$$\sin\left(p\frac{2r\pi}{q}\right) = \sin\frac{2r'\pi}{q} \text{ oder } = -\sin\frac{2r'\pi}{q}.$$

Die in den vorstehenden Gleichungen ausgedrückte Eigenschaft der Sinusfunctionen führt sofort zu dem Resultat:

$$pr \equiv \frac{\sin\frac{2r'p\pi}{q}}{\sin\frac{2r'\pi}{q}} \bmod q,$$

woraus sich wiederum ergiebt:

$$p^{\frac{q-1}{2}}\,\Pi r \equiv \Pi r' \prod \frac{\sin\frac{2r'p\pi}{q}}{\sin\frac{2r'\pi}{q}} \bmod q,$$

wo die Productenzeichen sich auf sämmtliche positive absolut kleinste Reste Modulo $q$ erstrecken. Da die $r'$ mit den $r$, abgesehen von der Reihenfolge, identisch sind, so erhält man:

$$\text{A)}\quad \left(\frac{p}{q}\right) = \prod_{r=1}^{\frac{q-1}{2}} \frac{\sin\frac{2rp\pi}{q}}{\sin\frac{2r\pi}{q}} \text{ und ganz analog } \left(\frac{q}{p}\right) = \prod_{\varrho=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{\sin\frac{2\varrho q\pi}{p}}{\sin\frac{2\varrho\pi}{p}}.$$

#### 2.

Eisenstein hat es nach dem Vorstehenden also im Wesentlichen zu thun mit Ausdrücken von der Form $\frac{\sin tv}{\sin v}$, wobei $t$ eine ungerade Primzahl ist.[2]) Nimmt man zunächst an, der Ausdruck $\frac{\sin(t-2)v}{\sin v}$ sei eine

1) Crelle J. XXIX (1845), p. 257.

2) Zur Ableitung der folgenden, sich auf $\frac{\sin tv}{\sin v}$ beziehenden Sätze genügt es schon, wenn $t$ nur ungerade ist.

ganze Function von $\sin v$, so folgt sofort, dass er eine ganze gerade Function von $\sin v$ ist und dass diese Eigenschaft auch $\frac{\cos(t-2)v}{\sin v}$ zukommt. Bildet man nun $\frac{\sin tv}{\sin v} = \sin(t-2)v . \cos 2v + \cos(t-2)v . \sin 2v$, so ergiebt sich, dass $\frac{\sin tv}{\sin v}$ ebenfalls eine ganze gerade Function von $\sin v$ ist, deren Grad den von $\frac{\sin(t-2)v}{\sin v}$ um zwei Einheiten übersteigt. Es ist daher, wenn man bedenkt, dass $\frac{\sin 3v}{\sin v} = 3 - 4\sin^2 v$, allgemein:

$$\frac{\sin tv}{\sin v} = a_{t-1} \sin^{t-1} v + a_{t-3} \sin^{t-3} v + \ldots$$

Eisenstein verwandelt nun die rechte Seite der vorstehenden Gleichung in ein Product. Dazu muss ausser den Wurzeln von $\frac{\sin tv}{\sin v} = 0$ der Coefficient $a_{t-1}$ bekannt sein. Nimmt man an:

$$\frac{\sin(t-2)v}{\sin v} = (-1)^{\frac{t-3}{2}} 2^{t-3} \sin^{t-3} v + \ldots,$$

so ergiebt sich durch leichte Zwischenrechnung:

$$\frac{\sin tv}{\sin v} = (-1)^{\frac{t-1}{2}} 2^{t-1} \sin^{t-1} v + \ldots$$

Aus $\frac{\sin 3v}{\sin v} = 3 - 4\sin^2 v = (-1)^{\frac{3-1}{2}} 2^{3-1} \sin^{3-1} v + \ldots$ findet sich nun, dass jene Formel für $\frac{\sin tv}{\sin v}$ in der That allgemeine Giltigkeit hat.

Bezeichnet man daher mit $\tau = \tau_1, \ldots \tau_{\frac{p-1}{2}}$ die $\frac{p-1}{2}$ verschiedenen Wurzeln von $\frac{\sin tv}{\sin v}$, so wird

$$\frac{\sin tv}{\sin v} = (-1)^{\frac{t-1}{2}} 2^{t-1} \Pi(\sin^2 v - \tau^2).^{1})$$

3.

Mit Rücksicht auf das eben Entwickelte wird daher, wenn man die $\frac{p-1}{2}$ verschiedenen Wurzeln von $P = \frac{\sin \frac{2rp\pi}{q}}{\sin \frac{2r\pi}{q}} = 0$ mit $\xi$, die $\frac{q-1}{2}$ verschiedenen Wurzeln von $Q = \frac{\sin \frac{2\varrho q\pi}{p}}{\sin \frac{2\varrho\pi}{p}} = 0$ mit $\eta$ und die Variable $\sin v$ mit $x$ bezeichnet:

---

1) In Eisenstein's Abh. stehen die Potenzen von 2 fälschlich im Nenner.

$$P = (-1)^{\frac{p-1}{2}} 2^{p-1} \Pi(x^2 - \xi^2), \quad Q = (-1)^{\frac{q-1}{2}} 2^{q-1} \Pi(x^2 - \eta^2).$$

Setzt man zur Abkürzung $\alpha = \sin \frac{2\pi\varrho}{q}$, $\beta = \sin \frac{2r\pi}{q}$, so nimmt $\alpha$, $\frac{p-1}{2}$ und $\beta$, $\frac{q-1}{2}$ verschiedene Werthe an; zugleich genügen sie aber den Gleichungen $P = 0$ resp. $Q = 0$. Es ist daher:

$$P = (-1)^{\frac{p-1}{2}} 2^{p-1} \Pi(x^2 - \alpha^2), \quad Q = (-1)^{\frac{q-1}{2}} 2^{q-1} \Pi(x^2 - \beta^2).$$

In $P$ ist aber $x = \beta$ und in $Q$ $x = \alpha$, so dass man erhält:

$$P = (-1)^{\frac{p-1}{2}} 2^{p-1} \Pi(\beta^2 - \alpha^2), \quad Q = (-1)^{\frac{q-1}{2}} 2^{q-1} \Pi(\alpha^2 - \beta^2).$$

Mit Rücksicht auf Formel A) im ersten Artikel folgt hiernach:

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{p}{q}\right) &= \prod_{\alpha\beta} (\beta^2 - \alpha^2) \prod_{\alpha\beta} \left\{(-1)^{\frac{p-1}{2}} 2^{p-1}\right\}, \\ \left(\frac{q}{p}\right) &= \prod_{\alpha\beta} (\alpha^2 - \beta^2) \prod_{\alpha\beta} \left\{(-1)^{\frac{q-1}{2}} 2^{q-1}\right\} \end{aligned} \right.$$

oder

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{p}{q}\right) &= (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}} 2^{\frac{p-1 . q-1}{2}} \Pi(\beta^2 - \alpha^2), \\ \left(\frac{q}{p}\right) &= (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}} 2^{\frac{p-1 . q-1}{2}} \Pi(\alpha^2 - \beta^2), \end{aligned} \right.$$

woraus sich ergiebt:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = \frac{\Pi(\beta^2 - \alpha^2)}{\Pi(\alpha^2 - \beta^2)} = \prod \frac{-(\alpha^2 - \beta^2)}{\alpha^2 - \beta^2}.$$

Da nie $\alpha = \beta$ werden kann, weil $p$ und $q$ Primzahlen sind, so folgt, dass $\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2}$ stets gleich 1 ist, woraus unmittelbar

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}}$$

sich ergiebt.

## V. Capitel.

### Beweise durch Sätze aus der Lehre von der Kreistheilung.

### I. Beweis von Gauss (7. Bew.)-Lebesgue (2. Bew.).[1]

1.

Ist $\varrho$ eine primitive Wurzel der Gleichung $\frac{x^{p-1} - 1}{x - 1} = 0$, wobei $p$ eine positive ungerade Primzahl bedeutet, und $g$ eine primitive Wurzel Modulo $p$, so kann man die Wurzeln von $\frac{x^{p-1} - 1}{x - 1} = 0$ in folgender Weise anordnen:

1) Gauss (Nachlass), Bd. II S. 233, und Lebesgue, Compt. Rend. LI, p. 9.

$$\varrho,\ \varrho^{g^2},\ \varrho^{g^4},\ \ldots,\ \varrho^{g^{p-3}} \text{ und } \varrho^{g},\ \varrho^{g^3},\ \ldots,\ \varrho^{g^{p-2}}.$$

Setzt man:

$$y_1 = \varrho^{g} + \varrho^{g^3} + \ldots + \varrho^{g^{p-2}},\quad y_2 = \varrho + \varrho^{g^2} + \ldots + \varrho^{g^{p-1}},$$

so heissen $y_1$, $y_2$ $\frac{p-1}{2}$-gliedrige Perioden der „Kreistheilungsgleichung“ $\frac{x^{p-1}-1}{x-1}=0$. Unter Benutzung der Eigenschaft dieser Perioden:

$$y_1 - y_2 = (\varrho^{-1}-\varrho)(\varrho^{-3}-\varrho^{3})\ldots(\varrho^{p-2}-\varrho^{-p+2})$$

und der Relation:

$$(x-\varrho^{2})(x-\varrho^{4})\ldots(x-\varrho^{2(p-1)}) = x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+1$$

ergiebt sich:

$$(y_1-y_2)^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}}p.$$

Es ist aber:

$$y_1+y_2=-1,\ \text{ so dass }\ y_1y_2=\frac{1-(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}{4}\ \text{ wird.}$$

Die beiden Perioden $y_1$ und $y_2$ sind also Wurzeln der quadratischen Gleichung $f(x)=x^2+x+\frac{1-(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}{4}=0$.

## 2.

Gauss resp. Lebesgue untersuchen nun, unter welchen Bedingungen

1) $$f(x)\equiv 0 \ \mathit{mod}\, q,$$

wo $q$ ebenso wie $p$ eine positive ungerade Primzahl sein soll, reelle ganzzahlige Wurzeln hat. Die Bedingung hierfür kann auf zwei verschiedene Weisen ausgedrückt werden, aus deren Vergleichung das Reciprocitätsgesetz sich ergiebt.

Aus der Congruenz:

2) $$f(x)\equiv 0 \ \mathit{mod}\, q$$

ergiebt sich durch die Substitution:

3) $$y = 2x+1$$

die folgende:

4) $$y^2 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}p \quad \mathit{mod}\, q.$$

Soll also die Congruenz 2) reelle Wurzeln haben, so muss auch 4) reelle Wurzeln haben. Umgekehrt, ist 4) lösbar, so wird vermöge der Substitution 3) auch 2) lösbar sein. Daraus folgt, dass die Congruenz 2) möglich ist, wenn

$$\left(\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}{q}\right)=+1$$

ist, oder wenn

5) $$(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}p^{\frac{q-1}{2}}\equiv 1 \ \mathit{mod}\, q$$

ist. Dagegen hat $f(x)\equiv 0 \ \mathit{mod}\, q$ keine reellen ganzzahligen Wurzeln, wenn

$$5^0)\qquad (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}p^{\frac{q-1}{2}}\equiv -1 \mod q$$

wird. Die Identität ferner:

$$x^{q-1}-1\equiv (x-1)(x-2)\dots(x-q+1) \quad \mod q$$

oder

$$x^q-x\equiv x.x-1.x-2.\dots.(y-q+1) \mod q$$

setzt sich durch die Substitution $x=y-y_h$ $(h=1, 2)$ in die folgende um:

$$6)\qquad \begin{aligned}&(y-y_h)^q-(y-y_h)\\ &\equiv (y-y_h)(y-1-y_h)(y-2-y_h)\dots(y-q+1-y_h) \mod q.\end{aligned}$$

Es ist aber $y_h=x^{g^h}+x^{g^{2+h}}+\dots+x^{g^{p-3+h}}$, woraus, wenn

$$7)\qquad q\equiv g^k \mod p,$$

$y_h{}^q\equiv y_{h+k} \mod q$ oder $(y-y_h)^q\equiv y-y_{h+k} \mod q$ oder aber $(y-y_h)^q - (y-y_h)\equiv y_h-y_{h+k} \mod q$ resultirt. Die Congruenz 6) giebt daher:

$$(y-y_h)(y-1-y_h)\dots(y-q+1-y_h)\equiv y_h-y_{h+k} \mod q,$$

woraus unmittelbar die folgende Formel entspringt:

$$\begin{aligned}(y-y_1)(y-y_2)(y-1-y_1)(y-1-y_2)\dots(y-q+1-y_1)(y-q+1-y_2)\\ \equiv (y_1-y_{1+k})(y_2-y_{2+k}) \mod q.\end{aligned}$$

Es ist aber $f(y)=(y-y_1).(y-y_2)$, wonach die vorige Congruenz übergeht in:

$$8)\qquad f(y).f(y-1).\dots.f(y-q+1)\equiv (y_1-y_{1+k})(y_2-y_{2+k}) \mod q.$$

Hätte nun $f(y)\equiv 0 \mod q$ reelle ganzzahlige Wurzeln, so würde

$$f(y),\ \dots\ f(y-q+1) \mod q$$

ein vollständiges Restsystem darstellen und es wäre in diesem Falle:

$$f(y).f(y-1).\dots.f(y-q+1)\equiv 0 \mod q.$$

Umgekehrt, wäre diese Bedingung erfüllt, so wäre auch $f(y)\equiv 0$ und damit $f(x)\equiv 0 \mod q$ in ganzen reellen Zahlen lösbar. Mit Rücksicht auf die Congruenz 8) kann man auch so sagen: $f(x)$ hat Modulo $q$ reelle Wurzeln, wenn $\varphi=(y_1-y_{1+k})(y_2-y_{2+k})\equiv 0 \mod q$, ist dagegen nach demselben Modul nicht reell und ganzzahlig lösbar, wenn $\varphi=(y_1-y_{1+k})(y_2-y_{2+k})\not\equiv 0 \mod q$.[1] Wie sofort evident, kommt es also auf den Werth von $k$ an. $k$ war definirt durch $q\equiv g^k \mod p$. Ist da $k\equiv 0 \mod 2$, d. h. $\left(\frac{q}{p}\right)=1$, so ist $y_h=y_{h+k}$; ist dagegen $k\equiv 1 \mod 2$, also $\left(\frac{q}{p}\right)=-1$, so ist $y_h=y_{h+1}$. Hieraus erhellt: $f(x)\equiv 0 \mod q$ hat reelle ganzzahlige Wurzeln, wenn $\left(\frac{q}{p}\right)=1$, dagegen keine, wenn $\left(\frac{q}{p}\right)=-1$. Aus der Vergleichung dieses Resultates mit dem durch die Formeln 5) und $5^0$) ausgedrückten folgt sofort unser Satz.

1) Das Zeichen $\not\equiv$ bedeutet „nicht congruent“.

## II. Gauss' vierter Beweis.[1])

1.

Sind, wie gewöhnlich, $p$ und $q$ zwei von einander verschiedene positive ungerade Primzahlen, und ist

$$\varrho = e^{\frac{2\pi i}{q}},$$

bezeichnen ferner Modulo $q$ $a$ die quadratischen Reste und $b$ die quadratischen Nichtreste, so ist

$$1)\quad \begin{cases} \sum_{\lambda=1}^{q-1} \varrho^{\lambda^2 p} = G\left(\frac{pi}{q}\right) = 1 + 2\sum_a \varrho^{ap},\ ^{2)} \\ \sum_a \varrho^{ap} + \sum_b \varrho^{bp} = \varrho^p + \varrho^{2p} + \ldots = -1, \end{cases}$$

also

$$G\left(\frac{pi}{q}\right) = \sum_b \left(\frac{\lambda}{q}\right) \varrho^{\lambda p} = \left(\frac{p}{q}\right) \sum_\lambda \left(\frac{\lambda p}{q}\right) \varrho^{\lambda p} = \left(\frac{p}{q}\right) \sum_\lambda \left(\frac{\lambda}{q}\right) \varrho^{\lambda}.$$

Diese letztere Gleichung kann man auch schreiben:

$$2)\quad G\left(\frac{pi}{q}\right) = \left(\frac{p}{q}\right) G\left(\frac{i}{q}\right) = (1 + \varrho + \varrho^4 + \ldots + \varrho^{(q-1)^2}) \cdot \left(\frac{p}{q}\right).$$

2.

Gauss ermittelt zunächst den Werth für $G\left(\frac{i}{q}\right)$.[3]) Mit Hilfe des Systems identischer Gleichungen:

$$\begin{cases} \frac{1-\varrho^{q-1}}{1-\varrho} = \frac{1-\varrho^{-1}}{1-\varrho} = \varrho^{-1}, \\ \frac{1-\varrho^{q-2}}{1-\varrho^2} = \frac{1-\varrho^{-2}}{1-\varrho^2} = -\varrho^{-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{1-\varrho^{q-(q-1)}}{1-\varrho^{q-1}} = \frac{1-\varrho^{-(q-1)}}{1-\varrho^{q-1}} = -\varrho^{-(q-1)} \end{cases}$$

bildet er die Reihe:

$$3)\quad \begin{cases} f(\varrho, q-1) = 1 - \frac{1-\varrho^{q-1}}{1-\varrho} + \frac{1-\varrho^{q-1}.1-\varrho^{q-2}}{1-\varrho.1-\varrho^2} \mp \ldots \\ \qquad \ldots - \frac{1-\varrho^{q-1}.1-\varrho^{q-2}.\ldots.1-\varrho}{1-\varrho.1-\varrho^2.\ldots.1-\varrho^{q-2}} \\ = 1 + \varrho^{-1} + \varrho^{-3} + \ldots + \varrho^{-\frac{q.q-1}{2}}. \end{cases}$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$(q-1, \mu) = \frac{1-\varrho^{q-1}.1-\varrho^{q-2}.\ldots.1-\varrho^{q-\mu}}{1-\varrho.1-\varrho^2.\ldots.1-\varrho^{\mu}},$$

---

1) Summatio serier. quarund. sing. Bd. II S 69, oder Comm. soc. reg. scient. Gott. rec. Vol. I.

2) Die Bezeichnung $G$ ist nach Kronecker (Berl. Ber. 1880) gewählt.

3) Die folgenden Entwickelungen gelten auch für beliebige ungerade Zahlen.

worin also $q$ ganz, positiv und grösser als $\mu+1$ ist, so ergiebt sich, wenn man noch berücksichtigt, dass

$$\frac{1-\varrho^m}{1-\varrho^{\mu+1}} = \frac{1-\varrho^{m-\mu-1}}{1-\varrho^{\mu+1}} + \frac{\varrho^{m-\mu-1}(1-\varrho^{\mu+1})}{1-\varrho^{\mu+1}}:$$

$$(q-1, \mu+1) = \varrho^{q-\mu-2}(q-2, \mu) + (q-2, \mu+1).$$

Wendet man diese Formel auf 3) an, so erhält man:

$$4) \quad \begin{aligned} f(\varrho, q-1) = (1-\varrho^{q-2}) - (1-\varrho^{q-3})(q-2, 1) + (1-\varrho^{q-4})(q-2, 2) \\ - (1-\varrho^{q-5})(q-2, 3) \pm \ldots \end{aligned}$$

Nun ist aber:

$$(1-\varrho^{q-1-(\lambda+1)})(q-2, \lambda) = (1-\varrho^{q-2})(q-3, \lambda),$$

daher wird:

$$f(\varrho, q-1) = (1-\varrho^{q-2})\{1-(q-3, 1)+(q-3, 2) \pm \ldots\}$$

oder

$$5) \qquad f(\varrho, q-1) = (1-\varrho^{q-2}) f(\varrho, q-3).$$

Da nun $q \equiv 1 \; mod\, 2$ ist, so findet sich:

$$\left\{\begin{aligned} f(\varrho, q-1) &= (1-\varrho^{q-2}) f(\varrho, q-3), \\ f(\varrho, q-3) &= (1-\varrho^{q-4}) f(\varrho, q-5), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(\varrho, 2) \quad &= (1-\varrho), \end{aligned}\right.$$

woraus durch Multiplication resultirt:

$$6) \qquad f(\varrho, q-1) = (1-\varrho)(1-\varrho^3)(1-\varrho^5)\ldots(1-\varrho^{q-2}).$$

Es sind also für $f(\varrho, q-1)$ zwei Entwickelungen 3) und 6) gewonnen.

Durch Verbindung dieser beiden Resultate entsteht:

$$1+\varrho^{-1}+\varrho^{-3}+\ldots+{}^{-q\frac{q-1}{2}} = (1-\varrho)(1-\varrho^3)\ldots(1-\varrho^{q-2}).$$

Berücksichtigt man, dass $(\varrho^{q-2})^\nu = \varrho^{-2\nu}$ ist bei ganzem $\nu$, so erhält man:

$$1+\varrho^2+\varrho^6+\varrho^{12}+\ldots+\varrho^{q.q-1} = (1-\varrho^{-2}).(1-\varrho^{-6}).\ldots.(1-\varrho^{-2(q-2)}).$$

Multiplicirt man beiderseits mit $\varrho^{\left(\frac{q-1}{2}\right)^2} = \varrho.\varrho^3\ldots\varrho^{q-2}$, so entsteht:

$$\varrho^{\left(\frac{q-1}{2}\right)^2} + \varrho^{2+\left(\frac{q-1}{2}\right)^2} + \ldots + \varrho^{q.q-1+\left(\frac{q-1}{2}\right)^2}$$
$$= (\varrho-\varrho^{-1})(\varrho^3-\varrho^{-3})\ldots(\varrho^{q-2}-\varrho^{-q+2})$$

oder, wenn man in Rechnung zieht, dass die Exponenten auf der linken Seite identisch sind mit $\left(\frac{q-1}{2}\right)^2, \left(\frac{q-3}{2}\right)^2, \ldots$, also Modulo $q$ ein halbes Restsystem darstellen,

$$1+\varrho+\varrho^4+\ldots+\varrho^{(q-1)^2} = \varrho-\varrho^{-1}.\varrho^3-\varrho^{-3}.\ldots.\varrho^{q-2}-q^{-q+2}.$$

Es ist also:

$$7) \qquad G\left(\frac{i}{q}\right) = \varrho-\varrho^{-1}.\varrho^3-\varrho^{-3}.\ldots.\varrho^{q-2}-\varrho^{-q+2}$$

oder mit Berücksichtigung von $\varrho^\mu-\varrho^{-\mu} = -(\varrho^{q-\mu}-q^{-q+\mu})$:

$$8) \quad G\left(\frac{i}{q}\right) = (-1)^{\frac{q-1}{2}}.\varrho^2-\varrho^{-2}.\varrho^4-\varrho^{-4}.\ldots.\varrho^{q-1}-\varrho^{-q+1}.$$

Durch Multiplication von 7) und 8) erhält man:

$$G^2\left(\frac{i}{q}\right)=(-1)^{\frac{q-1}{2}}\varrho^{q.\frac{q-1}{2}}(1-\varrho^{-2})(1-\varrho^{-4})\dots(1-\varrho^{-2(q-1)})$$

oder, da $\varrho$ eine primitive Wurzel von $x^q=1$ ist,

$$G^2\left(\frac{i}{q}\right)=(-1)^{\frac{q-1}{2}}q.$$

Hieraus ergiebt sich aber:

$$9)\qquad G\left(\frac{i}{q}\right)=\pm i^{\left(\frac{q-1}{2}\right)^2}\sqrt{q}\quad\text{und}\quad G\left(\frac{pi}{q}\right)=\pm i^{\left(\frac{q-1}{2}\right)^2}\left(\frac{p}{q}\right)\sqrt{q}.$$

Um das Vorzeichen von $G$ zu bestimmen, gehe man auf Gleichung 7) zurück. Da $\varrho^{\mu}-\varrho^{-\mu}=2i\sin\frac{2\mu\pi}{q}$ ist, so ergiebt sich:

$$G\left(\frac{i}{q}\right)=(2i)^{\frac{q-1}{2}}\sin\frac{2\pi}{q}\cdot\sin\frac{6\pi}{q}\cdot\sin\frac{10\pi}{q}\cdots\sin\frac{(q-2)2\pi}{q}.$$

Die Grössen $\frac{2\pi}{q},\dots\frac{(q-2)2\pi}{q}$ sind nun sämmtlich kleiner als $2\pi$; $q$ ist eine ungerade Zahl und man hat zu unterscheiden:

1. $q=4n+1$. Dann sind $\frac{q-1}{4}$ der Winkelgrössen grösser als $\pi$, so dass
$$G\left(\frac{i}{q}\right)=i^{\frac{q-1}{2}}(-1)^{\frac{q-1}{4}}C=C.$$
wird, wenn $C$ eine positive Constante bedeutet.

2. $q=4n+3$. In diesem Falle ist die Anzahl der Winkelgrössen, welche grösser als $\pi$ sind, $\frac{q-3}{4}$, so dass sich ergiebt:
$$G\left(\frac{i}{q}\right)=i^{\frac{q-1}{2}}(-1)^{\frac{q-3}{4}}C=iC,$$
so dass man schliesslich erhält:

$$10)\qquad G\left(\frac{i}{q}\right)=i^{\left(\frac{q-1}{2}\right)^2}\sqrt{q}\quad\text{und}\quad G\left(\frac{pi}{q}\right)=\left(\frac{p}{q}\right)i^{\left(\frac{q-1}{2}\right)^2}\sqrt{q}.$$

3.

Da auch $p$ ungerade vorausgesetzt war, so ergiebt sich:

$$11)\qquad G\left(\frac{pi}{q}\right)\cdot G\left(\frac{qi}{p}\right)=\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2+\left(\frac{q-1}{2}\right)^2}\sqrt{p}.\sqrt{q}.$$

Nun ist aber nach Definition:

$$G\left(\frac{pi}{q}\right)G\left(\frac{qi}{p}\right)=\sum_{\lambda=1}^{q-1}\sum_{\mu=1}^{p-1}e^{\left(\frac{\lambda^2p}{q}+\frac{\mu^2q}{p}\right)2\pi i}$$
$$=\sum_{\lambda}\sum_{\mu}e^{\frac{(\lambda p+\mu q)^2}{pq}2\pi i},$$

denn

$$\frac{\lambda^2p}{q}+\frac{\mu^2q}{p}=\frac{(\lambda p+\mu q)^2}{pq}-2\lambda\mu.$$

Wie sofort ersichtlich, nimmt $\lambda p + \mu q$ Modulo $pq$, $pq$ Werthe an und stellt, wie sich aus $p(\lambda - \lambda') = q(\mu' - \mu)$ ergiebt, Modulo $pq$ ein vollständiges System incongruenter Reste dar. Es ist daher:

$$G\left(\frac{pi}{q}\right) G\left(\frac{qi}{p}\right) = G\left(\frac{i}{pq}\right) = i^{\left(\frac{pq-1}{2}\right)^2} \sqrt{pq}$$

oder mit Hilfe von Gleichung 11)

$$i^{\frac{1}{4}(pq-1)^2} \sqrt{pq} = \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2} \sqrt{p} . \sqrt{q}.$$

Da stets das positive Wurzelzeichen zu nehmen ist, so entsteht somit:

12) $$i^{\frac{1}{4}(pq-1)^2} = \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2},$$

woraus sich unmittelbar das Reciprocitätsgesetz ableitet.

## III. Gauss' sechster Beweis.[1])

### 1.

Haben $p$ und $q$ ihre gewöhnliche Bedeutung und bezeichnet man mit $G$ die Reihe:

1) $$G = x - x^g + x^{g^2} \pm \ldots - x^{g^{p-2}},$$

worin $g$ eine primitive Wurzel Modulo $p$ ist, so folgt aus der Natur der polynomialen Coefficienten: $G^q - (x - x^g \pm \ldots)^q \equiv 0 \; mod\, q$ oder, da $q$ ungerade ist,

2) $$G^q - G_q \equiv 0 \; mod\, q, \text{ wenn } G_q = x^q - x^{qg} + x^{qg^2} \mp \ldots - x^{qg^{p-2}}.$$

Ist ferner $q \equiv g^\mu \; mod\, p$, so folgt aus dem System identischer Gleichungen $q = g^\mu + f_1 p$, $qg = g^{\mu+1} + f_2 p$, $\ldots$ $qg^{p-2} = g^{\mu+p-2} + f_3 p$:

3) $$x^{qg^\lambda} - x^{g^{\mu+\lambda}} = (1 - x^p) f(x),$$

wobei $f(x)$ eine ganze Function von $x$ ist. Ist $W$ ebenfalls eine ganze Function von $x$, so ergiebt sich somit:

4) $$G_q - \{x^{g^\mu} - x^{g^{\mu+1}} \pm \ldots \pm x^{g^{\mu+p-2}}\} = (1 - x^p) W.$$

Die Exponenten der in der Klammer stehenden $(p-1)$ Grössen sind nun der Natur von $g$ gemäss identisch mit den Zahlen $1, 2, \ldots p-1$; und da auch die Vorzeichen alterniren, so erhält man für $x^{g^\mu} - x^{g^{\mu+1}} \pm \ldots$ den Werth $\pm G$. Das Vorzeichen von $G$ ist das von $-(-1)^{p-\mu} x$, so dass, da $p$ ungerade ist, $\pm G = (-1)^\mu G$ folgt. Aus $q \equiv g^\mu \; mod\, p$ ergiebt sich aber $q^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(g^{\frac{p-1}{2}}\right)^\mu \equiv \left(\frac{q}{p}\right) mod\, p$, und da $g^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \; mod\, p$, so folgt:

---

1) Theorematis fund. in doctrina de residuis quadrat demonstr. et ampl. novae. G. Werke Bd. II S. 55.

$$(-1)^\mu = \left(\frac{q}{p}\right)$$

und

5) $$G_q - \left(\frac{q}{p}\right) G = (1-x)^p W.$$

2.

Betrachtet man ferner das System identischer Gleichungen:

$$+xG - x^2 + x^{g+1} - x^{g^2+1} + \ldots + x^{g^{p-2}+1} = 0,$$

$$-x^g G - x^{2g} + x^{g^2+g} - x^{g^3+g} + \ldots + x^{g^{p-1}+g} = x^{g+1}(x^{g^{p-2}} - 1),$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$-x^{g^{p-2}} G - x^{2g^{p-2}} + x^{g^{p-1}+g^{p-2}} + \ldots + x^{g^{2p-4}+g^{p-2}}$$
$$= x^{g^{p-2}+1}\{x^{g^{p-1}-1} - 1 - (x^{g^{p-1}} - 1) - \ldots\},$$

so entsteht durch Addition:

6) $$\Omega = G^2 - f(x^{g^0+1}) + f(x^{g+1}) \mp \ldots + f(x^{g^{p-2}+1}),$$

wenn man zur Abkürzung $\Omega$ gleich der Summe der rechten Seiten der vorstehenden Gleichungen und $f(x^\lambda) = 1 + x^\lambda + x^{\lambda g} + \ldots + x^{\lambda g^{p-2}}$ setzt.

$\Omega$ ist, wie ohne Weiteres folgt, durch $1 - x^p$, also auch durch $\frac{1-x^p}{1-x}$ theilbar; $f(x^\lambda)$ aber ist, weil $g$ eine primitive Wurzel zu $p$ ist, theilbar durch $(1 - x^{\lambda p})$, also auch durch $\frac{1-x^{\lambda p}}{1-x^\lambda}$. Es wird also auch $f(x^\lambda)$ durch $\frac{1-x^p}{1-x}$ theilbar sein, wenn

$$\frac{1-x^{\lambda p}}{1-x^\lambda} \equiv 0 \; mod \; \frac{1-x^p}{1-x}$$

ist. Es sind da zwei Fälle zu unterscheiden.

I. $\lambda$ und $p$ sind relativ prim. Dann ist $y\lambda = hp + 1$ für $y$ und $h$ ganzzahlig lösbar. Demgemäss wird

$$\frac{1-x^{\lambda p}}{1-x^\lambda} : \frac{1-x^p}{1-x} = \frac{1-x^{\lambda p}}{1-x^p} \cdot \frac{1-x^{y\lambda}}{1-x^\lambda} - x \frac{1-x^{\lambda p}}{1-x^\lambda} \cdot \frac{1-x^{hp}}{1-x^p},$$

woraus sich ergiebt, dass $f(x^\lambda)$ durch $\frac{1-x^p}{1-x}$ theilbar ist.

II. $\lambda$ und $p$ sind nicht relativ prim. Dann ist

$$f(x^\lambda) - p = x^\lambda\{(x^g - 1) + (x^{g^2} - 1) + \ldots + (x^{g^{p-2}} - 1)\},$$

woraus unmittelbar hervorgeht, dass $f(x^\lambda) - p$ durch $\frac{1-x^p}{1-x}$ theilbar ist. Nach alledem und mit Rücksicht darauf, dass $g^0 + 1$, $g + 1$, ... $g^{p-2} + 1$ in beliebiger Reihenfolge die Zahlen $2, 3, \ldots p$ repräsentiren, ergiebt sich aus 6):

7⁰) $$\Omega = G^2 - (-1)^{\frac{p-1}{2}} f\left(x^{g^{\frac{p-1}{2}}+1}\right) \equiv 0 \; mod \; \frac{1-x^p}{1-x}$$

oder, wenn $Z$ eine ganze Function von $x$ bedeutet,

7) $$G^2 - (-1)^{\frac{p-1}{2}} p = \frac{1-x^p}{1-x} Z.$$

Unmittelbar aus Formel 7) fliesst die folgende:

$$8)\qquad G^{q-1}-(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}p^{\frac{q-1}{2}}=\frac{1-x^p}{1-x}Y,$$

worin $Y$ ebenfalls eine ganze Function von $x$ ist.

3.

Mit Hilfe der Formeln 3), 4), 7) und 8) kann man nun das Reciprocitätsgesetz ableiten. Zunächst ergiebt sich aus den Formeln 3) und 4):

$$qGX=G^{q+1}-G\left\{(1-x^p)W+\left(\frac{q}{p}\right)G\right\},$$

wenn noch $X$ eine ganze Function von $x$ bedeutet, die sich aus 2) definirt als:

$$G^q-G_q=qX.$$

Nach Formel 8) erhält man ferner:

$$qGX=\left\{(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}p^{\frac{q-1}{2}}+\frac{1-x^p}{1-x}Y\right\}G^2-G(1-x^p)W-\left(\frac{q}{p}\right)G^2$$

oder, mit Benutzung von 7):

$$9)\qquad \begin{aligned} qGX=&(-1)^{\frac{p-1}{2}}p\left\{(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}p^{\frac{q-1}{2}}-\left(\frac{q}{p}\right)\right\}\\ &+\frac{1-x^p}{1-x}\left\{Z\left((-1)^{\frac{p-1}{2}}q^{\frac{p-1}{2}}-\left(\frac{q}{p}\right)\right)+YG^2-WG(1-x)\right\}.\end{aligned}$$

$G$ ist nach 1) vom Grade $p-1$. Setzt man daher $GX=\frac{1-x^p}{1-x}U+T$, wo $U$ und $T$ ebenfalls ganze Functionen von $x$ sind, so wird $T$ eine ganze Function von $x$ sein, deren Grad kleiner als $p-1$ ist. Substituirt man den Werth für $GX$ in $q$, so wird:

$$10)\qquad \begin{aligned} &qT-(-1)^{\frac{p-1}{2}}p\left\{(-1)^{\frac{q-1}{2}\cdot\frac{p-1}{2}}p^{\frac{q-1}{2}}-\left(\frac{q}{p}\right)\right\}\\ &=\frac{1-x^p}{1-x}\left\{Z\left[(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}p^{\frac{q-1}{2}}-\left(\frac{q}{p}\right)\right]+YG^2-WG(1-x)-qU\right\},\end{aligned}$$

worin der Grad der linken Seite kleiner als $p-1$ ist. $Z$, $Y$, $W$ sind aber ganze Functionen, folglich ist der Grad der rechten Seite grösser als $p-1$. Die vorstehende Gleichung kann also nur erfüllt werden, wenn beide Seiten gleich Null sind. Es ist daher:

$$qT=(-1)^{\frac{p-1}{2}}p\left\{(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}p^{\frac{q-1}{2}}-\left(\frac{q}{p}\right)\right\}$$

oder

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}p^{\frac{q-1}{2}}-\left(\frac{q}{p}\right)\equiv 0 \bmod q,$$

q. e. d.

### IV. Beweis von Cauchy[1])-Jacobi[2])-Eisenstein[3]).

Gauss hat nachgewiesen, dass

$$1)\qquad G\left(\frac{qi}{p}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)G\left(\frac{i}{p}\right) \text{ und } G^2\left(\frac{i}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}p.$$

Daraus ergiebt sich ohne Weiteres:

$$G^{q+1}\left(\frac{i}{p}\right)-G\left(\frac{i}{p}\right)G\left(\frac{qi}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q+1}{2}}p^{\frac{q+1}{2}}-\left(\frac{q}{p}\right)G^2\left(\frac{i}{p}\right)$$

oder

$$2)\quad G\left(\frac{i}{p}\right)\left[G^q\left(\frac{i}{p}\right)-G\left(\frac{qi}{p}\right)\right]=(-1)^{\frac{p-1}{2}}p\left\{(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}p^{\frac{q-1}{2}}-\left(\frac{q}{p}\right)\right\}.$$

Nun ist aber

$$G\left(\frac{i}{p}\right)=\sum_{\lambda=1}^{p-1}\left(\frac{\lambda}{p}\right)\varrho^{\lambda},\quad G\left(\frac{qi}{p}\right)=\sum_{\lambda}\left(\frac{\lambda}{p}\right)\varrho^{\lambda q},$$

wobei $\varrho$ eine primitive Wurzel von $x^p=1$ bedeutet; somit ist auch:

$$G^q\left(\frac{i}{p}\right)=G\left(\frac{qi}{p}\right)+q(A'+B'\varrho+C'\varrho^2+\ldots),$$

worin $A'$, $B'$, ... ganze Zahlen sind. Mithin ergiebt sich, wenn man zur Abkürzung setzt

$$3)\qquad X=\left[(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}p^{\frac{q-1}{2}}\left(\frac{q}{p}\right)\right](-1)^{\frac{p-1}{2}}p:$$

$$X=G\left(\frac{i}{p}\right)\cdot q[A'+B'\varrho+\ldots] \text{ oder } =q[A+B\varrho+\ldots],$$

worin $A$, $B$, ... wiederum ganze Zahlen bedeuten. Setzt man nun für $\varrho$ der Reihe nach $\varrho^2$, ... $\varrho^{p-1}$ ein und addirt die so entstehenden Gleichungen, so erhält man:

$$4)\qquad (p-1)X=q[(p-1)A-B-C-\ldots],$$

woraus, da $q$ eine Primzahl ist und man unbeschadet der Allgemeinheit $p-1<q$ annehmen kann, nach 3)

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}p^{\frac{q-1}{2}}-\left(\frac{q}{p}\right)\equiv 0 \mod q$$

folgt. Dies ist aber unsere bekannte Formel.

### V. Zweiter Beweis von Eisenstein.[4])

1.

Ist $p$ eine positive ungerade Primzahl und durchläuft $r$ ein vollständiges Restsystem Modulo $p$, so wird $\sum_r\left(\frac{r}{p}\right)=0$, und ebenso ist

1) Bull. de Férussac, XII. Bd. (1829) S. 205; Mém. de l'Inst. XVIII, p. 451.
2) Legendre, Théorie des nombres, 3ième éd. II (1830), p. 391.
3) Crelle J. XXVIII (1844), S. 41.
4) Crelle J. XXVII (1844), S. 322.

1) $$\psi_{(\mu)} = \left\{\sum_r \left(\frac{r}{p}\right)\right\}^\mu = 0.$$

Sind nun $\alpha_1, \dots \alpha_\mu$, $\mu$ Zahlen $r$, so folgt sofort:

2) $$\psi_{(\mu)} = \sum_\alpha \left(\frac{\alpha_1}{p}\right) \cdots \left(\frac{\alpha_\mu}{p}\right),$$

wo die Summation über sämmtliche $\alpha$ von 1 bis $p-1$ hin zu erstrecken ist. Repräsentirt $\psi_{(\mu,k)}$ die Summe $\sum' \left(\frac{\alpha_1}{p}\right) \cdots \left(\frac{\alpha_\mu}{p}\right)$, $\Sigma\alpha = k$, so erhält man:

3) $$\psi_{(\mu)} = \psi_{(\mu,0)} + \psi_{(\mu,1)} + \dots + \psi_{(\mu,p-1)} = 0.$$

Setzt man $\alpha_1 \equiv k\beta_1$, $\alpha_2 \equiv k\beta_2$, ... $\alpha_\mu \equiv \varkappa\beta_\mu$ *mod p*, woraus sich ergiebt $\Sigma\alpha = k\Sigma\beta$, $\Sigma\beta = 1$, so wird:

4) $$\psi_{(\mu,k)} = \left(\frac{k}{p}\right)^\mu \psi_{(\mu,1)}.$$

Ist nun $\mu$ eine gerade Zahl, so erhält man $\psi_{(\mu,k)} = \psi_{(\mu,1)}$ oder:

5) $$\psi_{(\mu,1)} = \psi_{(\mu,2)} = \dots = \psi_{(\mu,p-1)},$$

mithin nach Formel 3)

6) $$\psi_{(\mu,0)} + (p-1)\,\psi_{(\mu,1)} = 0.$$

Ist dagegen $\mu$ ungerade, so resultirt $\psi_{(\mu,k)} = \left(\frac{k}{p}\right)\psi_{(\mu,1)}$, woraus

$$\psi_{(\mu,1)} + \psi_{(\mu,2)} + \dots + \psi_{(\mu,p-1)} = \psi_{(\mu,1)} \sum \left(\frac{r}{p}\right) = 0$$

folgt, so dass

7) $$\psi_{(\mu,0)} = 0$$

wird. Die Definitionsgleichung $\psi_{(\mu,\nu)} = \sum_\alpha \left(\frac{\alpha_1}{p}\right) \cdots \left(\frac{\alpha_\mu}{p}\right)$, $\Sigma\alpha \equiv \nu$ *mod p* kann man auch schreiben:

$$\psi_{(\mu,\nu)} = \sum \left\{\left(\frac{\alpha_\mu}{p}\right) \sum \left(\frac{\alpha_1}{p}\right) \cdots \left(\frac{\alpha_{\mu-1}}{p}\right)\right\},$$

so dass sich findet:

$$\psi(\mu, \nu) = \sum \left\{\left(\frac{\alpha_\mu}{p}\right) \psi(\mu-1, \nu-\alpha_\mu)\right\},$$

woraus sich im speciellen Falle $\nu = 0$ ergiebt:

$$\psi(\mu, 0) = \sum \left(\frac{\alpha_\mu}{p}\right) \psi(\mu-1, -\alpha_\mu)$$

oder mit Benutzung von 4):

$$\psi(\mu-1, -\alpha_\mu) = \left(\frac{-\alpha_\mu}{p}\right)^{\mu-1} \psi(\mu-1, 1),$$

so dass

$$\psi(\mu, 0) = \sum \left(\frac{-\alpha_\mu}{p}\right)^\mu \left(\frac{-1}{p}\right) \psi(\mu-1, 1)$$

wird. Für ein gerades $\mu$ ergiebt sich daraus:

$$\psi(\mu, 0) = \left(\frac{-1}{p}\right) \psi(\mu-1, 1).(p-1)$$

oder mit Benutzung von 6):

8) $$\psi(\mu, k) = -\left(\frac{-1}{p}\right)\psi(\mu-1, 1), \quad \mu \equiv 0 \; mod\, 2.$$

Für ein ungerades $\mu$ erhält man aus der Recursionsformel:

$$\psi(\mu, k) = \sum\left(\frac{\alpha_\mu}{p}\right)\psi(\mu-1, k-\alpha_\mu)$$
$$= \left(\frac{k}{p}\right)\psi(\mu-1, 0) + \sum\left(\frac{\alpha_u}{p}\right)\psi(\mu-1, k-\alpha_\mu).$$

Demnach ergiebt sich nach Formel 5):

$$\psi(\mu, k) = \left(\frac{k}{p}\right)\psi(\mu-1, 0) + \psi(\mu-1, 1)\sum\left(\frac{\alpha_\mu}{p}\right)$$

oder

$$= \left(\frac{k}{p}\right)\{\psi(\mu-1, 0) - \psi(\mu-1, 1)\}$$

oder aber mit Benutzung von 6):

9) $$\psi(\mu, k) = -\left(\frac{k}{p}\right)p\;\psi(\mu-1, 1), \quad \mu \equiv 1 \; mod\, 2.$$

Aus den beiden Formeln 8) und 9) resultirt, wenn $\lambda$ eine ganze Zahl bedeutet, ohne Weiteres folgendes System Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{lll} \psi(2\lambda+1, 1) & = - \quad p & .\psi(2\lambda, 1), \\ \psi(2\lambda, 1) & = -\left(\frac{-1}{p}\right) & \cdot\psi(2\lambda-1, 1), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \psi(2, 1) & = -\left(\frac{-1}{p}\right) & \cdot\psi(1, 1), \end{array}\right.$$

woraus sich durch Multiplication ableitet:

$$\psi(2\lambda+1, 1) = (-1)^{2\lambda}\left(\frac{-1}{p}\right)^{\lambda} p^{\lambda}\,\psi(1, 1)$$

oder, da $\psi(1, 1) = 1$ ist,

10) $$\psi(2\lambda+1, 1) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\lambda} p^{\lambda}.$$

2.

Ist $q = 2\lambda+1$ wie $p$ eine positive ungerade Primzahl, so ist nach der eben gefundenen Formel:

11) $$\psi(q, 1) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} p^{\frac{q-1}{2}}.$$

Nach der Definitionsgleichung ist aber:

$$\psi(q, 1) = \sum\left(\frac{\alpha_1}{p}\right)\cdots\left(\frac{\alpha_q}{p}\right), \quad \Sigma\alpha \equiv 1 \; mod\, p;$$

für $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_q = \alpha$ nun wird $q\alpha \equiv 1 \; mod\, p$. Es giebt hiernach in jener Summe für $\psi(q, 1)$ nur ein Glied, in welchem die $\alpha$ gleich sind. Daher folgt aus 11):

$$\psi(q, 1) = \left(\frac{\alpha}{p}\right)^q + \Delta = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} p^{\frac{q-1}{2}}.$$

In $\varDelta=\sum\left(\frac{\alpha_1}{p}\right)\cdots\left(\frac{\alpha_q}{p}\right)$ dürfen die $\alpha$ nicht gleichzeitig einander gleich werden. — Da $q$ ungerade ist, so erhält man schliesslich, wenn man noch berücksichtigt, dass aus

$$q\,\alpha\equiv 1 \bmod p,\quad 1=\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{\alpha}{p}\right) \text{ folgt:}$$

12) $$(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}\,p^{\frac{q-1}{2}}-\left(\frac{q}{p}\right)=\varDelta.$$

Schreibt man die Summe $\varDelta$ *in extenso*, so entsteht:

13) $$\varDelta=\sum\left\{\begin{matrix}\left(\frac{\alpha_1}{p}\right)\left(\frac{\alpha_2}{p}\right)\cdots\left(\frac{\alpha_q}{p}\right)\\ \left(\frac{\alpha_2}{p}\right)\left(\frac{\alpha_3}{p}\right)\cdots\left(\frac{\alpha+1}{p}\right)\\ \cdots\cdots\cdots\\ \left(\frac{\alpha_q}{p}\right)\left(\frac{\alpha_1}{p}\right)\cdots\left(\frac{\alpha_{q-1}}{p}\right)\end{matrix}\right\}.$$

Man kann also $\varDelta$ in eine Reihe von Gruppen zerlegen, so dass jede Gruppe aus $q$ einander gleichen Summanden besteht. Es ist daher $\varDelta\equiv 0 \bmod q$ und nach 12):

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}\,p^{\frac{q-1}{2}}\equiv\left(\frac{q}{p}\right) \bmod q,\quad \text{q. e. d.}$$

## VI. Beweis von Liouville.[1])

Ist $p$ eine positive ungerade Primzahl und $\varrho$ eine primitive Wurzel von $x^p=1$, so ist:

1) $$\frac{x^p-1}{x-1}=(x-\varrho^2)\cdot(x-\varrho^4)\ldots+(x-\varrho^{2(p-1)})=1+x+x^2+\ldots+x^{p-1},$$

woraus für $x=1$:

$$p=(-1)^{\frac{p-1}{2}}(\varrho-\varrho^{-1})^2\cdot\ldots\cdot\left(\varrho^{\frac{p-1}{2}}-\varrho^{-\frac{p-1}{2}}\right)^2$$

folgt. Durch Potenzirung erhält man hieraus:

2) $$p^{\frac{q-1}{2}}=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}\prod_{\alpha=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\varrho^{\alpha q}-\varrho^{-\alpha q}}{\varrho^{\alpha}-\varrho^{-\alpha}}\equiv\left(\frac{p}{q}\right) \bmod q,$$

wobei $q$ eine von $p$ verschiedene positive ungerade Primzahl bedeuten möge.

Die einzelnen Factoren von $\prod\frac{\varrho^{\alpha q}-\varrho^{-\alpha q}}{\varrho^{\alpha}-\varrho^{-\alpha}}$ werden nun positiv oder negativ, je nachdem $\alpha q$ einen positiven oder negativen absolut kleinsten Rest Modulo $p$ lässt. Mit Hilfe des Gauss'schen Lemmas erhält man demnach aus 2):

$$\left(\frac{p}{q}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}\left(\frac{q}{p}\right),$$

unsere bekannte Gleichung.

---

1) C. R. XXIV (1847), S. 577, und Liouville J. XII, S. 95.

## VII. Erster Beweis von Lebesgue.[1])

### 1.

Sind $p$ und $q$ von einander verschiedene positive ungerade Primzahlen, und betrachtet man die Congruenz:

$$1)\qquad x_1^2+x_2^2+\ldots+x_q^2 \equiv a \ mod p,$$

so wird, wenn $x_1, \ldots x_q$ die Werthe $1, 2, \ldots p-1$ mit Wiederholung annehmen, was auf

$$2)\qquad (p-1)^q$$

verschiedene Weise geschehen kann, auch $a$ verschiedene Werthe annehmen; Modulo $p$ möge $a$ $n_q^0$-mal der Null, $n_q^a$-mal einem quadratischen Reste und $n_q^b$-mal einem quadratischen Nichtreste ($a$ mögen die quadratischen Reste, $b$ die quadratischen Nichtreste Modulo $p$ darstellen) congruent werden. Dann ist:

$$3)\qquad n_q^0+n_q^a+n_q^b=(p-1)^q.\text{[2]})$$

Nimmt man für $a$ einen bestimmten Werth $a_1$, so möge $n_q^{a_1}=n_q$ werden; da nun alle Reste in der Form $ay^2$ enthalten sind, so ergiebt sich, dass für ein ganz beliebiges $a$ ebenfalls $n_q^a=n_q$ wird. Ganz dasselbe gilt von den Nichtresten, so dass man erhält, wenn man $n_q^b=n'_q$ setzt:

$$4)\qquad n_q^0+(n_q+n'_q)\frac{p-1}{2}=(p-1)^q.$$

Lebesgue berechnet nun die Grössen $n_q^0$, $n_q$ und $n'_q$. Aus der bekannten Gauss'schen Formel

$$G=\sum_{\lambda=1}^{p-1}\left(\frac{\lambda}{p}\right)\varrho^\lambda=\sqrt{p\,(-1)^{\frac{p-1}{2}}},\quad \varrho^p=1$$

und der Formel

$$1+\varrho+\varrho^2+\ldots+\varrho^{p-1}=0$$

folgt:

$$5)\quad G=\sum_\lambda \varrho^{\lambda^2}=\sqrt{p(-1)^{\frac{p-1}{2}}} \text{ oder } G-1=\varrho+\varrho^4+\ldots=\sqrt{p.(-1)^{\frac{p-1}{2}}}.$$

Durch Potenzirung erhält man:

$$(G-1)^q=n_q^0+n_q\sum_a \varrho^a+n'_q\sum \varrho^b.$$

Es ist aber $\Sigma\varrho^a-\Sigma\varrho^b=G$ und $1+\Sigma\varrho^a+\Sigma\varrho^b=0$, folglich:

$$6)\qquad 2n_q^0-n_q-n'_q+(n_q-n'_q)\,G=2(G-1)^q.$$

Da $q$ ungerade vorausgesetzt war, findet sich $(G-1)^q=PG-Q$ und somit

$$7)\qquad 2n^0_q-n_q-n'_q=-2Q,\quad n_q-n'_q=2P,$$

---

1) Liouville J. XII (1847), S. 457.

2) Lässt man für $x$ die Werthe $0, 1, \ldots p-1$ zu, und bezeichnet man die dann entstehenden $n$ mit $N$, so wird $N_q^0+N_q^a+N_q^b=p^q$. Diese Formel kann man ebenfalls benutzen.

worin $P \equiv p^{\frac{q-1}{2}} (-1)^{\frac{p-1 \cdot q-1}{4}} \bmod q$ und $Q \equiv 1 \bmod q$ ist. Durch Vergleichung von 7) mit 4) ergiebt sich:

$$8)\qquad n_q \equiv \frac{(p-1)^q + 1}{p} + p^{\frac{q-1}{2}} (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}} \bmod q.^{1)}$$

2.

Die Congruenz $x^2 \equiv a \bmod p$ hat, wenn sie überhaupt möglich ist, stets zwei, Modulo $p$ von einander verschiedene Wurzeln. Daraus geht hervor:

$$9)\qquad n_q = 2^q S_q, \text{ wobei } S_q \text{ ganzzahlig ist (incl. Null).}$$

Wenn ferner:

$$10)\qquad x_1^2 + \cdots + x_q^2 \equiv a \bmod p$$

erfüllt wird für $x_1 = x_q = \cdots = x_q$, so ist $q x_1^2 \equiv a \bmod p$ oder $\left(\frac{aq}{p}\right) = 1$. Ist umgekehrt $\left(\frac{aq}{p}\right) = 1$, und setzt man $q x_1^2 \equiv a \bmod p$, so wird 10) immer lösbar sein für $x_1 = x_2 = \cdots = x_q$. Bedenkt man weiter, dass die Anzahl der Lösungen von 10), die $x$ nicht gleich vorausgesetzt, ein Multiplum von $q$ ist, da $q$ eine Primzahl sein soll, so ergiebt sich:

$$11)\qquad \begin{cases} S_q = qR + 1, & \text{wenn } \left(\frac{q}{p}\right) = +1 \\ S_q = qR, & \text{wenn } \left(\frac{q}{p}\right) = -1 \end{cases} \qquad (R \text{ ist eine ganze Zahl}).$$

Andererseits war $n_q = 2^q S_q$, so dass:

$$n_q \equiv 2^q \equiv 1 + 1 \bmod q, \quad \text{wenn } \left(\frac{q}{p}\right) = +1, \text{ und}$$

$$n_q \equiv 0 \equiv 1 - 1 \bmod q, \quad \text{wenn } \left(\frac{q}{p}\right) = -1 \text{ ist, woraus}$$

$$12)\qquad n_q \equiv 1 + \left(\frac{q}{p}\right) \bmod q$$

resultirt. Aus der Vergleichung dieser Formel mit 8) folgt unter Anwendung des Fermat'schen Satzes unmittelbar unsere Formel.

## VI. Capitel.

### Beweise durch Sätze aus der Theorie der quadratischen Formen.

#### Vorbemerkung.

Bekanntlich nennt man den Complex sämmtlicher äquivalenter Formen derselben Determinante eine Formenclasse. — Sind ferner in der Form

---

1) Ganz ähnliche Formeln ergeben sich für $n_q^0$, $n'_q$, $N_q^0$, $N_q$, $N'_q$.

$(a, b, c)$ $a$, $b$ und $c$ relativ prim, so nennt man die Form eine ursprüngliche oder primitive; ist der Theiler $\sigma$ von $a$, $2b$, $c$ wiederum 1, so ist $(a, b, c)$ eine ursprüngliche Form erster Art, während, wenn $\sigma = 2$, man sie eine ursprüngliche Form zweiter Art nennt. Eine *forma anceps* endlich ist eine solche, bei der der doppelte mittlere Coefficient $(2b)$ durch den ersten theilbar ist. $(1, 0, -D)$ nennt man die Hauptform der Determinante $D$; die Classe, in die sie gehört, die Hauptclasse. Sind die äusseren Coefficienten einer Form positiv, so nennt man die Form eine positive.

Sind nun $z$, $z'$ durch dieselbe quadratische Form darstellbar, ist also:

$$z = a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2, \quad z' = a\gamma^2 + 2b\gamma\delta + c\delta^2,$$

so wird $x^2 - zz' = Dy^2$, so dass, wenn $z$, $z'$ relativ prim zu $D$ sind:

$$1) \qquad \left(\frac{zz'}{D}\right) = +1 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{z}{D}\right) = \left(\frac{z'}{D}\right)$$

ist. Wir setzen nun $D = pq = 4n + 1$, wo $p$ und $q$ Primzahlen sind, voraus. Dann werden $\left(\frac{z}{p}\right)$, $\left(\frac{z}{q}\right)$ ganz bestimmte Werthe (Charaktere) haben. Diese können verschieden gruppirt sein. Wenn $D$ nur in zwei Primzahlen sich zerfällen lässt, so sind die verschiedenen Gruppen:

$$2) \qquad \begin{cases} +1, \ +1; \ -1, \ -1; \\ +1, \ -1; \ -1, \ +1. \end{cases}$$

Ist die Anzahl der Factoren von $D$, um dies der Vollständigkeit halber zu erwähnen, $\lambda$, so giebt es $2^\lambda$ verschiedene Gruppirungen der Vorzeichen. — Nehmen nun die Charaktere $\left(\frac{z}{p}\right)$ und $\left(\frac{z}{q}\right)$ für eine bestimmte Form von der Determinante $D = 4n + 1$ die Werthe $c_1$, $c_2$ an, so nennt man den Inbegriff aller ursprünglichen Formen von gleicher Determinante und Art, welche dieselben Charaktere (denselben Totalcharakter) haben, ein Geschlecht.

Aus 1) ergiebt sich, dass jedes Geschlecht aus einer Anzahl Formenclassen besteht. Dasjenige Geschlecht, welches die Hauptform und damit die Hauptclasse enthält, nennt man das Hauptgeschlecht. Unmittelbar evident ist, dass der Totalcharakter des Hauptgeschlechtes für $D = pq = 4n + 1 : 1, 1$ ist, weil ja $\left(\frac{1}{p}\right) = 1 = \left(\frac{1}{q}\right)$ ist.

## I. Gauss' zweiter Beweis.[1]

Dieser Beweis beruht auf folgendem Lemma: Die Anzahl der für eine gegebene Determinante wirklich existirenden Geschlechter ist halb so gross als die Anzahl der möglichen Geschlechter, d. h. halb so gross als die Anzahl

1) D. A. Art. 257. Dirichlet, Zahlenth., Suppl. IV. und X.

der existirenden Totalcharaktere. Der Nachweis der Richtigkeit dieses Satzes soll nicht geführt werden, da zu diesem Zwecke ein grosser Theil der Theorie der quadratischen Formen zu reproduciren wäre.

Gauss schliesst nun in folgender Weise:

I. $\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)$; $p$ und $q$ mögen den oft angeführten Bedingungen genügen und ausserdem sei $p\equiv 1 \mod 4$. Ist zunächst $\left(\frac{q}{p}\right)=1$, so ist auch $\left(\frac{-q}{p}\right)=1$. Bestimmt man nun das Vorzeichen von $q$ so, dass $\pm q\equiv 1 \mod 4$ wird, so ist die Gleichung $\pm q = b^2 - cp$ möglich. Setzt man $\pm q \equiv D$, so ist also $(p, b, c)$ eine ursprüngliche Form erster Art von der Determinante $D\equiv 1 \mod 4$, Da nun $D$ eine Primzahl von der Form $4n+1$ ist, so ist die Anzahl der angebbaren Totalcharaktere 2. Es existirt also nach unserem Lemma nur ein Geschlecht, das Hauptgeschlecht. Da somit $(p, b, c)$ stets in die Form $(1, 0, -D)$ transformirt werden kann, so ergiebt sich, da $\left(\frac{1}{D}\right)=1$:

$$\left(\frac{p}{q}\right)=+1.$$

Ist $\left(\frac{q}{p}\right)=-1$, so muss auch $\left(\frac{p}{q}\right)=-1$ sein. Wäre nämlich $\left(\frac{p}{q}\right)=+1$, so gäbe es eine ursprüngliche Form erster Art, $(q, b, c)$, von der Determinante $D=p\equiv 1 \mod 4$, woraus $\left(\frac{q}{p}\right)=+1$ folgen würde, was der Annahme $\left(\frac{q}{p}\right)=-1$ widerspricht.

II. $\left(\frac{p}{q}\right)=-\left(\frac{q}{p}\right)$; beide Primzahlen sind von der Form $4n+3$. Gauss betrachtet in diesem Falle Formen von der Determinante $D=pq \equiv 1 \mod 4$. Die Anzahl der angebbaren Totalcharaktere ist da gleich 4. Es giebt also zu $D$, nach unserem Lemma, höchstens zwei verschiedene Geschlechter. Die beiden ursprünglichen Formen erster Art: $(1, 0, -pq)$ und $(-1, 0, pq)$ gehören aber zwei verschiedenen Geschlechtern, die erstere davon dem Hauptgeschlecht an; folglich muss die Form $(p, 0, -q)$ einem der durch jene beiden Formen repräsentirten Geschlechter angehören. Ist nun $(p, 0, -q)$ in das Hauptgeschlecht zu rechnen, so ist $\left(\frac{p}{q}\right)=+1$, $\left(\frac{-q}{p}\right)=1$, mithin $\left(\frac{q}{p}\right)=-1$, während, wenn $(p, 0, -q)$ zu dem durch die Form $(-1, 0, pq)$ repräsentirten Geschlecht gehört, $\left(\frac{p}{q}\right)=-1$, $\left(\frac{-q}{p}\right)=-1$, also $\left(\frac{q}{p}\right)=1$ ist. Damit aber ist unser Gesetz bewiesen.

## II. Kummer's erster Beweis.[1])

In der Pell'schen Gleichung:

$$1)\qquad t^2 - Du^2 = 1$$

habe $D$ die Form $4n+1$, so dass $t$ ungerade und $u$ gerade wird. Aus $(t+1)(t-1) = Du^2$ ergiebt sich:

$$2)\qquad \begin{cases} t+1 = 2m\varkappa^2 \\ t-1 = 2m'\lambda^2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} mm' = D \\ 2\varkappa\lambda = u \end{pmatrix},$$

woraus durch Subtraction

$$3)\qquad 1 = m\varkappa^2 - m'\lambda^2$$

folgt. Sind nun $t$ und $u$ die kleinsten positiven Werthe, welche Gleichung 1) erfüllen, so findet nach 2) nur eine einzige Zerfällung von $D$ statt, und das Werthepaar $m=1$, $D=m'$ oder $m=D$, $m'=1$ ist ausgeschlossen, weil $\varkappa$ und $\lambda$ kleiner als $t$ sein sollen.

Aus $1 = m\varkappa^2 - m'\lambda^2$ erhält man nun die wichtige Relation:

$$4)\qquad \left(\frac{m}{m'}\right) = 1, \quad \left(\frac{-m'}{m}\right) = 1, \quad \left(\frac{-m'}{p}\right) = 1,$$

wenn $p$ ein beliebiger Factor von $m$ ist.

Kummer zerfällt nun $D$ auf verschiedene Weise in Primfactoren.

I. $D = pp'$ und $p \equiv p' \equiv 3 \mod 4$. Dann kann Gleichung 3), nach Absonderung der Formen $1 = \varkappa^2 - pp'\lambda^2$, $1 = \varkappa^2 pp' - \lambda^2$, die nach obiger Annahme ausgeschlossen sind, nur die beiden Formen annehmen:

$$1 = p\varkappa^2 - p'\lambda^2, \text{ wenn } \left(\frac{p}{p'}\right) = 1, \quad \left(\frac{p'}{p}\right) = -1,$$

$$1 = p'\varkappa^2 - p\lambda^2, \text{ wenn } \left(\frac{p'}{p}\right) = 1, \quad \left(\frac{p}{p'}\right) = -1,$$

so dass also,

$$\text{wenn } \left(\frac{p}{p'}\right) = \ \ 1 \text{ ist, } \left(\frac{p'}{p}\right) = -1, \text{ und}$$

$$\text{wenn } \left(\frac{p}{p'}\right) = -1 \text{ ist, } \left(\frac{p'}{p}\right) = +1 \text{ wird.}$$

II. $D = pp'q$, $p \equiv p' \equiv 3 \mod 4$ und $q \equiv 1 \mod 4$. Dann kann $D$ auf $2^3 = 8$-fache Weise in 2 Factoren zerlegt werden; also wären nach obiger Annahme, wonach die beiden Fälle $m=1$ resp. $m'=1$ auszuschliessen sind, 6 Fälle zu unterscheiden. Bestimmt man nun $p'$ so, dass

$$\left(\frac{p'}{p}\right) = -1, \text{ also } \left(\frac{p}{p'}\right) = +1, \text{ und } \left(\frac{p'}{q}\right) = -1,$$

und schliesst von jenen 6 Fällen noch die aus, welche diesen Bedingungen widersprechen, so bleiben folgende 3 Fälle übrig:

---

1) Abh. der Berl. Akad. 1861.

1) $1 = p\,\varkappa^2 - p'q\,\lambda^2$, wenn $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$, $\left(\frac{q}{p}\right) = 1$;

2) $1 = q\,\varkappa^2 - pp'\,\lambda^2$, wenn $\left(\frac{q}{p}\right) = 1$, $\left(\frac{q}{p'}\right) = 1$, $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$;

3) $1 = pp'\,\varkappa^2 - q\,\lambda^2$, wenn $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$, $\left(\frac{q}{p'}\right) = -1$, $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$.

Es giebt aber nur eine Zerfällung von $D$; und es findet, wenn $\left(\frac{p}{q}\right) = +1$ ist, nur der erste der drei Fälle statt; und wenn $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$, nur der dritte. Das heisst:

$$\text{wenn } \left(\frac{p}{q}\right) = +1, \text{ so } \left(\frac{q}{p}\right) = +1,$$
$$\text{wenn } \left(\frac{p}{q}\right) = -1, \text{ so } \left(\frac{q}{p}\right) = -1.$$

III. $D = pp'qq'$, $p \equiv p' \equiv 3 \mod 4$ und $q \equiv q' \equiv 1 \mod 4$. Kummer nimmt an, es könnten die Zahlen $p$ und $p'$ so gewählt werden, dass

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{p'}{q'}\right) = -1 \text{ und } \left(\frac{p}{q'}\right) = \left(\frac{p'}{q}\right) = +1$$

sei. Schliesst man dann von den 16 Fällen, die bei der Zerlegung von $D$ möglich sind, die aus, welche den eben gestellten Bedingungen widersprechen und die beiden Fälle, in denen $m'$ resp. $m$ gleich 1 wird, so sieht man, kann Gleichung 3) nur die folgenden 3 Formen haben:

1) $1 = pq\,\varkappa^2 - p'q'\,\lambda^2$, wenn $\left(\frac{p}{p'}\right) = 1$, $\left(\frac{q}{q'}\right) = 1$, $\left(\frac{q'}{q}\right) = 1$.

2) $1 = p'q\,\varkappa^2 - pq'\,\lambda^2$, wenn $\left(\frac{p'}{p}\right) = -1$, $\left(\frac{q}{q'}\right) = -1$, $\left(\frac{q'}{q}\right) = -1$.

3) $1 = p'q'\,\varkappa^2 - pq\,\lambda^2$, wenn $\left(\frac{p'}{p}\right) = 1$, $\left(\frac{q'}{q}\right) = 1$, $\left(\frac{q}{q'}\right) = 1$.

Wenn nun $\left(\frac{q}{q'}\right) = -1$ ist, so ist nur der zweite Fall möglich, nach welchem $\left(\frac{q'}{q}\right) = -1$ wird, während, wenn $\left(\frac{q}{p}\right) = +1$ ist, entweder Fall 1 oder Fall 3 eintritt; in beiden Fällen resultirt $\left(\frac{p}{q}\right) = +1$.

Die bewiesenen drei Theoreme, die sich so aussprechen:

Wenn $\left(\frac{p}{p'}\right) = 1$, so $\left(\frac{p'}{p}\right) = -1$; wenn $\left(\frac{p}{p'}\right) = -1$, so $\left(\frac{p'}{p}\right) = 1$.

„ $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$, „ $\left(\frac{q}{p}\right) = 1$; „ $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$, „ $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$

„ $\left(\frac{q}{q'}\right) = -1$, „ $\left(\frac{q'}{q}\right) = -1$; „ $\left(\frac{q}{q'}\right) = +1$, „ $\left(\frac{q'}{q}\right) = +1$

$$(p \equiv p' \equiv 3 \mod 4, \quad q \equiv q' \equiv 1 \mod 4),$$

lassen sich nun sofort in das bekannte Fundamentatheorem in der Theorie der quadratischen Reste und Nichtreste zusammenfassen.

Es ist bei diesem Beweise die Voraussetzung gemacht, dass es stets Primzahlen $p$ von der Form $4n+3$ giebt, für die $\left(\frac{p}{r}\right)=-1$, $\left(\frac{p}{q}\right)=+1$ ist ($r$ ist eine beliebige positive ungerade Primzahl, $q$ eine solche von der Form $4n+1$). Wie aber leicht zu übersehen, ist diese Voraussetzung erfüllt, wenn nachgewiesen werden kann, dass es in einer unbegrenzten arithmetischen Reihe, deren erstes Glied und deren Differenz ganze, relativ prime Zahlen sind, unendlich viele Primzahlen giebt. Der Beweis hierfür ist aber von Dirichlet[1]) erbracht worden, wodurch die Voraussetzung als richtig nachgewiesen ist.

## III. Kummer's zweiter Beweis.[2])

$p$ und $p'$ seien verschiedene positive Primzahlen von der Form $4n+3$, und $q$ und $q'$ solche von der Form $4n+1$.

Ist dann erstens $r$ eine Primzahl, welche sich durch eine binäre quadratische Form $C$ von der Determinante $-p$ darstellen lässt, so dass

$$1)\qquad \left(\frac{-p}{r}\right)=1$$

ist, so wird im Allgemeinen die Classe $C$, welcher jene darstellende Form angehört, die Hauptclasse $K$ nicht sein; wohl aber wird eine Potenz von $r$ durch $K=x^2+py^2$ sich darstellen lassen, und der Exponent von $r$ wird eine ungerade Zahl und ein Theiler der Classenanzahl $n$ der quadratischen Formen von der Determinante $-p$ sein. Die Classen $K$, $C$, $C^2$, ... $C^v$ gehören nämlich in das Hauptgeschlecht und können bei hinlänglich grossem $v$ nicht sämmtlich von einander verschieden sein. Ist nun für $r>s$:

$$C^r=C^s,\ \text{so ergiebt sich hieraus}\ C^{r+1-s}=C.$$

Setzt man $r-s=m-1$, so ist nun entweder $m=n$, also $n\equiv 0 \bmod m$, oder $m \quad n$. Im ersteren Falle erschöpfen die Formenclassen:

$$2)\qquad K,\ C,\ C^2,\ \ldots\ C^{m-1}$$

das Hauptgeschlecht vollständig; im anderen Falle geschieht dies nicht. Ist nun $C'$ eine in $C$, ... $C^{m-1}$, $K$ nicht enthaltene Formenclasse, so werden

$$3)\qquad C',\ CC',\ C^2C',\ \ldots\ C^{m-1}C'$$

$m$ von einander und auch von den in 2) dargestellten verschiedene Formen sein. Es ist da wiederum entweder $2m=n$ oder $2m<n$. Im ersteren Falle ist die Behauptung, wonach $n\equiv 0 \bmod m$ sein soll, erfüllt; im anderen Falle nicht. Man führt da wiederum eine neue Formenclasse $C''$, wenn

---

1) Abh. der Berl. Akad. 1837 oder Liouville J. XII., S. 393.

2) Abh. der Berl. Akad. 1861.

auch diese noch nicht genügt, eine folgende u. s. w. ein. So gelangt man allgemein zu dem Resultat, dass $m$ ein Theiler von $n$ ist. Es ist jener Exponent $m$ aber auch nothwendig ungerade, weil es für $-p$ als Determinante nur eine *forma anceps* giebt, und die übrigen Formenclassen nach $C^{m-\vartheta} = C^{\vartheta}$ paarweise vorkommen.

Ist nun $m = 2h+1$, so ist $x^2 + py^2 = r^{2h}.r$, woraus

$$\left(\frac{r}{p}\right) = 1$$

sich ergiebt. Ist also $\left(\frac{-p}{r}\right) = 1$, so ist

A) $$\left(\frac{r}{p}\right) = 1.$$

Ist zweitens $r$ eine Primzahl, welche sich durch eine Form von der Determinante $q$ darstellen lässt, so dass also $\left(\frac{q}{r}\right) = 1$ ist, so wird ganz analog

$$x^2 - qy^2 = r^{2h} r,$$

so dass $\left(\frac{r}{q}\right) = 1$ resultirt. Ist also

B) $$\left(\frac{q}{r}\right) = 1, \text{ so ist auch } \left(\frac{r}{q}\right) = 1.$$

Die beiden Formeln A) und B) ergeben aber das Reciprocitätsgesetz, da $r$ eine beliebige Primzahl und $p$ von der Form $4n+3$, $q$ von der Form $4n+1$ ist.

## VII. Capitel.

### Die Ergänzungssätze des quadratischen Reciprocitätsgesetzes und das verallgemeinerte Reciprocitätsgesetz.

### I. Die Ergänzungssätze.

Wir haben bei unseren Betrachtungen die Annahme gemacht, dass die Ergänzungssätze des quadratischen Reciprocitätsgesetzes, welche durch die Formeln:

$$\text{I)} \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \text{ und II)} \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$$

ausgedrückt werden, schon bewiesen seien. In diesem Abschnitte wollen wir die Formeln I) und II) mit Hilfe der Methoden, die in den vorhergehenden Capiteln zur Ableitung der Relation $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$ entwickelt wurden, verificiren. Zuvörderst bemerken wir, dass Formel I) eine unmittelbare Folge des Fermat'schen Satzes ist.

#### 1. Beweis für Formel I) durch „verwandte Reste"[1]), für Formel II) durch vollständige Induction.

Die lineare Congruenz $ay \equiv 1 \bmod p$ lässt für relativ prime Zahlen $a$ und $p$ nur eine Lösung zu. Ist nun $a$ ein beliebiger der $\frac{p-1}{2}$ quadra-

1) Euler, Opusc. anal. 1783. I. S. 185. Gauss, D. A., Art. 109.

tischen Reste nach der Primzahl $p$ als Modul, so wird $y$ entweder gleich $a$ oder von $a$ verschieden sein; im letzteren Falle nennt Euler $a$ und $y$ verwandte Reste *(residua socia)*. Kommt nun der erste Fall $b$mal, der zweite $c$mal vor, so ist

$$\frac{p-1}{2} = b + 2c,$$

d. h. die Anzahl der quadratischen Reste $a$, welche der Congruenz $ay \equiv 1 \mod p$ genügen, so dass $a^2 \equiv 1 \mod p$ wird, ist gerade für $p = 4n+1$, dagegen ungerade für $p = 4n+3$; in Formeln:

$$b \equiv 0 \mod 2, \text{ wenn } p = 4n+1,$$
$$b \equiv 1 \mod 2, \text{ wenn } p = 4n+3.$$

1 und $p-1$ genügen der Congruenz $x^2 \equiv 1 \mod p$, sind also, da diese Congruenz nicht mehr als zwei Wurzeln hat, sämmtliche Wurzeln derselben, so dass $b \leqq 2$. 1 ist Rest aller Primzahlen, so dass sich ergiebt:

$p-1 \equiv -1 \mod p$ ist quadratischer Rest von $p = 4n+1$, da $b \equiv 0 \mod 2$ sein muss, dagegen quadratischer Nichtrest von $p = 4n+3$, da hier $b \equiv 1 \mod 2$ sein muss, q. e. d.

Der Nachweis der Richtigkeit der Formel II) ist von Gauss[1]) durch vollständige Induction geführt worden. Der Satz gilt zunächst, wie Zahlenbeispiele zeigen, für Primzahlen kleiner als z. B. 100. Wäre nun jenseits 100 $\left(\frac{2}{t}\right) = +1$, wobei $t$ zunächst eine Primzahl von der Form $8n \pm 3$ sein möge, so setzt Gauss $2 \equiv a^2 \mod t$, wobei $a$ ungerade und kleiner als $t$ sein soll; dann ist in $-2 = -a^2 + tu$, $u$ von der Form $8n \mp 3$ und kleiner als $t$, und überdies $\left(\frac{2}{u}\right) = +1$. Nimmt man nun an, dass $t$ jenseits 100 die kleinste Zahl ist, für welche $\left(\frac{2}{t}\right) = 1$ ist, so widerspricht dem, dass in $\left(\frac{2}{u}\right) = 1$ $u < t$ ist, und man erhält demnach $\left(\frac{2}{t}\right) = -1$, wenn $t = 8n \pm 3$ ist. Ganz analog ist der Nachweis für $t = 8n+5, 7$; nur muss da an Stelle von $2, -2$ eingeführt werden.

### 2. Beweis der Ergänzungssätze durch Reduction.

Petersen[2]) legt bei seinem Beweise des quadratischen Reciprocitätsgesetzes Modulo der Primzahl $p$ das halbe Restsystem $1, 3, 5, \ldots p-2$ zu Grunde, lässt also nur ungerade Zahlen kleiner als $p$ zu, und definirt $\mu$ in $\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^\mu$ als die Anzahl der negativen ungeraden Reste kleiner

---

1) Gauss, D. A., Art. 112flgg.

2) S. 53 der cit. Abh. im Am. J. of Math. vom Jahre 1879.

als $p$ in $q, 3q, \ldots (p-2)q$. Für $q=-1$ ergiebt sich sofort $\mu$ als die Anzahl der negativen ungeraden Reste in $-1, -3, \ldots -(p-2)$, so dass $\mu = \frac{p-1}{2}$ wird.

Ganz analog ist in $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\mu}$ $\mu$ die Anzahl der negativen ungeraden Reste kleiner als $p$ in

A) $$2,\ 2.3,\ 2.5,\ \ldots\ 2(p-2) \bmod p.$$

Da nun $2(p-a)+2a \equiv 0 \bmod 2$ ist, so ergiebt sich z. B. für $p = 8n+1$, $\mu = \frac{\frac{p-1}{2}}{2} = 2n$, also $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$.

Ganz ebenso ist das Verfahren für $p = 8n-1,\ 8n+3,\ 8n+5$, nur dass in den beiden ersteren Fällen das Mittelglied der Reihe A) besonders zu beachten ist.

### 3. Beweis der Ergänzungsformel $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$ durch Sätze aus der Kreistheilung.

Wir hatten gefunden (cfr. Cap. IV), dass

$$G = \Sigma r^a - \Sigma r^b = \sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}; \quad \Sigma r^a + \Sigma r^b = -1,$$

woraus

1) $$\Sigma r^a = (-1+G)\tfrac{1}{2}$$

folgt. Da nun

$$\sum_a r^{ka} + \sum_b r^{kb} = -1 \quad \text{und} \quad \sum_a r^{ka} - \sum_b r^{kb} = \left(\frac{k}{p}\right) G$$

ist, so wird

2) $$\Sigma r^{ka} = \frac{1}{2}\left(-1 + \left(\frac{k}{p}\right) G\right).$$

Die Formeln 1) und 2) ergeben aber:

3) $$(\Sigma r^a)^2 - \Sigma r^{2a} - \frac{3 + (-1)^{\frac{p-1}{2}} p}{4} = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{2}{p}\right)\right) G,$$

woraus sich, da die rechte Seite ja eine ganze Zahl sein muss, unsere Formel ableitet.

### 4. Beweis der Ergänzungssätze mit Hilfe der Theorie der quadratischen Formen.[1]

Für die Determinante $D = 4n+1 = p$ ist $(-1, 0, p)$ eine ursprüngliche Form 1. Art, die dem Hauptgeschlecht angehört. Es ist also $-1$ quadratischer Rest von $p$. Wäre nun auch für $p = 4n+3$, $-1$ quadratischer Rest, wäre also $-1 = b^2 - cp$, so gäbe es eine Form, ursprünglich und 1. Art $(p, b, c)$ von der Determinante $-1$, welche den

1) Gauss, D. A., Art. 262.

Charakter $-1$ haben müsste, was nicht möglich ist; folglich ist $-1$ quadratischer Nichtrest von $p$, was zu erweisen war.

Methodisch von dem eben Gesagten ist durchaus nicht verschieden der Nachweis für $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$, weshalb er übergangen werden mag. Bemerkt soll nur noch werden, dass für:

$$p = 4n+1 \begin{cases} \equiv 9 \; mod\; 16 \\ \equiv 1 \; mod\; 16 \end{cases} \text{ die Form } \begin{cases} \left(8,\; 1,\; \frac{1-p}{8}\right) \\ \left(8,\; 3,\; \frac{q-1}{8}\right) \end{cases} \text{ und die Determ. } p;$$

$$p \equiv \phantom{\pm} 7 \; mod\; 8 \text{ die Form } (p,\; b,\; c) \text{ und die Determ. } 2,$$
$$p = \pm 3 \; mod\; 8 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad (p,\; b,\; c) \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad 2$$

zu benutzen sind.

## II. Das verallgemeinerte Reciprocitätsgesetz.

Wie wir gesehen haben, wurde das quadratische Reciprocitätsgesetz durch die drei Formeln ausgedrückt:

$$\text{I)}\; \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}; \quad \text{II)}\; \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}; \quad \text{III)}\; \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

Hierin waren $p$ und $q$ als verschiedene positive ungerade Primzahlen vorausgesetzt. Diese Formeln lassen sich zunächst verallgemeinern für negative Primzahlen. In der That erhält man, wenn man setzt

$$p = \varepsilon\,|p|, \quad q = \delta\,|q| \quad (\varepsilon, \delta = \pm 1):$$

$$\text{I)}\; \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{\varepsilon p-1}{2}}, \quad \text{II)}\; \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{2}},$$

$$\text{III)}\; \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = {}^{\frac{\varepsilon p-1}{2}\cdot\frac{\delta q-1}{2}+\frac{\varepsilon-1}{2}\cdot\frac{\delta q-1}{2}+\frac{\delta-1}{2}\cdot\frac{\varepsilon p-1}{2}}$$ [1]).

Mit Hilfe der Jacobi'schen Verallgemeinerung des Legendre'schen Symbols (cfr. Cap. I S. 174) und einer leichten Zwischenrechnung (cfr. S. 180) findet man ferner, dass diese drei Formeln auch giltig bleiben für zusammengesetzte Zahlen. Sind nämlich $P$ und $Q$ zwei theilerfremde ungerade Zahlen und setzt man

$$P = \varepsilon\,|P|, \quad Q = \delta\,|Q|,$$

so ergiebt sich:

$$\text{I)}\; \left(\frac{-1}{P}\right) = (-1)^{\frac{\varepsilon P-1}{2}}, \quad \text{II)}\; \left(\frac{2}{P}\right) = {}^{\frac{P^2-1}{8}},$$

$$\text{III)}\; \left(\frac{P}{Q}\right)\left(\frac{Q}{P}\right) = (-1)^{\frac{\varepsilon P-1}{2}\cdot\frac{\delta Q-1}{2}+\frac{\varepsilon-1}{2}\cdot\frac{\delta Q-1}{2}+\frac{\delta-1}{2}\cdot\frac{\varepsilon Q-1}{2}}.$$

Sind schliesslich $P$ und $Q$ nicht relativ prim, so verliert das Symbol $\left(\frac{P}{Q}\right)$ seinen Sinn. In diesem Falle sagt man: $\left(\frac{P}{Q}\right)$ ist Null.

---

1) Vergl. auch Busche, Dissert., Göttingen 1883.

Hier ist auch noch zu erwähnen die Verallgemeinerung des Gaussschen $\mu$-Lemmas von Schering.[1]) Diese Verallgemeinerung besteht darin, dass Schering zeigt, dass, wenn $A$ und $P$ zwei ganze Zahlen sind und ausserdem $P$ relativ zu $2A$ ist: $\left(\frac{A}{P}\right) = (-1)^{\mu}$ wird, wo $\mu$ die Anzahl der negativen absolut kleinsten Reste in der Zahlenreihe:

$$A,\ 2A,\ 3A,\ \cdots\ \frac{P-1}{2}A \ mod\ P$$

bedeutet. In der zu zweit citirten Abhandlung (Act. math. 1880) hat Schering hierfür einen einfachen arithmetischen Beweis gegeben.

Zu der Schering'schen Verallgemeinerung des Gauss'schen Lemmas ist wieder zu bemerken, dass Kronecker in einer 1876 in den Berliner Monatsberichten S. 301 abgedruckten Abhandlung darauf hinweist, dass er jene Verallgemeinerung schon seit 1869/70 in seinen Collegien vorgetragen habe. — Gestützt auf jenes verallgemeinerte Lemma hat nun Genocchi[2]) für die Richtigkeit von Formel III) einen sehr einfachen Beweis erbracht. Dieser schliesst sich aber dem von demselben Autor im III. Cap. Mitgetheilten so innig an, dass wir ihn hier übergehen dürfen.

## VIII. Capitel.

### Algorithmen zur Bestimmung des quadratischen Rest- oder Nichtrestcharakters einer Zahl in Bezug auf eine andere.

Im Folgenden wollen wir einige Arten der Bestimmung des Symbols $\left(\frac{a}{b}\right)$ darstellen. Es sind dazu im Wesentlichen zwei Methoden angewendet worden. Die eine gründet sich auf die directe Anwendung des Reciprocitätssatzes, die andere auf die Entwickelung des Bruches $\frac{a}{b}$ in einen Kettenbruch. Bei dieser letzteren Bestimmung ist noch zu unterscheiden, dass $\left(\frac{a}{b}\right)$ abhängig gemacht worden ist einmal von den Quotienten und zweitens von den Resten, die bei jener Kettenbruchentwickelung auftreten. Die erste Methode wird ohne Weiteres aus einem Beispiele klar. Es sei $x = (\frac{365}{847})$ zu bestimmen. Da ist zunächst:

$$\begin{aligned} x = (\tfrac{365}{847}) &= (\tfrac{847}{365}), \text{ weil } 365 \equiv 1 \ mod\ 4, \\ &= (\tfrac{117}{365}) = (\tfrac{365}{117}) = (\tfrac{14}{117}) = (\tfrac{117}{14}) = (\tfrac{5}{14}), \\ &= \left(\frac{14}{5}\right) = \left(\frac{-1}{5}\right) = 1, \text{ also} \end{aligned}$$

$$(\tfrac{365}{847}) = +1.$$

1) Berliner Monatsber. 1876, S. 300. — Act. math. I, 1880.
2) Comptes Rendus, XC (1880) S. 300.

### I. Gauss'sche Methode zur Bestimmung von $\left(\frac{a}{b}\right)$.[1]

Gauss setzt $a$ und $b$ theilerfremd und positiv voraus und bildet den Algorithmus:

$$a = bn_1 + c,$$
$$b = cn_2 + d,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$f = gn_\nu + 1.$$

Ist $\left(\frac{b}{a}\right) = (-1)$, so folgt aus dem System Gleichungen:

$$\mu = \varphi(a, b) = a'b' - \tfrac{1}{2}n_1(b'b' + b') - \varphi(b, c),\text{[2]}$$
$$\varphi(b, c) = b'c' - \tfrac{1}{2}n_2(c'c' + c') - \varphi(c, d),$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\varphi(f, g) = f'g' - \tfrac{1}{2}n_\nu(g'g' + g') - 0,$$

wenn allgemein $x' = \left[\frac{x}{2}\right]$ ist:

$$\mu = a'b' - b'c' + c'd' \mp \cdots \pm f'g' - \tfrac{1}{2}\{n_1(b'b' + b') - n_2(c'c' + c') \pm \cdots$$
$$\cdots \pm n_\nu(g'g' + g')\},$$

eine Formel, die wegen ihrer Complicirtheit nicht recht für das praktische Rechnen geeignet ist.

Auf demselben Grundgedanken wie der eben entwickelte Gauss'sche Algorithmus beruht der von Sylvester.[3] Sylvester setzt in

$$a = bn_1 + \varepsilon_1 c_1,$$
$$b = c_1 n_2 + \varepsilon_2 c_2,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

die Quotienten, die bei Gauss beliebig sind, gleich der nächsten an $\frac{b}{a}$ u. s. f. liegenden geraden ganzen Zahl, so dass $n \lesseqgtr \frac{a}{b} \cdots$ sein kann. Die Reste $c$ sind dann sämmtlich ungerade (und bilden die chaîne impaire Sylvester's.[4]) Es ist dann:

$$\left(\frac{a}{b}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}\sum\limits_{\lambda}\{(c_\lambda - 1)(c_{\lambda-1} - 1) + (\varepsilon_\lambda - 1)(\varepsilon_{\lambda-1} - 1)\}}.$$

Als Beispiel diene: $\left(\frac{195}{1901}\right)$. Der Algorithmus ist:

$$1901 = 195 \;.\; 10 - 49,$$
$$195 = (-49) . (-4) - 1,$$

so dass

$$c_\lambda = 1, \quad c_{\lambda-1} = 49; \quad \varepsilon_\lambda = \varepsilon_{\lambda-1} = -1,$$

woraus $\left(\frac{195}{1901}\right) = -1$ resultirt.

---

1) Demonst. et ampl. novae, II. Bd. S. 59.

2) $\mu = \varphi(a, b)$ bedeutet eigentlich $\mu \equiv \varphi(a, b) \bmod 2$.

3) Compt. Rend. XC (1880), S. 1053.

4) Vergl. Gegenbauer, Wiener Ber. 1880, S. 931.

## II. Algorithmen von Eisenstein[1]) und Lebesgue[2]).

In der Gauss'schen und Sylvester'schen Formel spielen die Quotienten des Kettenbruchs eine grosse Rolle. Die Reste sind bei Gauss beliebig gerade oder ungerade, positiv oder negativ; bei Sylvester sind sie sämmtlich ungerade, positiv oder negativ.

I. Eisenstein nun lässt in seinem Algorithmus nur positive ungerade Reste zu. Er erhält somit:

$$\begin{aligned} a &= bn_1 + \varepsilon_1 c \\ b &= cn_2 + \varepsilon_2 d \qquad \begin{pmatrix} a > b > \cdots \\ \varepsilon_k = \pm 1 \end{pmatrix}. \\ &\cdots\cdots \\ f &= gn_\nu + \varepsilon_\nu \end{aligned}$$

Schreibt man nun neben jede der so gebildeten Gleichungen die Randzahl 1, wenn der Divisor und Rest von der Form $4n+3$ sind, dagegen die Null, wenn eine Zahl davon oder beide die Form $4n+1$ haben, so ist: $\left(\frac{a}{b}\right) = 1$, wenn die Summe der Randzahlen gerade, dagegen ist $\left(\frac{a}{b}\right) = -1$, wenn jene Summe ungerade ist.

II. Die Algorithmen von Lebesgue unterscheiden sich von den Eisenstein'schen dadurch, dass Lebesgue nur gerade Reste zulässt. Ist:

$$\begin{aligned} a &= bn_1 + 2^{m_1}\varepsilon_1 c, \\ b &= cn_2 + 2^{m_2}\varepsilon_2 d, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ f &= gn_\nu + 2^{m_\nu}\varepsilon_\nu, \end{aligned}$$

so ist erstens: wenn $\mu$ die Anzahl der Gleichungen ist, in denen einem Divisor $8n \pm 3$ ein Factor $2^{m_i}$ des Restes $c, d, \ldots$ mit ungeradem Exponenten entspricht, und $\nu$ die Anzahl der Gleichungen, in denen Dividend und Rest (letzterer von der Potenz der 2 befreit) beide von der Form $4n+3$ sind: $\left(\frac{a}{b}\right) = (-1)^{\mu+\nu}$.

Ist zweitens $\lambda$ die Anzahl der ungeraden Exponenten $m$, denen Divisoren von der Form $8n \pm 3$, $\mu$ die Anzahl der ungeraden Exponenten, denen Dividenden von derselben Form entsprechen und endlich $\nu$ die Anzahl der Factoren $4n-1$, denen (nach Weglassung der Factoren 2 und $\varepsilon$) Reste von der Form $4n-1$ entsprechen, so ist: $\left(\frac{a}{b}\right) = (-1)^{\lambda+\mu+\nu}$.

Um die eben aufgestellten Formeln in ihrer Anwendung zu zeigen, fügen wir ein Beispiel von Lebesgue hier an.

1) Crelle Journ. XXVII (1844), S. 317.
2) Liouv. Journ. XII (1847), S. 497.

I. Verfahren von Eisenstein. $x = \left(\frac{2933}{3785}\right)$.

$$\begin{aligned} 3785 &= 2933 \,.\, 2 - 2081, & 279 &= 181 \,.\, 2 - 85; \\ 2933 &= 2081 \,.\, 2 - 1229, & 181 &= 85 \,.\, 2 - 11; \\ 2081 &= 1229 \,.\, 2 - 377, & 85 &= 11 \,.\, 8 - 3; \\ 1229 &= 377 \,.\, 4 - 279, & 11 &= 3 \,.\, 4 - 1; \\ 377 &= 279 \,.\, 2 - 181, & & \end{aligned}$$

wonach $\left(\frac{2933}{3785}\right) = 1$ folgt.

II. 1. Verfahren von Lebesgue:

$$\begin{aligned} 3785 &= 2933 \,.\, 1 + 4 \,.\, 213, & & \\ 2933 &= 213 \,.\, 13 + 4 \,.\, 41, & \mu &= 0; \\ 213 &= 41 \,.\, 5 + 8, & \nu &= 0; \end{aligned}$$

so dass ebenfalls $\left(\frac{2933}{3785}\right) = 1$ sich ergiebt.

2. Verfahren von Lebesgue:

$$\begin{aligned} 3785 &= 2933 \,.\, 1 + 852, & 98 &= 83 \,.\, 1 + 15; \\ 2933 &= 852 \,.\, 3 + 377, & 83 &= 15 \,.\, 5 + 8; \\ 852 &= 377 \,.\, 2 + 98, & 15 &= 8 \,.\, 1 + 7; \\ 377 &= 98 \,.\, 3 + 83, & 8 &= 7 \,.\, 1 + 1. \end{aligned}$$

Hieraus folgt: $\lambda = 0$, $\mu = 1$, $\nu = 1$, so dass $\left(\frac{2933}{3785}\right) = (-1)^2 = +1$ ist.

NB. Wenn ein Rest $\pm 2^m r^2$ wird, so sind die folgenden Operationen unnütz.

## III. Die Algorithmen von Gegenbauer.[1])

Während Gauss beliebige Reste, Eisenstein nur ungerade, Lebesgue nur gerade Reste zulässt, nimmt Gegenbauer zur Ableitung seiner Algorithmen abwechselnd gerade und ungerade Reste. Sind $a$ und $b$ ungerade und relativ prim, und $a > b$, so entwickelt Gegenbauer $\frac{-2b}{a}$ in einen Kettenbruch, dessen Theilzähler sämmtlich $-1$, dessen Theilnenner gerade sind. Die Reste sind dann abwechselnd gerade und ungerade; sind ihre Vorzeichen $\varepsilon$, so ist dann:

$$\left(\frac{b}{a}\right) = (-1)^{\frac{1}{8}\left\{2\sum_\lambda \varepsilon_\lambda \varepsilon_{\lambda-1} + (a-1)^2\right\}}.$$

Ist nun $a \equiv \pm 1 = \varepsilon \bmod 4$, so wird:

$$\left(\frac{b}{a}\right) = (-1)^{\frac{1}{8}\left\{2\sum_\lambda \varepsilon_\lambda \varepsilon_{\lambda-1} + (\varepsilon-1)^2\right\}};$$

$b$ ist mithin Rest von $a$, wenn $\sum \varepsilon_\lambda \varepsilon_{\lambda-1} \equiv -\frac{(\varepsilon-1)^2}{2} \bmod 8$, und $b$ ist Nichtrest von $a$, wenn $\sum \varepsilon_\lambda \varepsilon_{\lambda-1} \equiv 4 - \frac{(\varepsilon-1)^2}{2} \bmod 8$. Mit anderen

1) Wiener Ber. 1880, S. 931.

Worten: $\left(\frac{b}{a}\right) = +1$, wenn die Anzahl der Zeichenfolgen in der Reihe der $\varepsilon_\lambda$ vermindert um die Anzahl der Zeichenwechsel congruent 0 oder 6 *mod* 8 ist; dagegen wird $\left(\frac{b}{a}\right) = -1$, wenn jene Differenz congruent 2 oder 4 *mod* 8 ist. Denn $\varepsilon_\lambda \varepsilon_{\lambda-1}$ ist positiv, wenn zwischen $\varepsilon_{\lambda-1}$ und $\varepsilon_\lambda$ Zeichenfolge, dagegen negativ, wenn zwischen diesen Grössen Zeichenwechsel stattfindet.

Beispiel. Es ist $x = (\frac{173}{913})$[1]) zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
-346 &= 913 \,.\, 0 - 346, & -29 &= -20 \,.\, 2 + 11;\\
-913 &= -346 \,.\, 2 - 221, & 20 &= 11 \,.\, 2 - 2;\\
+346 &= -221 \,.\, (-2) - 96, & -11 &= -2 \,.\, 6 + 1;\\
+221 &= -96 \,.\, (-2) + 29;\\
96 &= 29 \,.\, 4 - 20.
\end{aligned}$$

Die Anzahl der Zeichenfolgen ist 1, die der Wechsel 5, folglich wird:

$$\left(\tfrac{173}{913}\right) = -1.$$

Das zweite von Gegenbauer angegebene Verfahren zur Bestimmung von $\left(\frac{a}{b}\right)$ besteht darin, dass er $\frac{a}{2b}$, worin $a$ und $2b$ relativ prim sind, in einen Kettenbruch entwickelt, dessen Theilzähler wiederum gleich $-1$, dessen Theilnenner ungerade sind; dann sind wiederum die Reste abwechselnd gerade und ungerade. Durch die vorigen ganz analogen Schlüsse zeigt so Gegenbauer, dass $\left(\frac{b}{a}\right) = +1$ wird, wenn die Anzahl der Zeichenfolgen, vermindert um die Anzahl der Zeichenwechsel (bei den Resten) *mod* 8 congruent 1 oder 7 ist, dass dagegen $\left(\frac{b}{a}\right) = -1$ wird, wenn jene Differenz congruent 3 oder 5 *mod* 8 ist.

## IV. Ein Algorithmus von Kronecker.[2])

Um $\left(\frac{-n_1}{n_0}\right)$ zu bestimmen, worin $|n_0| > |n_1|$ sein soll, bildet Kronecker den Algorithmus:

$$\left\{\begin{aligned}
n_0 &= 2r_1 \, n_1 - n_2,\\
n_1 &= 2r_2 \cdot n_2 - n_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
n_{\varkappa-2} &= 2r_{\varkappa-1} n_{\varkappa-1} - 1.
\end{aligned}\right.$$

Die $n$ seien sämmtlich ungerade und $|n_k| > |n_{k+1}|$. Ist $\varphi$ die Anzahl der Folgen, $\psi$ die Anzahl der Wechsel in der Reihe der Vorzeichen der Zahlen

$$1,\ n_0,\ n_1,\ \ldots\ \mp 1,$$

1) Dies Beispiel ist von Gegenbauer, dem aber ein Fehler untergelaufen ist. Anstatt 96 : 29 steht bei Gegenbauer 96 : 27 u. s. f.

2) Berl. Mon. Ber. 1884, S. 519.

aber $\varphi'$ die Anzahl der Folgen und $\psi'$ die Anzahl der Wechsel in der Reihe der Modulo 4 genommenen Zeichenwerthe derselben Zahlen, so ist $\left(\frac{-n_1}{n_0}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(\varphi-\varphi')} = (-1)^{\frac{1}{2}(\psi-\psi')}$.

Beispiel: $\left(\frac{-n_1}{n_0}\right) = \left(\frac{-105}{143}\right)$. Der Algorithmus ist:

$$\begin{array}{rl|rl} 143 = 2\,.\,105 & -67 & -9 = 2.\ (-2)7 & +5 \\ 105 = 2\,.\ \ 67 & -29 & 7 = 2.(-1(-5) & -3 \\ 67 = 2\,.\ \ 29 & +\ 9 & -5 = 2.\ (-1)3 & +1 \\ 29 = 2\,.(-2)(-9) & -\ 7 & & \end{array}$$

Dann ist unsere Reihe der Zahlen $n$:

$$1,\ 143,\ 105,\ 67,\ 29,\ -9,\ 7,\ -5,\ 3,\ -1.$$

Die Reihe ihrer Zahlenwerthe Modulo 4 ist:

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ -1,\ -1,\ -1,\ -1,$$

so dass $\varphi = \varphi' = 4$ und $\psi = \psi' = 5$ wird, woraus

$$\left(\frac{-105}{143}\right) = 1$$

folgt.

(Schluss folgt.)

# Bibliographie

vom 1. Juli bis 31. August 1885.

---

### Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physikal. Classe. 1885, I und II. Leipzig, Hirzel. 2 Mk.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Classe der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften. Jahrgang 1885, Heft 2. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, mathemat.-naturwissenschaftl. Classe, Abtheilung II. 91. Bd., 1. u. 2. Heft. Wien, Gerold. 5 Mk. 50 Pf.

Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften, mathem.-naturwissenschaftl. Classe. 49. Bd. Ebendas. 38 Mk.

Mathematische Annalen, herausgegeben von F. Klein u. A. Mayer. 26. Bd. (4 Hefte). 1. Heft. Leipzig, Teubner. compl. 20 Mk.

Mathematisch-naturwissenschaftliche Mittheilungen, herausgeg. v. O. Böklen. 2. Heft, 1885. Tübingen, Fues. 2 Mk.

Astronomische Nachrichten, herausgeg. von A. Krüger. 112. Bd. Nr. 1. Hamburg, Mauke Söhne. compl. 15 Mk.

Vierteljahrschrift der astronomischen Gesellschaft, herausgeg. von E. Schönfeld u. H. Seeliger. 19. Jahrg. (1884), 4. Heft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

——, 20. Jahrg. (1885), 1. u. 2. Heft. Ebendas. 4 Mk.

Stern-Ephemeriden für das Jahr 1887. Berlin, Dümmler. 6 Mk.

Nautisches Jahrbuch für das Jahr 1888, herausgegeben vom Reichsamt d. I. Berlin, Heymann. 1 Mk. 50 Pf.

Astronomisch-geodätische Arbeiten in den Jahren 1883 und 1884, herausgegeben vom königl. preuss. geodät. Institut. Berlin, Friedberg & Mode. 13 Mk. 50 Pf.

Beobachtungen der meteorolog. Stationen im Königreich Bayern, herausgeg. von W. v. Bezold u. C. Lang. 7. Jahrg. (1885), 1. Heft. München, Ackermann. compl. 18 Mk.

Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica. Ed. R. v. Hanstein. 34. Jahrg. 2. Heft, Juli—December 1884. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk. 80 Pf.

## Geschichte der Mathematik und Physik.

OPPERT, J., Die astronomischen Angaben der assyrischen Keilinschriften. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

HENRICI, J., Die Erforschung der Schwere durch Galilei, Huygens und Newton. Leipzig, Teubner. 60 Pf.

OFTERDINGER, L., Joh. Gottl. Friedr. v. Bohnenberger. Tübingen, Fues. 50 Pf.

RÜHLMANN, M., Vorträge über die Geschichte der Mechanik. Leipzig, Baumgärtner. 14 Mk.

ALBRECHT, G., Geschichte der Elektricität und ihrer Anwendungen. Wien, Hartleben. 3 Mk.

## Reine Mathematik.

HERZ, N., Siebenstellige Logarithmen der trigonometrischen Functionen für jede Zeitsecunde. Leipzig, Teubner. 4 Mk.

STOLZ, O., Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. 1. Thl.: Die reellen Zahlen. Ebendas. 8 Mk.

GEGENBAUER, L., Ueber den grössten gemeinschaftlichen Divisor. (Akad.) Wien, Gerold. 25 Pf.

——, Ueber die Divisoren der ganzen Zahlen. Ebendas. 45 Pf.

——, Asymptotische Gesetze der Zahlentheorie. Ebendas. 2 Mk. 40 Pf.

——, Arithmetische Notiz. Ebendas. 20 Pf.

——, Ueber die ganzen complexen Zahlen. Ebendas. 25 Pf.

SICKENBERGER, A., Die Determinanten in genetischer Behandlung. München, Ackermann. 1 Mk. 20 Pf.

MERTENS, F., Ueber eine Formel der Determinantentheorie. (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.

WEISS, E., Notiz über zwei der Binomialreihe verwandte Reihen. Ebendas. 20 Pf.

WINCKLER, A., Ueber die linearen Differentialgleichungen II. Ordn., zwischen deren partikulären Integralen eine Relation besteht. Ebendas. 50 Pf.

MERTENS, F., Zur Theorie der elliptischen Functionen. Ebendas. 20 Pf.

KLEIN, F., Ueber die elliptischen Normalcurven $n^{\text{ter}}$ Ordnung und zugehörige Modulfunctionen $n^{\text{ter}}$ Stufe. Leipzig, Hirzel. 1 Mk. 80 Pf.

WIENER, H., Rein geometrische Darstellung binärer Formen durch Punktgruppen auf Geraden. Darmstadt, Brill. 2 Mk. 50 Pf.

BOBEK, K., Ueber gewisse eindeutige involutorische Transformationen der Ebene. (Akad.) Wien, Gerold. 70 Pf.

MERTENS, F., Ueber die Gleichung des Strahlencomplexes, welcher aus allen, die Kanten des gemeinschaftlichen Poltetraeders zweier Flächen II. Ordnung schneidenden Geraden besteht. Ebendas. 20 Pf.

LE PAIGE, C., Ueber die Hesse'sche Fläche der Fläche III. Ordnung. Ebendas. 20 Pf.

EBERHARD, V., Ueber eine räumliche involutorische Verwandtschaft 7. Grades und ihre Kernfläche 4. Ordn. (Dissert.) Breslau, Köhler. 1 Mk.

GRAEFE, F., Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie der Ebene. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 40 Pf.

MEYER, F., Rein-geometrische Beweise einiger fundamentalen Kegelschnittsätze. Tübingen, Fues. 40 Pf.

PETERSEN, J., Lehrbuch der Stereometrie. Kopenhagen, Höst & S. 1 Mk. 60 Pf.

——, Die ebene Trigonometrie und die sphärischen Grundformeln. Ebendas. 1 Mk. 25 Pf.

Euclidis opera omnia. Ed. L. HEIBERG et H. MENGE. Vol. 4. Leipzig, Teubner. 4 Mk. 50 Pf.

## Angewandte Mathematik.

KOPALIK, J., Vorlesungen über die Chronologie des Mittelalters. Wien, Kirsch. 1 Mk.

KRAFT, F., Sammlung von Problemen der analytischen Mechanik. 11. Lief. (Schluss.) Stuttgart, Metzler. 2 Mk.

HERZ, N., Entwickelung der störenden Kräfte nach Vielfachen der mittleren Anomalie in independenter Form. (Akad.) Wien, Gerold. 80 Pf.

WITTRAM, TH., Zur Berechnung der speciellen Störungen der kleinen Planeten. (Dissert.) Dorpat, Karow. 1 Mk. 50 Pf.

HAMBURGER, M., Ueber die Zeitdauer des Stosses elastischer Stäbe. (Dissert.) Breslau, Köhler. 1 Mk.

LITTMANN, O., Ueber das Verhältniss von Längsdilatation und Quercontraction elastischer Metallcylinder. (Dissert.) Ebendas. 1 Mk.

BRINCKMANN, O., Ueber die Bewegung eines materiellen Punktes auf einem Rotationsparaboloid. (Dissert.) Jena, Neuenhahn. 2 Mk.

BENDER, E., Ueber stehende Schwingungen einer Flüssigkeit, die auf einer festen Kugel ausgebreitet ist. Kiel, Lipsius & Tischer. 1 Mk.

GUSINDE, O., Ueber den Ausfluss von Wasser aus kleinen kreisförmigen Oeffnungen. (Dissert.) Breslau, Köhler. 1 Mk.

MAYER, J., Sternkarte mit beweglichem Horizont. (Lithogr.) Hierzu Text: Astrognosie. Schaffhausen, Rothermel. 4 Mk.

KRÜGER, A., Zonenbeobachtungen der Sterne zwischen 55° und 56° nördlicher Declination, angestellt zu Helsingfors und Gotha. 2. Bd. Leipzig, Engelmann. 20 Mk.

PAULUS, CH., Tafeln zur Berechnung der Mondphasen. Tübingen, Fues. 1 Mk. 80 Pf.

MAHLER, E., Die centralen Sonnenfinsternisse des XX. Jahrhund. (Akad.) Wien, Gerold. 2 Mk.

——, Astronomische Untersuchung über die in der Bibel erwähnte ägyptische Finsterniss. Ebendas. 50 Pf.

Lippich, F., Ueber polaristrobometrische Methoden, insbesondere über Halbschattenapparate. Ebendas. 80 Pf.

Waltenhofen, A. v., Die internationalen absoluten Maasse, besonders für Elektricität. Braunschweig, Vieweg. 2 Mk.

## Physik und Meteorologie.

Wüllner, A., Lehrbuch der Experimentalphysik. 3. Bd.: Wärmelehre. 4. Aufl. Leipzig, Teubner. 12 Mk.

Wiedemann, G., Die Lehre von der Elektricität. 4. Bd. 2. Abth. (Schluss.) Braunschweig, Vieweg. 25 Mk. compl. 108 Mk.

Czermak, P. u. R. Hiecke, Pendelversuche. (Akad.) Wien, Gerold. 2 Mk. 40 Pf.

Exner, F., Ueber eine neue Methode zur Grössenbestimmung der Moleküle. Ebendas. 45 Pf.

Hepperger, J. v., Ueber die Verschiebung des Vereinigungspunktes der Strahlen beim Durchgange eines Strahlenbüschels durch ein Prisma. Ebendas. 50 Pf.

Aulinger, E., Ueber das Verhältniss der Weber'schen Theorie der Elektrodynamik zum Hertz'schen Princip der Einheit der elektrischen Kräfte. Ebendas. 30 Pf.

Klemenčič, J., Experimentaluntersuchung über die Dielektricitätsconstanten einiger Gase und Dämpfe. Ebendas. 1 Mk. 20 Pf.

Lang, V. v., Messung der elektromotorischen Kraft des elektrischen Lichtbogens. Ebendas. 20 Pf.

# Historisch-literarische Abtheilung.

## Ueber das quadratische Reciprocitätsgesetz.

**Eine vergleichende Darstellung der Beweise des Fundamentaltheoremes in der Theorie der quadratischen Reste und der denselben zu Grunde liegenden Principien.**

Von

OSWALD BAUMGART.

(Schluss.)

## Zweiter Theil.

### Vergleichende Darstellung der den Beweisen für das quadratische Reciprocitätsgesetz zu Grunde liegenden Principien.

### I. Capitel.

**Gauss' Beweis durch vollständige Induction.**

Wie schon im zweiten Capitel des ersten Theiles bemerkt wurde, unterscheidet Gauss bei seinem ersten Beweise acht verschiedene Fälle. Dadurch erhält der Beweis eine solche Ausdehnung, dass man ihn für nicht recht geeignet zur Begründung des so einfachen Gesetzes halten könnte. Indess ist dieser Mangel an Kürze nicht auf die dem Beweise zu Grunde liegenden Principien zurückzuführen, sondern auf die Bezeichnungsweise.

Gauss schreibt nämlich $p\dot{R}q$ an Stelle von $\left(\frac{p}{q}\right)=+1$ und $p\dot{N}q$ für $\left(\frac{p}{q}\right)=-1$. Dadurch wird er gezwungen, jene acht Fälle zu unterscheiden, was eben durch Anwendung des Legendre'schen Zeichens zu vermeiden gewesen wäre. In der That haben wir gesehen, dass sich durch jene Bezeichnung die acht von Gauss unterschiedenen Fälle auf zwei reduciren lassen. Dirichlet[1]) hat zuerst auf jenen Uebelstand des ersten

1) Crelle J., XLVII, S. 139.

Gauss'schen Beweises hingewiesen und den Beweis unter Anwendung des Legendre-Jacobi'schen Symboles dargestellt. Wir sind ihm gefolgt.

Nach dieser Bemerkung, die sich auf das rein Formale an unserem Beweise bezieht, gehen wir auf das Wesen desselben näher ein. Der allgemeine Eindruck ist da zunächst hohe Befriedigung darüber, dass der Beweis „nirgend das Gebiet der Congruenzen 2. Grades verlässt“[1]). Alle anderen Beweise, mögen sie sich auch durch besondere Kürze und Eleganz auszeichnen, lassen diese Einfachheit vermissen. Gauss[2]) selbst sagt von seinem ersten Beweise: *„Sed omnes hae demonstrationes, etiamsi respectu rigoris nihil desiderandum relinquere videantur, e principiis nimis heterogeneis derivatae sunt, **prima** forsan excepta quae tamen per ratiocinia magis laboriosa procedit, operationibus proxilioribus premitur.“*

Das Fundamentalprincip nun unseres Beweises kann man kurz das Princip der vollständigen Induction nennen. Der Umstand nämlich, dass das Gesetz gilt für die beiden kleinsten ungeraden Primzahlen 3 und 5, regte in Gauss den genialen Gedanken an, von den Zahlen 3 und 5 successive aufsteigend zu grösseren und grösseren Primzahlen, das Gesetz darzuthun.

Dieser Gedanke musste aber formulirt werden, um mathematische Deductionen aus ihm möglich zu machen. Dies ist von Gauss durch folgenden Schluss geschehen: Gilt das Gesetz für alle Primzahlen unterhalb $q$, und sind $p$ und $p'$ zwei solche Primzahlen kleiner als $q$, für die also $\left(\frac{p}{p'}\right)\left(\frac{p'}{p}\right)=(-1)^{\frac{p'-1}{2}\cdot\frac{p-1}{2}}$ ist, und kann man daraus die Richtigkeit des Fundamentaltheorems für $p$ und $q$ ($p'$ und $q$ sagt dasselbe) darthun, so ist das Gesetz in seiner Allgemeinheit bewiesen, eben der Eigenschaften der Zahlen 3 und 5 halber. Es stellte sich nun aber der Beweisführung ein grosses Hinderniss in den Weg, was Gauss zur Unterscheidung seiner acht Fälle nöthigte. Der Beweisgang hängt nämlich so intensiv von den Eigenschaften von $p$ und $q$ ab, dass eine Verschiedenheit dieser Eigenschaften verschiedene Methoden nöthig machte. Wie schon bemerkt, kommt man bei passender Bezeichnung nicht auf acht, aber doch auf zwei wesentlich verschiedene Fälle. Diese sind:

I. Sind $q$ und $\alpha < q$ beliebige ungerade Primzahlen, $q$ positiv, $\alpha$ positiv oder negativ, und ist $\left(\frac{\alpha}{q}\right)=+1$, so ist zu zeigen, dass $\left(\frac{q}{\alpha}\right)\left(\frac{\alpha}{q}\right)=(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}\frac{q-1}{2}}$.

II. Sind $q=4n+1$ und $p<q$ beliebige positive ungerade Primzahlen und ist $\left(\frac{p}{q}\right)=-1$, so ist zu zeigen, dass ebenfalls $\left(\frac{q}{p}\right)=-1$

1) Crelle J., XLVII, S 139.

2) Gauss: Comm. soc. Gott. XVI, S. 70 oder Gauss' Werke II, S. 4.

ist. Die Verificirung der in I. aufgestellten Behauptung war für Gauss verhältnissmässig leicht, weil die Annahme $\left(\frac{\alpha}{q}\right) = +1$ sofort eine weitere Handhabe zur Beweisführung lieferte, insofern als nämlich die Congruenz $x^2 \equiv \alpha \mod q$ möglich war. Die Einführung einer Hilfsgrösse $f$ und die Benutzung der auf einfache Weise darlegbaren Eigenschaften derselben führte sofort zum Ziele. Ist $e$ die gerade Wurzel unserer Congruenz $x^2 \equiv \alpha \mod q$, so ist jene Hilfsgrösse $f$ definirt durch:

A) $$e^2 = \alpha + fq.$$

Die Unterscheidung der beiden Fälle $f$ und $e$ relativ prim zu $\alpha$ und $f$ und $e$ theilbar durch $\alpha$ ergiebt auf einfache Weise unter Benutzung unserer allgemeinen Annahme die Richtigkeit des Theoremes.

Der zweite Punkt war nun viel schwieriger zu erledigen, und erst nach einem Jahre mühevollen Nachdenkens (am 29. April 1796) waren alle Hindernisse überwunden. „Gauss[1]) zeichnete sich selbst das Datum dieser Entdeckung auf, wie er ein Gleiches bei anderen seiner grossen Schöpfungen gethan hat.“ Die fragliche Schwierigkeit liegt darin, dass die Annahme

$$\left(\frac{p}{q}\right) = -1$$

sich mathematisch nicht formuliren lässt, da eben die Unmöglichkeit von

$$x^2 \equiv p \mod q$$

nicht durch eine Formel, die mit dieser Congruenz in unmittelbarem Zusammenhange steht, darstellbar ist. Diese Thatsache machte einen Hilfssatz nöthig, dessen Formulirung und Begründung Gauss' ganzen Scharfsinn herausforderte. Kronecker[2]) nennt die Begründung dieses Hilfssatzes „eine Kraftprobe Gauss'schen Geistes“. Jener Hilfsatz aber heisst: Es giebt stets eine positive ungerade Primzahl $p' < q$, von welcher $q$ quadratischer Nichtrest ist. Der Vollständigkeit halber bemerke ich schon hier, dass dieser Satz nicht nur für $q = 4n+1$, sondern auch dann gilt, wenn $q$ die Form $4n+3$ hat.[3])

Für $q = 8n+5$ ist der Satz unmittelbar evident; anders für $q = 8n+1$. Wäre aber in diesem Falle $q$ quadratischer Rest von allen Primzahlen kleiner als $2m+1$ $(< q)$, so müsste, wenn $k$ eine Wurzel von

$$k^2 \equiv q \mod M; \quad M = (2n+1)!$$

wäre:
$$k^2-1 \,.\, k^2-m^2 = q-1 \,.\, q-2^2 \,. \ldots q-m^2 \mod M$$

sein, d. h. $\frac{q \cdot q-1^2 \,.\, q-2^2 \,.\ldots.\, q-m^2}{(2m+1)!}$ müsste eine ganze Zahl sein. Die Unmöglichkeit hiervon ergiebt das Falsche der Annahme und zugleich, dass es stets eine Primzahl $p' < 2\sqrt{q}+1$ giebt, von welcher $q$ quadratischer Nichtrest ist.

1) C. F. Gauss. Festrede von E. Schering, Göttingen 1877, S. 4.
2) und 3) Kronecker, Mon.-Ber. der Berl. Akad. 1876.

Es ist also $\left(\frac{q}{p'}\right) = -1$.

Um nun nachzuweisen, dass auch $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$ ist, genügt es jetzt[1]) darzuthun, dass

$$\left(\frac{q}{pp'}\right) = +1$$

ist. Man sieht, der Hilfssatz war nur nöthig, das Kriterium $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$ in ein solches umzuformen, welches eine weitere mathematische Formulirung zuliess. Wir führen abermals eine Hilfsgrösse $f$ ein, die, wenn $e$ die gerade Wurzel $< q$ von

$$x^2 \equiv pp' \mod q$$

ist, definirt wird durch

B) $$e^2 = pp' + fq.$$

Im weiteren Verlaufe des Beweises kommt es nun auf das Verhalten von $e$ und $f$ gegen $p$ und $p'$ an. Je nachdem nämlich $e$ und $f$ relativ prim zu $p$ und $p'$, $p$ oder $p'$, oder theilbar durch $p$ und $p'$ sind, macht sich eine verschiedene Behandlungsweise nöthig.

Principiell Neues kommt dabei nicht heraus.

Der erste Beweis von Gauss stützt sich also im Wesentlichen auf Eigenschaften von Zahlen $f$ und $f'$ in:

A) $$e^2 = \alpha + fq \quad \text{und}$$

B) $$e^2 = pp' + fq.$$

Die beiden Gleichungen sind principiell nicht verschieden. Gleichung A) geht dadurch, dass man in B) $p' = 1$ setzt, aus B) hervor. Der Angelpunkt des Beweises liegt aber in der Aufstellung dieser Gleichungen, d. h. da eben A ein specieller Fall von B ist, in der Aufstellung der Gleichung B, mithin in dem Hilfssatze, dass es stets eine ungerade Primzahl

$$p' < q$$

giebt, von der $q$ quadratischer Nichtrest ist.

## II. Capitel.

### Ueber die Beweise durch Reduction.

Im III. Capitel des ersten Theiles sind zwölf Beweise reproducirt. Alle diese stützen sich auf ein und dasselbe Lemma, das wir in seiner Allgemeinheit kurz entwickeln wollen. Stellt

$$a_k = a_1, \; a_2, \; \ldots \; a_{\frac{q-1}{2}} \quad (a_k < q)$$

ein beliebiges halbes Restsystem Modulo $q$ dar, so wird

$$a_k p$$

wiederum ein halbes Restsystem Modulo $q$ geben. Die $pa_k$ stehen mit den $a_k$ in keiner Beziehung, können also mit denselben zusammenfallen oder

1) Unter Berücksichtigung des Umstandes, dass, wenn das Reciprocitätsgesetz für Primzahlen gilt, es auch für verallgemeinerte Restcharakteristiken gilt.

von denselben verschieden sein. Wir wollen uns das versinnlichen. Das vollständige Restsystem Modulo $q$ wird offenbar dargestellt durch die in den beiden Verticalreihen enthaltenen Zahlen:

| I. | II. |
|---|---|
| $a_1$ | $-a_1$ |
| $a_2$ | $-a_2$ |
| . | . |
| $a_{\frac{q-1}{2}}$ | $-a_{\frac{q-1}{2}}$ |

Die Reste $pa_k$ werden dann in beiden Verticalreihen vorkommen können, nie aber doppelt in derselben Horizontalreihe, weil nie zwei Reste $a_k p$ Modulo $q$ congruent sein können. Denn wäre z. B. $a_k p \equiv a_{k'} p \mod q$, so wäre $(a_k - a_{k'})p \equiv 0 \mod q$ oder, da $p$ und $q$ Primzahlen sein sollen, $a_k - a_{k'} \equiv 0 \mod q$, was, da $a_k$ und $a_{k'}$ Modulo $q$ incongruent sind, nicht möglich ist. Kommen nun $\mu$ Reste $pa_k$ in der zweiten Verticalreihe vor, so werden wir erhalten:

$$p^{\frac{q-1}{2}} a_1, \ldots a_{\frac{q-1}{2}} \equiv (-1)^\mu a_1, \ldots a_{\frac{q-1}{2}} \mod q$$

oder

$$p^{\frac{q-1}{2}} \equiv (-1)^\mu \mod q \quad \text{und} \quad \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^\mu.$$

Dies ist der Hilfssatz, auf den sich sämmtliche Beweise des III. Capitels stützen. Wir haben so das ursprüngliche Kriterium $\left(\frac{p}{q}\right) \equiv p^{\frac{q-1}{2}} \mod q$ reducirt auf $\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^\mu$. Nur aus diesem Grunde nenne ich die Beweise, denen dieses Lemma zu Grunde liegt, um unnöthige Weiterungen zu ersparen, Beweise durch Reduction. — Das Symbol $\left(\frac{p}{q}\right)$ ist also definirt durch $\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^\mu$, wo $\mu$ die Anzahl der Reste in $pa_1, pa_2, \ldots pa_{\frac{q-1}{2}}$ bedeutet, welche mit $a_1, \ldots a_{\frac{q-1}{2}}$ Modulo $q$ nicht congruent sind.

Man kann nun bei den Beweisen für das quadratische Reciprocitätsgesetz die verschiedensten halben Restsysteme in Anwendung bringen, was auch geschehen ist. Der Eine benutzt ein halbes positives oder negatives absolut kleinstes Restsystem, der Andere die geraden Zahlen, wieder ein Anderer die ungeraden Zahlen unterhalb der in Frage kommenden Primzahl. Dies ist der erste Punkt, in dem sich die Beweise durch Reduction unterscheiden.

Wie aber $\mu$ die charakteristische Zahl von $p$ in Bezug auf $q$ ist, so giebt es eine dem $\mu$ ganz analoge Zahl $\nu$, welche die charakteristische Zahl von $q$ in Bezug auf $p$ ist, so dass $\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^\nu$. Daraus folgt, dass, um das Reciprocitätsgesetz zu beweisen, man die Summe $\mu + \nu$ oder

die Differenz $\mu - \nu$ zu bestimmen hat. Dies kann in der Weise geschehen, dass man $\mu$ und $\nu$ getrennt, oder gleich ihre Summe resp. Differenz bestimmt. Hieraus ergiebt sich ein zweiter Punkt, in dem jene Beweise verschieden sein können und auch in der That verschieden sind.

Man kann ferner $\mu$ und $\nu$ zerlegen in $\mu = c + \mu'$, $\nu = c' + \nu'$, wo $c$ und $c'$ Constante sind — in den meisten Fällen Multipla von 2 — $\mu'$ und $\nu'$ dagegen Zahlen, „welche die Eigenschaft der Reciprocität in einer leichter erkennbaren Form enthalten.“ [1]) Diese Zerlegung von $\mu$ und $\nu$ ist auch vorgenommen worden.

Dies sind die drei wesentlichen Punkte, in denen sich unsere Beweise durch Reduction unterscheiden. Wir haben diese Bemerkungen zur allgemeinen Orientirung vorausgeschickt und gehen nun zur genaueren Betrachtung der Beweise über.

Wir beginnen mit Gauss' drittem Beweis. Gauss legt demselben ein halbes positives absolut kleinstes Restsystem zu Grunde, also Modulo der positiven ungeraden Primzahl $q$ die Zahlen $1, 2, \dots \frac{q-1}{2}$. Dann ist $\mu$ die Anzahl der negativen absolut kleinsten Reste in

$$p,\ 2p\ \dots\ \frac{q-1}{2}\,p \ mod\, q.$$

Gauss definirt nun $\left[\frac{x}{y}\right]$ als die grösste in $\frac{x}{y}$ enthaltene ganze Zahl und findet mit Hilfe von Sätzen über solche Grössen $\left[\frac{x}{y}\right]$

$$\mu \equiv \sum_k \left\{ \left[\frac{2kp}{q}\right] - 2\left[\frac{kp}{q}\right] \right\} \equiv \sum_k \left[\frac{kp}{q}\right] mod\ 2 \quad k = 1, \dots \frac{q-1}{2}.$$

Wird $p < q$ vorausgesetzt, was keine Beschränkung ist, da die Primzahlen $p$ und $q$ ja von einander verschieden sein müssen, so kommen in $\Sigma\left[\frac{pk}{q}\right]$ Glieder mehrfach vor. Die Bestimmung der Anzahl der Glieder, welche mehrfach vorkommen, führt zum Beweise unseres Satzes. Gauss transformirt so den Ausdruck $\mu = f(p, q)$ in $\mu = f(q, p) + c$, wo $c$ eine angebbare Constante und zwar $c = 2 \,.\, \text{ganz. Z.} + \frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}$ ist.

Aehnlich wie Gauss verfährt Voigt, ein früh verstorbener Versicherungsbeamter aus Schwaben. Er wendet ebenfalls ein halbes positives absolut kleinstes Restsystem an und schliesst so: Ist $\left[\frac{kp}{q}\right] = h - 1$, so wird $kp$ einen negativen absolut kleinsten Rest Modulo $q$ geben, wenn $(h - \frac{1}{2})\, q < kp < hq$. Umgekehrt werden zu solchen Zahlen $k$, deren Anzahl übrigens $\left[\frac{hp}{q}\right] - \left[\frac{h - \frac{1}{2}}{p}\, q\right]$ ist, und die die vorstehende Ungleichheit erfüllen, negative absolut kleinste Reste Modulo $q$ gehören. Daher wird:

1) Schering, Gött. Nachr. 1879, S. 21.

$$\mu \equiv \sum_h \left\{ \left[\frac{hq}{p}\right] - \left[\frac{(h-\frac{1}{2})q}{p}\right] \right\}, \quad h = 1, \cdots \frac{p-1}{2},$$

da $\frac{p-1}{2}$ das Maximum von $h$ wird. Durch Anwendung von Sätzen über Grössen $[x]$ findet sich

$$\mu \equiv \sum_h \left[\frac{q}{2} - r_h\right] \bmod 2 \quad \left(r_h = \frac{hq}{p} - \left[\frac{hq}{p}\right]\right),$$

aus welcher Congruenz leicht die Legendre'sche Formel fliesst.

Der Unterschied des Voigt'schen Beweises von dem Gauss'schen ist der, dass Gauss $\mu$ umformt in $\mu \equiv \sum_k \left[\frac{kp}{q}\right] \bmod 2 \; \left(k = 1, \cdots \frac{q-1}{2}\right)$ und nun die Anzahl der $\left[\frac{kp}{q}\right]$ bestimmt, welche denselben Werth $h$ haben; ihre Anzahl ist: $\left[\frac{h+1}{p}q\right] - \left[\frac{hq}{p}\right]$. Durch Summation über $h$ von 1 bis $\frac{p-1}{2}$ ergiebt sich dann $\mu = f(p, q) \equiv \frac{p-1}{2}, \frac{q-1}{2} - f(q, p) \bmod 2$, unsere bekannte Formel. Voigt dagegen bestimmt sofort die Anzahl der $kp$, welche Modulo $q$ negative absolut kleinste Reste lassen, und findet dieselbe bei vorgegebenem $h$ gleich $\left[\frac{hq}{p}\right] - \left[\frac{h-\frac{1}{2}}{p}q\right]$, wobei $h - 1 = \left[\frac{kp}{q}\right]$. Durch Summation über $h$ erhält er ebenfalls das gewünschte Resultat.

Der eben behandelte dritte Beweis von Gauss, obwohl kurz und elegant, scheint seinen Autor aber noch nicht völlig befriedigt zu haben; vielleicht deshalb, weil darin die eine Primzahl vor der anderen bevorzugt wird. Derselbe Gedanke, der später zur Einführung der Determinanten Anlass gab, veranlasste wahrscheinlich auch Gauss, nach einem neuen Beweise zu suchen, um also nicht $\mu$ und $\nu$ getrennt, sondern sofort deren Summe Modulo 2 zu bestimmen. Und Gauss fand seinen fünften Beweis, der von dem erwähnten Mangel des dritten Beweises frei ist.

Die dem fünften Beweis von Gauss zu Grunde liegenden kleinsten Restsysteme sind: $1, 2, \cdots \frac{p-1}{2}$ und $1, 2, \cdots \frac{q-1}{2}$. Zur Bestimmung von $\mu + \nu$ wurde eine Hilfsreihe eingeführt:

A) $\qquad 1, 2, \ldots pq-1,$

und die Voraussetzung $p < q$ gemacht. Die Glieder von A) haben nun in Bezug auf $p$ und $q$ als Moduln verschiedene Eigenschaften. Nimmt man nämlich ein beliebiges Glied aus A) heraus, so kann dies Modulo $p$ oder $q$, oder aber Modulo $p$ und $q$ einem positiven oder negativen absolut kleinsten Rest geben, oder ein Vielfaches von $p$ oder $q$, nie aber von $p$ und $q$ sein. Die Benutzung dieser Umstände führte nun zum Beweis des Fundamentaltheoremes.

Ist $(s)_{rR}$ die Anzahl der positiven absolut kleinsten Reste in $A\left(s=1, \ldots \frac{pq-1}{2}\right)$ Modulo $pq$, welche Modulo $p$ positiven absolut kleinsten Resten, Modulo $q$ aber negativen absolut kleinsten Resten congruent sind, so gelten die Formeln:

$$1) \qquad (S)_{rR} = (s)_{Rr}, \quad (s)_{rR} + (S)_{rR} = \frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2},$$

worin $S$ eine der Zahlen $\frac{pq+1}{2}, \ldots pq-1$ bedeutet und $(S)$ in derselben Weise wie $(s)$ zu verstehen ist.

Die $\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}$ Zahlen ferner:

$$tq + R_q \qquad \begin{pmatrix} t = 0, & \ldots \frac{p-3}{2} \\ R_q = \frac{q+1}{2}, & \ldots q-1 \end{pmatrix}$$

sind sämmtliche Zahlen $s$, welche Modulo $q$ negative absolut kleinste Reste geben, und enthalten sämmtliche Zahlen $pr_q$ $\left(r_q = 1, \ldots \frac{q-1}{2}\right)$. Theilt man sie Modulo $p$ in drei Classen, jenachdem sie nach ihm positiven oder negativen absolut kleinsten Resten oder der Null congruent sind, so erhält man die Formel:

$$2) \qquad (s)_{rR} + (s)_{RR} + \mu = \frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2},$$

wobei $\mu$ die Anzahl der $pr_q$ ist, welche Modulo $q$ negativen absolut kleinsten Resten congruent sind.

Mit Hilfe der $\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}$ Zahlen endlich:

$$\tau p + R_p \qquad \begin{pmatrix} \tau = 0, & \ldots \frac{q-3}{2} \\ R_p = \frac{p+1}{2}, & \ldots p-1 \end{pmatrix}$$

leitet man auf ganz analoge Weise, wie eben durchgeführt, die Formel ab:

$$3) \qquad (s)_{Rr} + (s)_{RR} + \nu = \frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2},$$

worin $\nu$ die Anzahl der $qr_p$ ist, welche Modulo $p$ negativen absolut kleinsten Resten congruent sind.

Aus den Formeln 1), 2), 3) folgt unsere Formel:

$$2\,(s)_{RR} + \mu + \nu = \frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}.$$

Die Zahlen $\mu$ und $\nu$ werden in diesem Beweise in drei Summanden zerfällt, auf welche merkwürdige Zerlegung besonders hingewiesen sei; wir werden bei Bouniakowsky eine ähnliche finden.

Der fünfte Gauss'sche Beweis beruht also im Wesentlichen auf der Eintheilung und Abzählung der in der Reihe $1, 2, \ldots pq-1$ enthaltenen Zahlen:

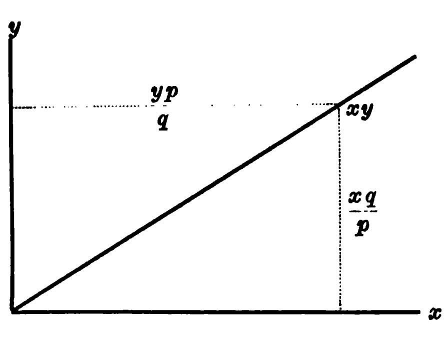
$$tq+R_q \text{ und } \tau p+R_p \quad \begin{pmatrix} t=0, \ldots \frac{p-3}{2}; & \tau=0, \ldots \frac{q-3}{2} \\ R_q=\frac{q+1}{2}, \ldots q-1; & R_p=\frac{p+1}{2}, \ldots p-1 \end{pmatrix}$$

und auf der Richtigkeit der Formel $(s)_{Rr}+(S)_{rR}=\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}$; er ist insofern sehr einfach und elementar, als ausser der Hilfsreihe $1, 2, \ldots pq-1$ keine anderen Hilfsbetrachtungen nöthig sind. Ausserdem gehen, wie schon hervorgehoben, $p$ und $q$ zum Unterschiede vom dritten Gauss'schen Beweise vollständig gleichwerthig in die Rechnung ein.

Der dritte Beweis wurde 1808, der fünfte 1818 gefunden. 30 Jahre später (1847) veröffentlichte Eisenstein im Crelle'schen Journal seinen geometrischen Beweis des Fundamentaltheoremes, der im Grunde genommen der in die Sprache der Geometrie übersetzte dritte und fünfte Gauss'sche Beweis ist. Nach dem Gauss'schen $\mu$-Lemma ist:

$$\left\{\begin{aligned} \left(\frac{p}{q}\right) &= (-1)^\mu = (-1)^{\Sigma\left[\frac{kp}{q}\right]} \\ \left(\frac{q}{p}\right) &= (-1)^\nu = (-1)^{\Sigma\left[\frac{hq}{p}\right]} \end{aligned}\right. \quad \begin{pmatrix} k=1, \ldots \frac{q-1}{2} \\ h=1, \ldots \frac{p-1}{2} \end{pmatrix},$$

woraus $\mu+\nu \equiv \sum\left\{\left[\frac{kp}{q}\right]+\left[\frac{hq}{p}\right]\right\} \bmod 2$ resultirt. Eisenstein construirt nun in einem rechtwinkligen Axensystem eine Gerade $yp=xq$. Dann ist $\frac{xq}{p}$ resp. $\frac{yp}{q}$ die $y$- resp. $x$-Coordinate des Punktes $xy$ unserer Geraden. Wird nun $x=h$ resp. $y=k$, so werden $\left[\frac{hq}{p}\right]$ resp. $\left[\frac{kp}{q}\right]$ die Anzahl der um die Einheit von einander entfernten Punkte (Gitterpunkte) auf den Coordinaten $\frac{hq}{p}$ resp. $\frac{kp}{q}$ sein. Wie die Anschauung aber sofort lehrt, ist:




$$\sum\left\{\left[\frac{kp}{q}\right]+\left[\frac{hq}{p}\right]\right\}=\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}.$$

Den Gauss'schen Ausdrücken $\left[\frac{kp}{q}\right]$ und $\left[\frac{hq}{p}\right]$ entsprechen also bei Eisenstein Punktreihen, den Summen $\sum\left[\frac{kp}{q}\right]$ und $\sum\left[\frac{hq}{p}\right]$ mehrere Punktreihen. Der Abzählung von Zahlen mit bestimmten Eigenschaften im fünften Gauss'schen Beweise entspricht hier die Abzählung von Punkten mit Hilfe der Anschauung. Den abstrakten Zahlbegriff bei Gauss hat

Eisenstein durch Einführung des Längsmaasses versinnlicht. Die arithmetische Transformation endlich im dritten Gauss'schen Beweise von $\mu = f(p, q)$ in $\mu = f(q, p) + c$ wird hier unmittelbar durch die Anschauung geleistet.

1852 wurde nun von Genocchi ein neues Moment geltend gemacht, das in fruchtbringender Weise von Schering und Kronecker ausgebeutet wurde. Um die Continuität unserer Darlegungen nicht zu stören, werden wir darauf später zurückkommen.

Wir wenden uns zunächst zu dem Gesichtspunkt, der zum ersten Male 1870 in dem Beweise von Stern zu Tage tritt, und der auch von Zeller und Petersen benutzt worden ist. Durch jenes Stern'sche Kriterium wird, wie eben die Arbeiten von Zeller und Petersen zeigen, der fünfte Gauss'sche Beweis wenn auch nicht vereinfacht, so doch abgekürzt. An Stelle der Abzählung von Zahlen mit bestimmten Eigenschaften Modulo $p$ oder $q$ treten neue Betrachtungen.

Das Kriterium Stern's ist folgendes: Setzt man in den Reihen

$$\text{I)} \qquad 1q,\ 2.q,\ \ldots\ hq,\ \ldots\ \frac{p-1}{2}q \mod p$$

und

$$\text{II)} \qquad 1p,\ 2.p,\ \ldots\ kp,\ \ldots\ \frac{q-1}{2}p \mod q,$$

z. B. $p < q$ und dieselben halben Restsysteme voraus, so kommt kein Rest $hq \mod p$ in $kp \mod q$ vor; und umgekehrt, ist der in $hq \mod p$ enthaltene grösste Rest $p'$, so kommt kein Rest $kp \mod q \leq p'$ in $hq \mod p$ vor. Wohl aber kommt $-hq \mod p$ in $kp \mod q$ und $-kp \leq p'$ in $hq$ vor.

Wie schon S. 187 bemerkt, bieten die weiteren Ausführungen Stern's principiell nichts Neues und können daher um so eher übergangen werden, als sie auch nicht ganz correct sind.

Zeller stützt sich auf die Restsysteme:

$$1)\ q,\ \ldots\ \frac{p-1}{2}q; \quad 2)\ p,\ \ldots\ \frac{q-1}{2}p.$$

Setzt man $p < q$ voraus und lässt man nur absolut kleinste Reste zu, so ist nach Stern $\mu + \nu = \frac{p-1}{2} + \tau$, wo $\tau$ die Anzahl der Reste in 2 bedeutet, die zwischen $-\frac{p}{2}$ und $-\frac{q}{2}$ liegen. Die Bestimmung dieser Zahl $\tau$ bildet den Kernpunkt des Zeller'schen Beweises. Aus der Substitution

$$k' = \frac{q-1}{2} - k, \quad r' = \frac{p+q}{2} - r,$$

wobei $kp \equiv -r \mod q$ ist, ist nun klar, dass die Glieder $kp$, welche zwischen $-\frac{p}{2}$ und $-\frac{q}{2}$ liegen, paarweise vorkommen, insofern einem $r$ ein $-r$ entspricht, bis auf die Glieder, welche den Grenzfällen der

Substitution entsprechen. Ist da, um diese Ausnahmefälle zu erledigen, zunächst $k=0$, so wird $k'p \equiv \frac{q-p}{2} \mod q$, also $\tau \equiv 0 \mod 2$.

Für $k=k'=\frac{q-1}{4}$ folgt sofort, dass $\tau \equiv 0 \mod 2$ wird für $q \equiv 3 \mod 4$, während für $q=4n+1$ sich ergiebt $kp \equiv \frac{1}{4}(-p \pm q) \mod q$, woraus sich verschiedene Resultate ergeben, je nachdem $q$ von der Form $4n \pm 1$ ist.

Ganz analog diesem Beweise ist der von Petersen. Als halbes Restsystem Modulo $q$ fungiren die ungeraden Zahlen: $1, 3, 5, \ldots q-2$, so dass $\mu$ die Anzahl der negativen ungeraden Reste Modulo $q$ in $p$, $3p$, $5p$, $\ldots (q-2)p$ ist. Setzt man wiederum $p<q$ voraus, so wird

$$\mu+\nu=\frac{p-1}{2}+\tau,$$

wo $\tau$ die Anzahl der zwischen $-p$ und $-q$ liegenden ungeraden Reste Modulo $q$ aus $p$, $3p$, $\ldots (q-2)p$ ist.

Bedeuten nun $r$ die ungeraden Reste Modulo $q$, so wird

$$(2n+1)p-2mq=r, \quad 2n+1=1,\ 3, \ldots q-2;$$

$m$ ist so gewählt, dass $q>r>-q$.

Durch die Substitution $m=n-k$, $p=q-2\alpha$ ergiebt sich nun, dass $\tau$ die Anzahl der Brüche $\frac{q}{\alpha}, \frac{2q}{\alpha}, \ldots \frac{\alpha-1}{\alpha}q$ ist, in denen die darin enthaltene grösste ganze Zahl ungerade ist. Es treten nun wieder Zeller'sche Betrachtungen auf, nach denen es auf die Beschaffenheit der Mittelglieder ankommt.

Wir kommen nun zu dem Beweise von Bouniakowsky. Dieser Autor bestimmt ebenfalls die Summe $\mu+\nu$, zerlegt aber $\mu$ und $\nu$ auf eine ganz eigenthümliche Weise. Zunächst bemerkt er, dass zwei Primzahlen in derselben Linearform enthalten sein müssen, dass also, wenn

$$p=2an+r, \quad q=2an'+r \text{ ist } (a \equiv r \equiv 1 \mod 2,\ 1<r<2a-1).$$

Weiter findet Bouniakowsky die wichtige Formel:

$$\left(\frac{a}{p}\right)=(-1)^{\frac{a-1}{2}n+m},$$

worin $m$ eine von $a$ und $r$, nicht aber von $n$ abhängige Zahl ist, so dass ohne Weiteres

$\left(\frac{a}{q}\right)=(-1)^{\frac{a-1}{2}n'+m}$ folgt, woraus $\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{a}{q}\right)=(-1)^{\frac{a-1}{2}(n+n')}$ resultirt.

Die schöne Formel $\left(\frac{a}{2an+r}\right)=(-1)^{\frac{a-1}{2}n+m}$ ergiebt sich daraus, dass Bouniakowsky die $\frac{p-1}{2}=\frac{r-1}{2}+an$ Reste

$$\begin{array}{llllll} 1, 2, 3, \cdots \frac{p-1}{2} = & 1, & 1+a, & \ldots & 1+(n-1)a, & 1+na, \\ & 2, & 2+a, & \ldots & 2+(n-1)a, & 2+na, \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & \frac{r-1}{2}, & \frac{r-1}{2}+a, & \cdots & \frac{r-1}{2}+(n-1)a, & \frac{r-1}{2}+na, \\ & \frac{r+1}{2}, & \frac{r+1}{2}+a, & \cdots & \frac{r+1}{2}+(n-1)a, & \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & a, & 2a, & \ldots & na & \end{array}$$

ähnlich, wie **Gauss** in seinem fünften Beweise es mit den Zahlen $1, 2, \ldots \frac{pq-1}{2}$ macht, in drei Classen trennt. In die erste nimmt er die Zahlen der letzten Horizontalreihe, in die zweite die Zahlen derjenigen Horizontalreihen, welche mit

$$r_\lambda \equiv r\lambda \bmod p \quad \left(\lambda = 1, 2, \cdots \frac{a-1}{2}\right)$$

beginnen; endlich in die dritte die Zahlen der Horizontalreihen, welche mit $a - r_\lambda$ anfangen. Die Zahlen der ersten und dritten Classe sind dann Modulo $p$ positiven Vielfachen $\left(< \frac{p-1}{2}\right)$ von $a$ congruent, die der zweiten Classe negativen Vielfachen $\left(< \frac{p-1}{2}\right)$ derselben Grösse $a$. Ist die Anzahl der Zahlen der zweiten Classe gleich $M$, so ist nun

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^M.$$

Schliesslich findet sich, dass, wenn $m$ eine Zahl bedeutet, die nur von $a$ und $r$ abhängt, $M = \frac{a-1}{2} n + m$ wird.

Setzt man nun

$$p = q + 2^\nu . a,$$

so dass $p$ und $q$ Primzahlen und $a$ ungerade ist, so erhält man:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{2^\nu}{q}\right)(-1)^{\frac{a-1}{2}n+m} \text{ und } \left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{-2^\nu}{p}\right)(-1)^{\frac{a-1}{2}n'+m},$$

woraus zunächst, wenn man berücksichtigt, dass $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\left[\frac{p+1}{4}\right]}$[1]) ist:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\nu\left[\frac{q+1}{4}\right] + \frac{a-1}{2}n+m} \text{ und } \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}+\nu\left[\frac{p+1}{4}\right]+\frac{a-1}{2}n'+m}$$

resultiren. Hiernach aber wird:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}+\nu\left\{\left[\frac{p+1}{4}\right]+\left[\frac{q+1}{4}\right]\right\}+\frac{a-1}{2}(n+n')}.$$

---

1) **Bouniakowsky**, Ann. de St. Pétersbourg, Bd. XIV.

Aus diesen Formeln geht zunächst die merkwürdige Zerlegung von $\mu$ und $\iota$ hervor. Was die Legendre'sche Formel betrifft, so erhält man dieselbe leicht aus der letzten Gleichung durch Unterscheidung der beiden Fälle

$$p \equiv q \mod 4 \quad \text{und} \quad p-2 \equiv q \mod 4.$$

Eine gewisse Aehnlichkeit mit dem Beweis von Bouniakowsky hat der Beweis von Busche insofern, als der Angelpunkt dieses letzteren Beweises der Nachweis ist, dass $\left(\frac{q}{2\lambda q+p}\right) = (-1)^{\lambda\frac{q-1}{2}}\left(\frac{q}{p}\right)$. Diese Formel ergiebt sich aber unmittelbar aus der allgemeineren von Bouniakowsky: $\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{a}{q}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{2}(n+n')}$, wenn man darin $q = r$, also $n' = 0$ setzt.

Während sich aber, wie wir gesehen haben, Bouniakowsky bei Ableitung seiner Formel der Abzählungsmethode des fünften Gauss'schen Beweises bedient, schliesst sich Busche den Ausführungen des dritten Gauss'schen Beweises an.

Busche setzt, ähnlich wie vor ihm Voigt, wenn $\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\mu}$:

$$\mu = \Sigma \mu_h \quad \left(h = 1, \cdots \frac{q-3}{2}\right),$$

wo $\mu_h$ die Anzahl der ganzzahligen Auflösungen $k$ von

$$kq = hp + r, \quad \frac{p+1}{2} > r > p$$

bei vorgegebenem $h$ bedeutet, und, wenn $\left(\frac{q}{p+2\lambda q}\right) = (-1)^{M}$:

$$M = \Sigma M_h \quad \left(h = 1, \cdots \frac{q-3}{2}\right),$$

wo $M_h$ analog wie $\mu_h$ die Anzahl der ganzzahligen Auflösungen $K$ von

$$Kq = h(p+2\lambda q) + r', \quad \left(\frac{p-1}{2} + \lambda q < r' < p + 2\lambda q\right)$$

darstellt.

Setzt man $q > p$ und $\lambda$ positiv voraus, so ergiebt sich

$$M_h = \lambda + \mu_h, \quad \text{folglich} \quad M = \lambda\frac{q-1}{2} + \mu.$$

Nimmt man nun an, das Reciprocitätsgesetz gelte für $p$ und $q$, d. h. es sei

$$\text{A)} \qquad \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}},$$

so ergiebt sich

$$\text{B)} \qquad \left(\frac{q}{2\lambda q+p}\right)\left(\frac{2\lambda q+p}{q}\right) = (-1)^{\frac{q-1}{2}\cdot\frac{p+2\lambda q-1}{2}}.$$

Ausserdem ist

$$\text{C)} \qquad \left(\frac{\varepsilon}{q}\right)\left(\frac{q}{\varepsilon}\right) = (-1)^{\frac{\varepsilon-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

Nun greift ein von Busche gefundener Hilfssatz Platz. Aus dem Euklidschen Algorithmus zur Bestimmung des grössten gemeinschaftlichen Theilers zweier Zahlen ergiebt sich nämlich, dass, wenn sich aus der Richtigkeit der Relation $(x, y)$ zwischen zwei ungeraden theilerfremden ganzen Zahlen $x, y$ die Richtigkeit von

$$\text{I)}\ (\pm 1, y), \quad \text{II)}\ (x, \pm 1), \quad \text{III)}\ (x+2\lambda y, y), \quad \text{IV)}\ (x, y+2\lambda' x),$$

$\lambda$, $\lambda'$ als ganze Zahlen vorausgesetzt, nachweisen lässt, $(x, y)$ allgemeine Giltigkeit hat für zwei beliebige ungerade theilerfremde Zahlen.

Die Annahme der Formel A) hat aber zur Formel B) geführt — C) besteht *eo ipso* —; jene vier Bedingungen sind also erfüllt: das quadratische Reciprocitätsgesetz gilt allgemein.

Es erübrigt noch, die Beweise von Genocchi, Schering und Kronecker zu betrachten. Es ist diesen Beweisen — obgleich sie den mitgetheilten analog sind, insofern in ihnen ebenfalls die Summe $\mu+\nu$ bestimmt wird — eine besondere Stellung deshalb einzuräumen, weil sie — der eine mehr, der andere weniger — eine gewisse functionentheoretische Bedeutung haben.

Wie bereits erwähnt, hat Genocchi seinen Beweis 1852 veröffentlicht. Er betrachtet darin Ausdrücke von der Form:

$$u = hq - kp, \quad v = hq + kp - \frac{pq-1}{2} \quad \left(q > p, \ h < \frac{p}{2}, \ k < \frac{q}{2}\right)$$

und untersucht, unter welchen Bedingungen $u$ und $v$ positiv resp. negativ sind. Durch Vergleichung dieser Bedingungen findet er, dass

$$\text{Anz.}_k \text{ pos. } v - \text{Anz.}_k \text{ pos. } u = 0 \text{ oder } 1 \text{ ist } \left(k = 1, \dots \frac{q-1}{2}\right),$$

je nachdem $hq$ einen positiven oder negativen absolut kleinsten Rest Modulo $p$ giebt. Darnach ist:

$$\mu \equiv \text{Anz.}_{h,k} \text{ pos. } v - \text{Anz.}_{h,k} \text{ pos. } u \ mod\, 2$$

und analog

$$\nu \equiv \text{Anz.}_{h,k} \text{ pos. } v - \text{Anz.}_{h,k} \text{ pos. } u' \ mod\, 2,$$

wenn $u' = pk - qh$ und $\begin{pmatrix} h = 1, \dots \frac{p-1}{2} \\ k = 1, \dots \frac{q-1}{2} \end{pmatrix}$. Somit ergiebt sich:

$$\mu + \nu \equiv \text{Anz.}_{h,k} \text{ pos. } u + \text{Anz.}_{h,k} \text{ pos. } u' \ mod\, 2,$$

unsere bekannte Formel sofort liefernd.

Schering führt an Stelle der Ausdrücke $u$, $v$ die folgenden ein:

$$U = \frac{u}{pq} = \frac{h}{p} - \frac{k}{q}, \quad V = \frac{v}{pq} - \frac{1}{2pq} = \frac{h}{p} + \frac{k}{q} - \frac{1}{2}.$$

Dadurch werden seine Ausführungen einfacher als die Genocchi's, lassen auch eine rationellere functionentheoretische Behandlung zu. Es wird dann

$$\text{Anz.}_k \text{ pos. } \left(\frac{h}{p} + \frac{k}{q} - \frac{1}{2}\right) - \text{Anz.}_k \text{ pos. } \left(\frac{h}{p} - \frac{k}{q}\right) = 0, 1,$$

je nachdem $hq$ einen positiven oder negativen absolut kleinsten Rest Modulo $p$ giebt. Die weiteren Schlüsse sind wie bei Genocchi.

Während Genocchi und Schering das Gauss'sche $\mu$-Lemma voraussetzen, schlägt Kronecker einen andern Weg ein: er setzt an Stelle des Gauss'schen Lemmas den Hilfssatz des ersten Gauss'schen Beweises. Kronecker's Beweis nimmt also eine Mittelstellung ein zwischen dem ersten Gauss'schen Beweise und den in diesem Capitel entwickelten: Er ist von grosser Bedeutung, eben weil er so verschiedenartige Betrachtungen verbindet.

Kronecker definirt:

$\left(\frac{p}{q}\right)$ als das Vorzeichen (Vorz. oder Sgn.) von:

$$\prod\left(\frac{h}{p}-\frac{k}{q}\right) \quad \begin{pmatrix} h=1, \ldots \frac{p-1}{2} \\ k=1, \ldots \frac{q-1}{2} \end{pmatrix}.$$

Aus dieser Definition für $\left(\frac{p}{q}\right)$ folgt aber ohne Weiteres das Reciprocitätsgesetz. Aus $\prod\left(\frac{h}{p}-\frac{k}{q}\right)=\frac{1}{p}.\prod\left(h-\frac{kp}{q}\right)$ ergiebt sich

$$\left(\frac{p}{q}\right)=(-1)^{\Sigma\left[\frac{kp}{q}\right]}.$$

Diese Formel führt zu den weiteren:

A) $$\left(\frac{p'}{q}\right)=\left(\frac{p}{q}\right), \quad p \equiv p' \bmod q;$$

B) $$\left(\frac{p'}{q}\right)=(-1)^{\frac{q-1}{2}}\left(\frac{p}{q}\right), \quad p' \equiv -p \bmod q;$$

C) $$\left(\frac{pp'}{q}\right)=\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p'}{q}\right), \quad \left(\frac{q}{pp'}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{q}{p'}\right).$$

Diese Formeln A), B), C) zeigen aber, dass die Symbole $\left(\frac{p}{q}\right)$ und $\left(\frac{q}{p}\right)$ denselben Gesetzen gehorchen wie die Legendre-Jacobi'schen Symbole. Um die Identität mit denselben nachzuweisen, ist daher nur zu zeigen, dass $\left(\frac{p}{q}\right)=+1$ wird, wenn $p$ quadratischer Rest von $q$ ist, und dass $\left(\frac{p}{q}\right)=-1$ wird, wenn $p$ quadratischer Nichtrest von $q$ ist.

Der erste Fall erledigt sich sofort. Was den zweiten Fall betrifft, so ist nach A) und C) zu zeigen, dass es wenigstens eine Zahl $p$ giebt, für die $\left(\frac{q}{p}\right)=-1$ ist. Und eine solche Zahl $p$ giebt es in der That, wie bereits Gauss zum Theil in seinem ersten Beweise gezeigt hat; Kronecker hat die Ausführungen Gauss' vervollständigt.

Es sind nun zum Schluss dieses Capitels noch zwei Abhandlungen Kronecker's[1]) zu erwähnen, in denen an hierher Gehörigem hauptsächlich Zweierlei geleistet wird: die Umformung der Schering'schen Potenz in ein Product und der directe Nachweis, dass

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \text{Vorz.} \prod \left(\frac{h}{p} - \frac{k}{q}\right) \quad \begin{pmatrix} h = 1, \dots \frac{p-1}{2} \\ k = 1, \dots \frac{q-1}{2} \end{pmatrix}.$$

Aus der Bemerkung, dass $(a-x)(a-x+\frac{1}{2})$ negativ wird, wenn $x$ zwischen $a$ und $a+\frac{1}{2}$, oder $a$ zwischen $x-\frac{1}{2}$ und $x$ liegt, ergiebt sich, wenn man mit $R(a)$ den Rest bezeichnet, welcher verbleibt, wenn man von $a$ die nächstgrösste an $a$ gelegene ganze Zahl abzieht:

$$\text{Vorz.}\, R(a) = \text{Vorz.}\, (a-k)(a-k+\tfrac{1}{2}),$$

wenn $k = [a+\frac{1}{2}]$ ist. Da nun $(a-k)(a-k+\frac{1}{2})$ positiv bleibt für $k \gtrless [a+\frac{1}{2}]$, nur $k = [a+\frac{1}{2}]$ ist ausgeschlossen, so erhält man:

$$\text{Vorz.}\, R(a) = \text{Vorz.} \prod_{k=1}^{r} (a-k)(a-k+\tfrac{1}{2}), \quad r \geqq [a+\tfrac{1}{2}],$$

woraus

$$\text{Vorz.}\, R(qa) = \text{Vorz.} \prod (qa-k)(qa-k+\tfrac{1}{2})$$

oder, $q$ positiv vorausgesetzt,

$$\text{Vorz.}\, R(qa) = \text{Vorz.} \prod \left(a-\frac{k}{q}\right)\left(a-\frac{k}{q}+\frac{1}{2q}\right), \quad k = 1, \dots r \geqq \frac{q-1}{2}.$$

Durch die Substitution $k = \frac{q-1}{2} - k'$, welche erlaubt ist, da durch dieselbe nur die Anordnung der Factoren auf den rechten Seiten der vorstehenden Gleichungen eine andere wird, resultirt:

$$\text{Vorz.}\, (qa) = \text{Vorz.} \prod \left(a-\frac{k}{q}\right)\left(a+\frac{k}{q}-\frac{1}{2}\right) \quad \left(k = 1, \dots \frac{q-1}{2}\right).$$

Ueber den Werth von $a$ ist nichts vorausgesetzt worden; wir setzen $a < \frac{1}{2}$. — Sind nun ferner $p$ und $h < \frac{p}{2}$ positive Grössen, so wird:

$$\text{Vorz.} \left(\frac{qh}{p}\right) = \text{Vorz.} \prod \left(\frac{h}{p}-\frac{k}{q}\right)\left(\frac{h}{p}+\frac{k}{q}-\frac{1}{2}\right) \quad \left(k = 1, \dots \frac{q-1}{2}\right).$$

Durchläuft ferner $h$ ein halbes positives absolut kleinstes Restsystem Modulo $p$, so ergiebt sich:

$$\text{K)} \quad \left(\frac{q}{p}\right) = \text{Vorz.} \prod \left(\frac{h}{p}-\frac{k}{q}\right)\left(\frac{h}{p}+\frac{k}{q}-\frac{1}{2}\right) \quad \begin{pmatrix} h = 1, \dots \frac{p-1}{2} \\ k = 1, \dots \frac{q-1}{2} \end{pmatrix}.$$

Schering hatte nun für $\nu$ in $\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\nu}$ gefunden:

---

1) Berliner Mon.-Ber. 1884, S. 519—537 und 645—647, oder Crelle Journ. XCVI S. 348 und XCVII S. 93.

$$\text{S)}\quad \nu \equiv \sum \left\{ \text{Anz. pos.} \left( \frac{h}{p} + \frac{k}{q} - \frac{1}{2} \right) - \text{Anz. pos.} \left( \frac{h}{p} - \frac{k}{q} \right) \right\} \; mod\, 2 \quad \begin{pmatrix} h = 1, \ldots \frac{p-1}{2} \\ k = 1, \ldots \frac{q-1}{2} \end{pmatrix}.$$

Durch Vergleichung der Formeln S) und K) fällt die Verwandtschaft derselben sofort ins Auge.

Wie wir ferner gesehen haben, beruhte der Beweis von Kronecker darauf, dass er mit Hilfe Gauss'scher Betrachtungen nachwies, dass der Ausdruck:

$$\left( \frac{p}{q} \right) = \text{Vorz.} \prod \left( \frac{h}{p} - \frac{k}{q} \right) \quad \begin{pmatrix} h = 1, \ldots \frac{p-1}{2} \\ k = 1, \ldots \frac{q-1}{2} \end{pmatrix}$$

mit dem Legendre'schen Symbol identisch sei. Im Juni-Heft des Berliner Berichts von 1884 giebt nun Kronecker die directe Ableitung jener Formel. Nach Gauss (3. Beweis, II. Bd. S. 6) ist:

$$\text{Vorz.}\, R(p\alpha_0) = (-1)^{p\alpha} \quad \begin{pmatrix} 0 < \alpha_0 < \frac{1}{2}, \quad \alpha < \frac{1}{2}, \\ \text{so dass } \alpha = 2\alpha_0 \text{ oder } 1 - 2\alpha_0 \end{pmatrix}.$$

Offenbar ist ferner:

$$(-1)^{p\alpha} = \text{Vorz.} \prod \left( \frac{h}{p} - \alpha \right) \quad \left( h = 1, \ldots \frac{p-1}{2} \right),$$

so dass für

$$\alpha_0 = \frac{k_0}{q} \quad \left( k_0 = 1, \ldots \frac{q-1}{2} \right):$$

$$\text{Vorz.}\, R\left( \frac{p k_0}{q} \right) = \text{Vorz.} \prod \left( \frac{h}{p} - \frac{k}{q} \right) \quad \begin{pmatrix} h = 1, \ldots \frac{p-1}{2} \\ k = 2k_0 \text{ oder } = 1 - 2k_0, \ \frac{k}{q} < \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ist, woraus:

$$p k_0 \equiv k'_0 \,\text{Vorz.} \prod \left( \frac{h}{p} - \frac{k}{q} \right) \; mod\, q \quad \left( k_0, k'_0 = 1, 2, \cdots \frac{q-1}{2} \right).$$

Hieraus aber folgt ohne Weiteres:

$$\left( \frac{p}{q} \right) = \text{Vorz.} \prod \left( \frac{h}{p} - \frac{k}{q} \right) \quad \begin{pmatrix} h = 1, \ldots \frac{p-1}{2} \\ h = 1, \ldots \frac{q-1}{2} \end{pmatrix}.$$

Die Gauss'schen Betrachtungen über $R(a)$ haben also Kronecker zu einer sehr eleganten und brauchbaren Formel für $\left( \frac{p}{q} \right)$ und zu einem neuen Beweise des Reciprocitätsgesetzes geführt.

Schliesslich will ich der Vollständigkeit halber noch bemerken, dass Genocchi seine Formel:

$$\mu \equiv \Sigma(\text{Anz. pos. } v - \text{Anz. pos. } u) \; mod\, q$$

auch aus dem von Eisenstein her uns bekannten Ausdrucke ableitet:

$$\frac{\sin q\frac{2h\pi}{p}}{\sin\frac{2h\pi}{p}} = 2^{q-1}\prod \sin\frac{2\pi(hq+kp)}{pq}\sin\frac{2\pi(hq-kp)}{pq}$$
$$= 2^{p-1}\sin^2\frac{2\pi h}{p}\cdot\prod\sin^2\frac{2\pi k}{q}\quad\left(k=1,\dots\frac{q-1}{2}\right).$$

Das Princip der Reduction ist also im Laufe der Jahre in die verschiedensten Formen gegossen worden. Das Merkwürdigste aber ist wohl an jenem Princip, dass es, wie Kronecker gelehrt hat, ersetzt werden kann durch das Princip der Induction.

Wir recapituliren kurz:

Eisenstein übersetzte die Gauss'sche arithmetische Sprache des dritten und fünften Beweises in sehr anschaulicher Weise in die der Geometrie. Genocchi benutzte die im dritten Beweise aufgestellten Gesetze, welchen Grössen $[x]$ gehorchen, und die später von Kronecker in so helles Licht und unserem Verständnisse so nahe gerückt wurden, um daraus gewisse — von Schering und Kronecker erweiterte und vervollständigte — functionentheoretische Betrachtungen zu knüpfen. Stern erkannte, dass zwischen den Gliedern der halben Restsysteme $p, \cdots \frac{q-1}{2}p$ und $q, \cdots \frac{p-1}{2}q$ gewisse Beziehungen stattfinden, deren Verwerthung den Gauss'schen fünften Beweis abkürzt. Zeller und später Petersen benutzten und vervollständigten diese Darlegungen. Zeller erkannte ausserdem durch eine schöne Substitution, dass in $q, \cdots \frac{p-1}{2}q$ oder $p, \cdots \frac{q-1}{2}p$ Paare von Gliedern vorkommen. Voigt vereinfachte den dritten Gauss'schen Beweis dadurch, dass er von vornherein die Anzahl der $kp$, welche negative absolut kleinste Reste Modulo $q$ geben, durch eine Differenz zweier grösster ganzer Zahlen darstellte. Bouniakowsky zerfällte $\mu$ und $\nu$ in eigenthümlicher Weise, indem er zeigt, dass für $p=2an+r$ $(a\equiv r\equiv 1 \mod 2,\ 1<r<2a-1)$

$$\left(\frac{a}{p}\right)=(-1)^{\frac{a-1}{2}n+m}$$

wird, wobei $m$ nur von $a$ und $r$, nicht aber von $n$ abhängt, so dass für $q=2an'+r$:

$$\left(\frac{a}{q}\right)=(-1)^{\frac{a-1}{2}n'+m} \text{ wird oder } \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{a}{q}\right)=(-1)^{\frac{a-1}{2}(n+n')}.$$

Mit Hilfe dieser letzteren Formel und der folgenden:

$$p=q+2^{\nu}a$$

leitet Bouniakowsky die Legendre'sche Formel ab. — Busche endlich wies mit Hilfe eines speciellen Falles der Bouniakowsky'schen Formel, die er durch Gauss'sche Methoden (3. Beweis) ableitete, nach, dass die Existenz der Formel:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{q}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$$

die der andern:

$$\left(\frac{q}{p+2\lambda q}\right)\left(\frac{p+2\lambda q}{q}\right)=(-1)^{\frac{q-1}{2}\cdot\frac{p+2\lambda q-1}{2}}$$

bedingt, und folgert hieraus — da die Gleichung

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}\varepsilon=\pm 1$$

*eo ipso* besteht — unter Anwendung seines allgemeinen Satzes die Allgemeingiltigkeit des quadratischen Reciprocitätsgesetzes.

So sind jene Gauss'schen Untersuchungen, die im dritten und fünften Beweise niedergelegt sind, nach allen Richtungen hin erweitert und vervollständigt worden.

## III. Capitel.

### Ueber Eisenstein's Beweis durch functionentheoretische Sätze.

Stellt $r$ ein halbes Restsystem dar Modulo $q$, so wird auch $rp$ ein halbes Restsystem Modulo $q$ repräsentiren. Setzt man nun $rp \equiv \varepsilon r' \bmod q$, wo $\varepsilon=\pm 1$ sein möge, und $r'$ demselben halben Restsystem wie $r$ angehört, so wird für ein beliebiges $\omega$:

$$\frac{pr\omega}{q} \equiv \frac{\varepsilon r'\omega}{q} \bmod \omega.$$

Hieraus ergiebt sich aber:

$$\mathfrak{p}\left(\frac{pr\omega}{q}\right)=\mathfrak{p}\left(\frac{\varepsilon r'\omega}{q}\right),$$

wenn $\mathfrak{p}$ eine einfach periodische Function mit der Periode $\omega$ ist.

Setzt man nun noch voraus, dass die Function $\mathfrak{p}$ die negative Multiplication zulässt (ich gebrauche diesen Ausdruck „negativ" in Uebereinstimmung mit dem Ausdrucke complexe Multiplication), so erhält man:

$$\mathfrak{p}\left(\frac{pr\omega}{q}\right)=\varepsilon\,\mathfrak{p}\left(\frac{r'\omega}{q}\right).$$

Die $r'$ sollten aber mit den $r$, abgesehen von der Reihenfolge, zusammenfallen, so dass wir bekommen:

$$\prod_r \mathfrak{p}\left(\frac{pr\omega}{q}\right)=\prod \varepsilon\prod_r \mathfrak{p}\left(\frac{r\omega}{q}\right) \text{ oder } \left(\frac{p}{q}\right)=\prod\varepsilon=\prod_r\frac{\mathfrak{p}\left(\frac{pr\omega}{q}\right)}{\mathfrak{p}\left(\frac{r\omega}{q}\right)}.$$

Nun erhebt sich die Frage, ob es eine Function $\mathfrak{p}$ von den angegebenen Eigenschaften giebt. Wie allgemein bekannt, genügt aber die Sinusfunction den gestellten Anforderungen, wenn wir $\omega=2\pi$ setzen; es resultirt somit:

$$\left(\frac{p}{q}\right)=\prod_r \frac{\sin\frac{2rp\pi}{q}}{\sin\frac{2r\pi}{q}}.$$

Setzt man zur Abkürzung $v=\frac{2r\pi}{q}$, so haben wir es also zu thun mit Ausdrücken von der Form: $\frac{\sin pv}{\sin v}$.

Die Eigenschaften der Sinus-Function (einfach periodisch, gestattet die negative Multiplication) genügen nun vollständig, um mit Hilfe derselben das Reciprocitätsgesetz abzuleiten. D. h.: Die Existenz einer einfach periodischen Function, die die negative Multiplication zulässt, ermöglicht den Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes.

Wir gehen der Vollständigkeit halber noch etwas genauer auf den Eisenstein'schen Beweis ein, der noch lange nicht nach seinem vollen Werthe gewürdigt ist, und der bald zu den Beweisen durch Reduction, bald zu denen durch Kreistheilung, mit welchen beiden Arten er ja auch in gewisser Beziehung steht, gerechnet wird.

Da $\frac{\sin 3v}{\sin v}$ eine gerade Function von $\sin v$ von der Form:

$$(-1)^{\frac{3-1}{2}}\,2^{3-1}\sin^{3-1}v+\ldots$$

ist, so ergiebt sich durch den Schluss von $n$ auf $n+2$:

$$\frac{\sin tv}{\sin v}=(-1)^{\frac{t-1}{2}}\,2^{t-1}\sin^{t-1}v+\ldots$$

Hieraus folgt, wenn wir die Wurzeln von $\frac{\sin tv}{\sin v}=0$ mit $\tau$ bezeichnen, dass

$$\frac{\sin tv}{\sin v}=(-1)^{\frac{t-1}{2}}\,2^{t-1}\,\Pi(\sin^2 v-\tau^2),$$

da die Wurzeln doppelt vorkommen, d. h.:

$$\begin{cases}\left(\frac{p}{q}\right)=\prod\left((-1)^{\frac{p-1}{2}}\,2^{p-1}\prod\left\{\sin^2\frac{2r\pi}{q}-\alpha^2\right\}\right),\\ \left(\frac{q}{p}\right)=\prod\left((-1)^{\frac{q-1}{2}}\,2^{q-1}\prod\left(\sin^2\frac{2\varrho\pi}{p}-\beta^2\right)\right),\end{cases}$$

wenn

die $\alpha$ die $\frac{p-1}{2}$ verschiedenen Wurzeln von $\frac{\sin\frac{2r\pi}{q}p}{\sin\frac{2r\pi}{q}}=0$ und

die $\beta$ die $\frac{q-1}{2}$ verschiedenen Wurzeln von $\frac{\sin\frac{2\varrho\pi}{p}q}{\sin\frac{2\varrho\pi}{p}}=0$ sind

und wenn ferner $r$ und $\varrho$ halbe Restsysteme Modulo $q$ resp. Modulo $p$ durchlaufen.

Wie also in dem Kronecker'schen Beweise das Princip der Reduction ersetzt wurde durch das Princip der Induction, so wird in dem eben betrachteten Eisenstein'schen Beweis jenes Princip der Reduction ersetzt durch functionentheoretische Erörterungen; wieder ein Beispiel dafür, wie in der Zahlenlehre die verschiedensten Theorien sich verbinden und durchdringen.

## IV. Capitel.

### Ueber die Beweise mit Hilfe von Sätzen aus der Theorie der Kreistheilung.

Im V. Capitel des ersten Theiles unserer Arbeit finden sich die Beweise, welche sich auf Sätze aus der Kreistheilungslehre stützen. Begründet wurde diese Theorie von Gauss, der sie fand, als er nach einem ferneren Beweise seines Fundamentaltheoremes suchte. Bereits im Jahre 1796[1]) kündigte er die Construction des 17-Ecks an. Abgesehen nun von den epochemachenden Sätzen über imaginäre Grössen und Functionentheorie, leitete Gauss aus der Kreistheilung drei (wenn man will auch vier) neue, von einander verschiedene Beweise des Reciprocitätsgesetzes ab.

Zunächst wollen wir das Lemma, auf welches sich sämmtliche Beweise durch Kreistheilung stützen, kurz entwickeln. Ist $\varrho$ eine primitive Wurzel von $\frac{x^p-1}{x-1}=0$, wobei $p$ eine Primzahl repräsentiren mag und $g$ eine primitive Wurzel zum Modul $p$, so werden sich sämmtliche Wurzeln $\varrho$ in zwei Reihen anordnen lassen, nämlich in:

$$\varrho,\ \varrho^{g^2},\ \varrho^{g^4},\ \dots\ \varrho^{g^{p-3}} \quad \text{und} \quad \varrho^{g},\ \varrho^{g^3},\ \dots\ \varrho^{g^{p-2}},$$

was gleichbedeutend ist mit:

$$\varrho^{a_1},\ \varrho^{a_2},\ \varrho^{a_3}\ \dots \quad \text{und} \quad \varrho^{b_1},\ \varrho^{b_2},\ \varrho^{b_3},\ \dots,$$

wenn $a_1, a_2, \dots$ sämmtliche quadratische Reste und $b_1, b_2, \dots$ sämmtliche quadratische Nichtreste Modulo $p$ bedeuten.

$$y_1=\Sigma\varrho^a \quad \text{und} \quad y_2=\Sigma\varrho^b$$

nennt man dann Perioden und speciell $\frac{p-1}{2}$-gliedrige Perioden von $\frac{x^p-1}{x-1}$.[2]) Von grosser Wichtigkeit ist nun der Ausdruck:

$$y_1-y_2.$$

Verhältnismässig leicht ist die Bestimmung des Quadrates dieser Differenz; es findet sich:

$$\text{A)} \qquad (y_1-y_2)^2=(-1)^{\frac{p-1}{2}}p.$$

1) Allgem. Literaturz. 1796.

2) Zur Orientirung diene Bachmann, Vorlesungen über Kreistheilung.

Sehr schwierig war aber die Bestimmung des Vorzeichens von $y_1 - y_2$, und erst nach langem, vergeblichem Bemühen überwand Gauss alle entgegenstehenden Schwierigkeiten. Er schreibt in Bezug auf die Auffindung dieses Vorzeichens an Olbers 1805 [1]): „Dieser Mangel (d. h. das Fehlen des Vorzeichens) hat mir alles Uebrige, was ich fand, verleidet, und seit vier Jahren wird selten eine Woche vergangen sein, wo ich nicht einen oder den anderen vergeblichen Versuch, diesen Knoten zu lösen, gemacht hätte — besonders lebhaft wieder in der letzteren Zeit. Aber alles Brüten, alles Suchen ist umsonst gewesen, traurig habe ich jedes Mal die Feder wieder niederlegen müssen. Endlich vor ein paar Tagen ist's gelungen — aber nicht meinem mühsamen Suchen, sondern bloss durch die Gnade Gottes möchte ich sagen. Wie der Blitz einschlägt, hat sich das Räthsel gelöst; ich selbst wäre nicht im Stande, den leitenden Faden zwischen dem, was ich vorher wusste, dem, womit ich die letzten Versuche gemacht hatte — und dem, wodurch es gelang, nachzuweisen. Sonderbar erscheint die Lösung des Räthsels jetzt leichter als manches Andere, was mich wohl nicht so viele Tage aufgehalten hat, als dieses Jahre, und gewiss wird Niemand, wenn ich diese Materie einst vortrage, von der langen Klemme, worin es mich gesetzt hat, eine Ahnung bekommen."

Genung, Gauss fand, dass:

B) $$y_1 - y_2 = i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p}.$$

Beide Formeln, A) sowohl wie B), sind nun zur Darlegung des Reciprocitätsgesetzes benutzt worden.

Wir beschäftigen uns zunächst mit den Beweisen, welche sich auf Formel B) gründen, und beginnen mit dem vierten Beweis von Gauss, demjenigen, in welchem jene wichtige Bestimmung des Vorzeichens von $(y_1 - y_2)$ geleistet worden ist.

Setzt man:

$$G\left(\frac{pi}{q}\right) = \sum_\lambda \left(\frac{\lambda}{q}\right) e^{\lambda^2 \frac{2p\pi i}{q}} \quad (\lambda = 1, \ldots q-1),$$

so ist zunächst:

$$G\left(\frac{pi}{q}\right) = \left(\frac{p}{q}\right) \sum e^{\frac{2\pi i}{q}\lambda^2} = \left(\frac{p}{q}\right)(y_1 - y_2)$$
$$= \left(\frac{p}{q}\right) G\left(\frac{i}{q}\right).$$

Die Summen (oder Thetareihen) $G\left(\frac{pi}{q}\right)$ und $G\left(\frac{i}{q}\right)$ nennt man Gauss'sche Summen. Die Bezeichnung $G$ ist von Kronecker eingeführt worden.[2])

---

1) Schering, Festrede, S. 13.

2) Berl. Ber. 1880.

Die Bestimmung von $G^2\left(\frac{i}{q}\right) = (y_1 - y_2)^2$ verursacht nun, wie schon bemerkt, keine besonderen Schwierigkeiten und ist schon von **Gauss** in dem 156. Artikel seiner Disq. arithm. geleistet worden. Die Hauptsache bestand eben in der Bestimmung des Vorzeichens von $G\left(\frac{i}{q}\right)$. Diese Aufgabe löste **Gauss** dadurch, dass er die Reihe:

$$G\left(\frac{i}{q}\right) = 1 + \varrho + \varrho^4 + \cdots + \varrho^{(q-1)^2},$$

wo $\varrho$ also eine primitive $n^{\text{te}}$ Einheitswurzel ist, transformirte in:

$$G\left(\frac{i}{q}\right) = (\varrho - \varrho^{-1})(\varrho^3 - \varrho^{-3}) \ldots (\varrho^{q-2} - \varrho^{-q+2})..$$

Dadurch, dass dann:

$$\varrho = \cos\frac{2\pi k}{q} + i \sin\frac{2\pi k}{q}$$

eingeführt wird, resultirt:

$$G\left(\frac{i}{q}\right) = (2i)^{\frac{q-1}{2}} \sin\frac{2\pi}{q} \cdot \sin\frac{6\pi}{q} \cdots \sin\frac{(q-2)2\pi}{q},$$

woraus sich unser Vorzeichen ergiebt.

Des Näheren auf den Beweis einzugehen, dürfte hier nicht nöthig sein, da mit dieser Vorzeichenbestimmung sich der Beweis erledigt. Die Betrachtungen nun, welche zu jener Transformation von $G\left(\frac{i}{q}\right)$ in das Product: $(\varrho - \varrho^{-1})(\varrho^3 - \varrho^{-3}) \ldots (\varrho^{q-2} - \varrho^{-q+2})$ führen, sind rein arithmetischer Art.[1] „*La difficulté*", bemerkt **Dirichlet**,[2] „*de se rendre bien compte à quoi tient le succès des considérations délicates par lesquelles l'illustre auteur opère cette ingénieuse transformation m'ayant fait rechercher, si on ne pouvait pas résoudre la même question sans y recourir, je suis parvenu* ..." **Dirichlet** bestimmte die **Gauss**'schen Summen mit Hilfe bestimmter Integrale und benutzt den Hilfssatz, dass, wenn der Werth:

$$F(\alpha) = c_0 + c_1 \cos\frac{2\pi}{n} + c_2 \cos 2\frac{2\pi}{n} + \cdots$$

bekannt ist, die Werthe der Reihen:

$$c_0 + c_1 \cos\frac{2\pi}{n} + c_2 \cos\frac{2^2 2\pi}{n} + \cdots \quad \text{und} \quad c_1 \sin\frac{2\pi}{n} + c_2 \cos\frac{2^2 2\pi}{n} + \cdots$$

$$\text{oder} \quad c_0 + c_1 e^{\frac{2\pi i}{q}} + c_2 e^{\frac{2\pi i}{q}4} + c_3 {}^{\frac{2\pi i}{q}9} + \cdots = \Sigma s e^{\frac{2\pi i}{q}s^2}$$

sich bestimmen lassen.

---

1) Brief an **Olbers**.

2) **Crelle** J. XVII, S. 57 (ausserdem XVIII, XX, XXI).

Aus der bekannten Euler'schen Formel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx} x^{a-1}\,dx = \frac{\Gamma(a)}{k^a}$$

ergiebt sich:

$$D_1)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(1+i),$$

woraus sich die folgenden Formeln ableiten:

$$D_2)\qquad \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \cos x^2 . \cos 2vx . dx = e^{iv^2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \sin x^2 . \cos 2vx . dx = e^{-iv^2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{cases}$$

Substituirt man nun

$$D_3)\qquad x = \tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{\frac{n}{2\pi}},$$

wobei $n$ eine positive Constante ist, so wird, wenn man zur Abkürzung $F(\alpha) = \sum_s c_s \cos s\alpha$ setzt:

$$\begin{cases} \int_0^{\infty} \cos\frac{n\alpha^2}{8}\cdot F(\alpha)\,d\alpha = \frac{2\pi}{\sqrt{n}}\,\Sigma c_s e^{\frac{2\pi i}{n}s^2}, \\ \int_0^{\infty} \sin\frac{n\alpha^2}{8}\cdot F(\alpha)\,d\alpha = \frac{2\pi}{\sqrt{n}}\,\Sigma c_s e^{-\frac{2\pi i}{n}s^2}. \end{cases}$$

Nimmt man $F(\alpha)$ als gegeben an, so lassen sich die Integrale dadurch auswerthen, dass man sie zerlegt in Theilintegrale zwischen den Grenzen $-(4k+1)\pi$ und $(4k+1)\pi$, worin $k$ eine beliebige Zahl ist. Diese Integrale zerlegt man wiederum in $(4k+1)$ andere zwischen den Grenzen $(2h-1)\pi$ und $(2h+1)\pi$, worin $h$ die Werthe von $-2k$ bis $+2k$ annimmt. Diese Integrale zwischen den eben angegebenen Grenzen lassen sich aber bestimmen, und dadurch, dass man $k$ unendlich werden lässt, auch die ursprünglichen Integrale, wodurch auch die Summen $\Sigma c_s e^{\frac{2\pi i}{n}s^2}$ und $\Sigma c_s e^{-\frac{2\pi i}{n}s^2}$ gegeben sind.

Unsere Gauss'schen Summen sind aber ein specieller Fall dieser allgemeinen Summen. Setzen wir $c_s = 1$, so erhalten wir unmittelbar: $\sum c_s e^{\frac{2\pi i}{n}s^2} = G\left(\frac{i}{n}\right)$. — Für diesen speciellen Fall $c_s = 1$ ist aber auch unsere Annahme, dass $F(\alpha)$ bekannt sei, gerechtfertigt; es ist dann nämlich: $F(\alpha) = 1 + \cos\alpha + \cdots + \cos(n-1)\alpha$ nach einer bekannten Formel

gleich $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sin(2n-1)\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. Dies ist die Schlussweise, die Dirichlet zur Bestimmung der Gauss'schen Summen anwendet.

Ehe wir zu den Cauchy'schen Arbeiten übergehen, erwähnen wir noch die Abhandlungen von Libri[1]), Heine[2]) und Lebesgue[3]).

Libri beweist in seinem Mémoire über Zahlentheorie, S. 187, die Formel:

$$G=\sum_{x=0}^{n}\left\{\cos\frac{2x^2\pi}{n}+i\sin\frac{2x^2\pi}{n}\right\}=\pm\sqrt{n(-1)^{\frac{n-1}{2}}},$$

und macht das Vorzeichen ebenfalls abhängig von:

$$A=(2i)^{\frac{n-1}{2}}\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{6\pi}{n}\cdots\sin 2(n-2)\frac{\pi}{n}.$$

Er sagt aber nicht, wie er zu dieser letzteren Formel kommt. Die Transformation der Summe in das vorstehende Product ist aber der Kernpunkt der ganzen Rechnung.

Was die Abhandlung von Heine betrifft, so fasst dieser die Sachlage vom Standpunkte der Reihenentwickelung auf, ohne auf die tiefere Bedeutung dieser Reihen Rücksicht zu nehmen. Ich stelle Heine's Worte hierher: „Lässt eine Function sich nicht bloss direct in eine nach ihrer Veränderlichen $x$ aufsteigende Reihe entwickeln, sondern auch indirect, indem man sie als Product zweier Factoren darstellt, die nach Potenzen derselben Variabelen fortschreiten, so wird der Quotient einer jeden Potenz von $x$ in der ersten Entwickelung als Summe der ersten Reihe auftreten, welche nach Ausführung der Multiplication der beiden vorerwähnten Factoren in dieselbe Potenz von $x$ multiplicirt ist.

Der Grundgedanke endlich der Arbeit von Lebesgue ergiebt sich aus Folgendem: Ist

$$f(z)=\Theta(z)\,.\,f[\varphi(z)]$$

und setzt man zur Abkürzung:

$$\varphi[\varphi(z)]=\varphi^2(z);\quad \varphi\{\varphi[\varphi(z)]\}=\varphi^3(z),\ \ldots,$$

so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} f(z)&=\Theta(z)\qquad .\,f(\varphi(z)),\\ f(\varphi(z))&=\Theta(\varphi z)\qquad .\,f(\varphi^2(z)),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ f(\varphi^{n-1}(z))&=\Theta(\varphi^{n-1}(z))\,.\,f(\varphi^n(z)),\end{aligned}$$

wenn die $f$ und $\Theta$ congruent bleiben. Durch Multiplication erhält man:

$$f(z)=f(\varphi^n(z))\,.\,\Theta(z)\,.\,\Theta(\varphi(z))\,.\,\Theta(\varphi^2(z))\ \ldots\ \Theta(\varphi^{n-1}(z)).$$

---

1) Crelle J. IX, S. 54 und 139.

2) Crelle J. IXL, S. 288.

3) Liouv. J. V, S. 42.

Wird nun für $n=\infty$, $\varphi^n(z)=a$, so ergiebt sich:

$$f(z)=f(a).\Theta(z).\Theta(\varphi(z)).\Theta(\varphi^2(z))\ldots\Theta(\varphi_{n-1}(z)).$$

Mit Hilfe von

$$f(b)=f(a)\,\Theta(b).\Theta(\varphi(b))\;\ldots\;\Theta(\varphi^{n-1}(b))$$

erhält man somit:

$$f(z)=f(b)\frac{\Theta(z).\Theta[\varphi(z)]\;\ldots\;\Theta[\varphi^{n-1}(z)]}{\Theta(b).\Theta[\varphi(b)]\;.\;.\;\Theta[\varphi^{n-1}(b)]}.$$

Setzt man nun:

$$f(z)=1+q\frac{1-z}{1-q}+q^3\frac{(1-z)(1-qz)}{(1-q)(1-q^2)}+\cdots,$$

so findet sich dadurch, dass man im allgemeinen Gliede von $f(z)$ an Stelle von $z$, $q^2z$ setzt und mit $1-qz$ multiplicirt:

$$f(z)=(1-qz)\,f(q^2z),$$

woraus

$$\varphi(z)=q^2z,\quad \varphi^2(z)=q^4z,\;\ldots\;\varphi^n(z)=q^{2n}z\;\ldots$$

und

$$\Theta(z)=1-qz,\quad \Theta[\varphi(z)]=1-q^3z,\;\ldots\;\Theta[\varphi^{n-1}(z)]=1-q^{2n-1}z$$

folgt, so dass

$$f(z)=f(q^{2n}z).1-qz.1-q^3z.\;\ldots\;.1-q^{2n-1}z\;\ldots$$

wird. Für $q<1$ und $n=\infty$ wird $f(q^\infty z)=f(z):1-qz.1-q^3z\ldots$ und da $f(1)=1$, so:

$$f(z)=\frac{1-qz}{1-q}\cdot\frac{1-q^3z}{1-q^3}\cdot\frac{1-q^5z}{1-q^5}\cdot\;\ldots,$$

woraus

$$1+q\frac{1-q^{-m}}{1-q}+q^3\frac{1-q^{-m}}{1-q}\cdot\frac{1-q^{-m+1}}{1-q^2}+\cdots$$
$$=(1-q^{-m+1})(1-q^{-m+3})\;\ldots\;(1-q^{-1})$$

für $m\equiv 0 \mod 2$ resultirt.

Setzt man: $q^{n+1}=q^p=1$, so ergiebt sich die Gauss'sche Formel:

$$1+q+q^3+\cdots+q^{\frac{p-1}{2}p}=(1-q^{-p+2})(1-q^{-p+3})\;\ldots\;(1-q^{-1}).$$[1]

Wir gehen nun zu den Cauchy'schen Arbeiten über. Es handelt sich darin, eben wie bei Gauss, darum, das Vorzeichen der fraglichen Quadratwurzel zu bestimmen. Bereits 1817 war dies Cauchy mit Hilfe reciproker Functionen gelungen,[2]) und er hatte die Formel gefunden:

$$\text{C)}\quad\begin{cases} a^{\frac12}(\frac12+e^{-a^2}+e^{-4a^2}+\cdots)=b^{\frac12}(\frac12+e^{-b^2}+e^{-4b^2}+\cdots)\\ ab=\pi.\end{cases}$$

---

1) Mit Hilfe derselben Principien sind von Lebesgue auch verschiedene Formeln Jacobi's, Ell. Funct. S. 186, bewiesen.

2) Bull. de la soc. philomat. 1817. — Vergleiche auch Exerc. de math. II, . 118. Compt. Rend. 1840. Liouv. J. V, S. 184.

Aus dieser Formel lässt sich die Gauss'sche Summe bestimmen. Setzt man nämlich: $a = \alpha^2 - \frac{2\pi}{n} i$, $b = \beta^2 + \frac{n\pi}{2} i$, wo $\alpha$ und $\beta$ nach der Null convergiren, so wird zunächst $n\alpha = 2\beta$. Multiplicirt man nun beide Seiten der Cauchy'schen Formel mit $n\alpha$, so ergiebt sich nach Fortlassung des gemeinschaftlichen Factors $\int\limits_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ der Werth für $G\left(\frac{i}{p}\right)$.

Wir haben nun zur Bestimmung des Gauss'schen Vorzeichens das Material vor uns, so dass wir an eine Sichtung desselben gehen können. Ein Blick auf die Gauss'sche Formel zeigt, dass die Vorzeichenbestimmung abhängig ist von der Transformation der Gauss'schen Summe (oder der Thetareihe) $G\left(\frac{i}{p}\right)$ in das Product:

$$(\varrho - \varrho^{-1})(\varrho^3 - \varrho^{-3}) \ \ldots \ (\varrho^{p-2} - \varrho^{-p+2}).$$

Jene Transformation aber, „si ingénieuse", beruht auf rein arithmetischen Betrachtungen. Dirichlet, durch diesen Umstand veranlasst, ging einen Schritt weiter und zeigte, dass die Vorzeichenbestimmung abhängig ist von den Eigenschaften bestimmter Integrale. Cauchy endlich brachte vollständige Klarheit in die in Rede stehende Angelegenheit und wies nach, dass das fragliche Vorzeichen auftritt bei einer gewissen Transformation von Thetareihen. Seine Formel ist:

$$a^{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{1}{2} + e^{-a^2} + e^{-4a^2} + \cdots\right) = b^{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{1}{2} + e^{-b^2} + e^{-4b^2} + \cdots\right), \quad ab = \pi.$$

Die vorstehende Formel erregte, wie Cauchy selbst bemerkt, auch das Interesse Lagrange's, der sie für kleine Werthe der Variabelen bereits kannte.

Auch Lebesgue war sich des Umstandes völlig bewusst, dass die Cauchy'sche Formel ihre Basis in der Theorie der elliptischen Functionen habe; er weist darauf hin,[1]) dass die Cauchy'sche Formel schon Poinsot bekannt gewesen sei, und zwar in der Form:

$$\pi + 2\pi \sum e^{-4kn^2\pi} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}} + \sqrt{\frac{\pi}{k}} \sum e^{-\frac{n^2}{4k}}$$
$$n = 0, \ldots \infty.$$

Und in der That, setzt man $a = \frac{1}{4k}$, $b^2 = 4k\pi^2$, so dass $ab = \pi$ wird, so geht die Formel von Poinsot-Lebesgue in die von Cauchy über. Ist ferner $a = \frac{1}{4k} = \pi x$, so erhält man:

$$\sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{1 + 2e^{-\pi x} + 2e^{-4\pi x} + \cdots}{1 + 2e^{-\frac{\pi}{x}} + 2e^{-\frac{4\pi}{x}} \ldots},$$

eine Relation Jacobi's.[2])

---

1) Liouv. Journ. V, S. 186.
2) Jacobi, Crelle J. III, S. 303.

Der Wichtigkeit der Cauchy'schen Arbeit wegen reproduciren wir sie kurz, und zwar in Kronecker'scher Fassung.[1])

Aus der mit Hilfe Cauchy'scher Principien abgeleiteten Formel:

$$\left\{\begin{array}{l} \sum u^{(\log z)^2} = (\sqrt{\log v}) \sum\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi} z^n \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\, dx, \\ 4\pi \log u \log v = 1 \end{array}\right.$$

findet man:

$$K_1) \qquad \left\{\begin{array}{l} \sqrt{\log \frac{1}{x}} \cdot \dfrac{\sum x^{-\frac{1}{4\pi}(\log z + 2n\pi i)^2}}{\Sigma y^{n^2\pi} z^n} = 1, \\ \log x \,.\, \log y = 1, \end{array}\right.$$

woraus wiederum folgt:

$$K_2) \qquad \sqrt{\log \frac{1}{x}} \cdot \frac{\Sigma x^{n^2\pi}}{\Sigma y^{n\pi}} = 1.$$

Setzt man nun: $-\log x = w^2 + \frac{\lambda i}{\mu}$, wobei $\lambda$ und $\mu$ ganze Zahlen sein sollen, und lässt $w$ nach der Null convergiren, so entsteht:

$$\lim_{w=0} (\mu w) \sum x^{n^2\pi} = \tfrac{1}{2} \sum_{k=0}^{2\mu-1} e^{-k\frac{2\lambda\pi i}{\mu}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2\pi}\, dx,$$

woraus, da $-\left(1 + \frac{\mu^2 w^2}{\lambda^2}\right) \log y = \frac{\mu^2 w^2}{\lambda^2} + \frac{\mu}{\lambda i}$ und $(\mu w)$ positiv ist:

$$\lim_{w} (\mu w)\, \Sigma y^{n^2\pi} = G\left(\frac{\mu}{\lambda i}\right),$$

mithin nach $K_2$):

$$K_3) \qquad \sqrt{\frac{\lambda i}{\mu}} \cdot G\left(\frac{\lambda i}{\mu}\right) = G\left(\frac{\mu}{\lambda i}\right)$$

folgt.

Mit Hilfe dieser letzteren Formel ist aber die Transformation einer Gauss'schen Summe in eine andere geleistet; und mit Hilfe dieser Formel kann man leicht jenes fragliche Vorzeichen bestimmen: „Die Bestimmung desselben tritt in Evidenz."[2]) In der oben citirten Abhandlung geht aber Kronecker noch einen Schritt weiter; er weist da auch nach, dass mit Hilfe der Gauss'schen Summen die Transformation der Thetareihen sich bewerkstelligen lässt. Es genügt hier, darauf hingewiesen zu haben.

Ein Punkt ist aber noch anzuführen: der Zusammenhang der Cauchy-schen und Dirichlet'schen Arbeit. Wie wir sahen, ist Dirichlet's Vorzeichenbestimmung abhängig von den Formeln $D_1$ und $D_2$ und von der Substitution $D_3$, die Cauchy's von der Substitution $K_1$ und den Formeln $K_2$ und $K_3$. — $D_1$ und $D_2$ drücken aber die Grenzwerthe von Thetareihen aus, aus denen mit Hilfe der Substitution $D_3$, also mit Hilfe einer Trans-

1) Berl. Mon.-Ber. 1880, S. 686, 854.

2) Kronecker, Berl. Mon.-Ber. 1880.

formation derselben jenes Vorzeichen gewonnen wird. Dirichlet bestimmt also erst den Grenzwerth einer Thetareihe und transformirt dann dieselbe. Cauchy schlägt den umgekehrten Weg ein: er transformirt erst eine Thetareihe durch die Substitution $log\,x\,log\,y = 1$ und geht dann zur Grenze über, durch welche Operation er aus $K_2$ die Formel $K_3$ erhält. Auf diesem Umstand beruht, wie Kronecker bemerkt, der ganze Unterschied der Arbeiten von Dirichlet und Cauchy.

Wir kommen nun zu den Beweisen, welche sich direct auf die Formel A), d. h. auf $(y_1 - y_2)^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p$ gründen. Wir beginnen mit dem sechsten Beweis von Gauss und schliessen an denselben den von Cauchy-Jacobi-Eisenstein an.

Bezeichnet — nach dem sechsten Gauss'schen Beweise — $G$ die Reihe $x^g - x^{-g} + x^{g^2} \mp \ldots - x^{g^{p-2}}$, wobei $g$ eine primitive Wurzel von $p$ ist, so ist zunächst

$$G^q - G_q \equiv 0 \; mod\, q, \quad \text{wenn} \quad G_q = x^q - x^{qg} \pm \ldots \quad \text{ist}$$

oder, wenn $X$ eine ganze Function von $x$ ist:

$$1) \qquad G^q - G_q = qX.$$

Setzt man ferner $q \equiv g^\mu \; mod\, p$, so ist:

$$2) \qquad G_q - \left(\frac{q}{p}\right) G = \frac{1-x^p}{1-x} W,$$

wo $W$ wiederum eine ganze Function von $x$ ist.

Aus dem System Gleichungen:

$$x^{g^k} G - x^{g^k + g^k} + x^{g^{k+1} + g^k} \mp \ldots + x^{g^p + g^k} = x^{g^k + 1} \{(x^{g^k - g^{k-1}} - 1) + \ldots\},$$
$$k = 0, 1, \ldots p-2$$

erhält man ferner durch rein algebraische Betrachtungen:

$$3) \qquad G^2 - (-1)^{\frac{p-1}{2}} p = \frac{1-x^p}{1-x} Z,$$

wo $Z$ ebenfalls eine ganze Function von $x$ ist. Hieraus folgt aber:

$$4) \qquad G^{q-1} - (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}} p^{\frac{p-1}{2}} = \frac{1-x^p}{1-x} Y,$$

worin $Y$ dieselbe Eigenschaft wie $X$, $W$, $Z$ hat.

Aus den Formeln 1)—4) ist nun das Reciprocitätsgesetz leicht ableitbar.

Auf den ersten Blick scheint es, als ob der Gauss'sche sechste Beweis seine Hilfsmittel lediglich der Functionentheorie entlehne; aber bei genauerer Betrachtung zeigt sich, dass das $G$ nichts Anderes ist, als die Differenz $y_1 - y_2$.

Wenn man nun den allgemeinen Charakter von $x$ in $G$ beschränkt, d. h. dem $x$ specielle Werthe beilegt, so ist zu erwarten, dass sich jener Gauss'sche Beweis vereinfachen wird. Und dies ist in der That der Fall. Jacobi und Cauchy lassen $x$ eine imaginäre Wurzel von $x^p = 1$ sein

Eisenstein setzt geradezu $x = 1$. Principiell sind diese drei Beweise unter einander und von dem Gauss'schen sechsten Beweise nicht verschieden.

Wir haben nun zwei Beweise zu betrachten, welche arithmetischer Natur zu sein scheinen und ihre Quelle doch in der Kreistheilung haben. Es sind dies Eisenstein's zweiter und Lebesgue's erster Beweis.

Was zunächst den Beweis von Eisenstein betrifft, so beruht dieser, wie auch schon Lebesgue[1]) bemerkt, auf einer eigenthümlichen Entwickelung der Potenz:

$$\left\{\sum\left(\frac{\lambda}{p}\right)x^\lambda\right\}^\mu; \quad \lambda = 1, \ldots p-1.$$

Eisenstein setzt:

$$\left\{\sum\left(\frac{\lambda}{p}\right)x^\lambda\right\}^\mu = \left\{\left(\frac{1}{p}\right)x + \left(\frac{2}{p}\right)x^2 + \ldots + \left(\frac{p-1}{p}\right)x^{p-1}\right\}^\mu$$
$$= \psi_{(\mu,0)} + \psi_{(\mu,1)}\cdot x + \psi_{(u,1)}\cdot x^2 + \ldots + \psi_{(u,\nu)}\cdot x^\nu + \ldots + ()x^{p-1}.$$

Die eingeführten $\psi$-Functionen sind also die Coefficienten der Variabelen in der Entwickelung jener Potenz nach eben dieser Variabelen. Auf rein arithmetischem Wege werden die Werthe für $\psi$ bestimmt, wodurch als Endresultat:

$$\psi_{(q,1)} = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} p^{\frac{q-1}{2}} \quad (q \equiv 1 \; mod\, 2)$$

sich ergiebt. Es ist also

$$\psi_{(2\lambda+1,1)} = \psi_{(q,1)} = (y_1 - y_2)^{q-1} = G^{q-1}.$$

Diese Formel giebt das Reciprocitätsgesetz, wenn man bedenkt, dass in $\psi_{(q,1)} = \sum\left(\frac{\alpha_1}{p}\right)\cdots\left(\frac{\alpha_q}{p}\right)$ nur einmal die $\alpha$ gleich werden können, weil $q\alpha \equiv 1 \; mod\, p$ nur eine Lösung zulässt.

Der Beweis von Lebesgue ist nach Bachmann[2]) von dem Eisenstein'schen nur dadurch verschieden, dass Lebesgue an Stelle von $\left\{\sum\left(\frac{\lambda}{p}\right)x^\lambda\right\}^\mu$ die Potenz $\{\Sigma x^{\lambda^2}\}^q$ anwendet. Dann wird:

$$(x + x^4 + \ldots + x^{(p-1)^2})^q = n_0{}^q + n_q \Sigma x^a + n'_q \Sigma x^b,$$

worin $a$ die quadratischen Reste, $b$ die quadratischen Nichtreste Modulo $q$ bedeuten und

$n_0$ die Anzahl der Lösungen von $x_1^2 + \ldots + x_q^2 \equiv 0 \; mod\, p$,
$n_q$ „ „ „ „ „ $x_1^2 + \ldots + x_q^2 \equiv a \; mod\, p$
und $n'_q$ „ „ „ „ „ $x_1^2 + \ldots + x_q^2 \equiv b \; mod\, p$ ist.

Die Bestimmung der $n$ ergiebt das Reciprocitätsgesetz.

In dem siebenten Gauss'schen Beweise, der, wie wir später sehen werden, eigentlich der dritte ist, tritt ein neuer Gesichtspunkt zu den bisherigen hinzu. Durch Anwendung der Formel $(y_1 - y_2)^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p$ und

1) Liouville J. V.

2) Vorlesungen über Kreistheilung.

der Relation $1+y_1+y_2=0$ ergiebt sich nämlich, dass $y_1$ und $y_2$ Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\text{A)} \qquad x^2+x+\frac{1-(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}{4}=0$$

sind, welche durch die Substitution $y=2x+1$ übergeht in die folgende:

$$\text{B)} \qquad y^2=(-1)^{\frac{p-1}{2}}p=G^2.$$

Man verwandelt die Gleichung B) oder A) in Congruenz Modulo $q$. Die Möglichkeit oder Unmöglichkeit derselben kann auf doppelte Weise bestimmt werden und die Vergleichung der beiden Relationen ergiebt unsere bekannte Formel.

Der Beweis endlich von Liouville nimmt unter den in diesem Capitel analysirten Beweisen eine ähnliche Stellung ein, wie der von Kronecker unter den Beweisen durch Reduction; Liouville umgeht das Princip der Kreistheilung und führt dafür das Princip der Reduction ein. Aus $\frac{x^p-1}{x-1}$ $=(x-\varrho^2)(x-\varrho^4),\ldots(x-\varrho^{2(p-1)})$ — $\varrho$ ist primitive Wurzel von $\frac{x^p-1}{x-1}=0$ — erhält er, wenn er $x=1$ setzt und die beiden Seiten der Gleichung auf die $\frac{q-1}{2}$ te Potenz erhebt:

$$p^{\frac{q-1}{2}}=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}\prod_{\alpha=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{\varrho^{\alpha q}-\varrho^{-\alpha q}}{\varrho^{\alpha}-\varrho^{-\alpha}}$$

oder

$$\left(\frac{p}{q}\right)=\text{Vorz.}\left\{(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}\prod\frac{\varrho^{\alpha q}-\varrho^{-\alpha q}}{\varrho^{\alpha}-\varrho^{-\alpha}}\right\}.$$

Durch Einführung des Gauss'schen Lemmas folgt aber unsere Formel, wenn man noch bedenkt, dass $\left(\frac{\varrho^{\alpha q}-\varrho^{-\alpha q}}{\varrho^{\alpha}-\varrho^{-\alpha}}\right)=\pm 1$ wird, je nachdem $\alpha q$ einen positiven oder negativen absolut kleinsten Rest Modulo $q$ giebt. Obgleich also die Beweise durch „Kreistheilung" nicht so zahlreich sind, wie die durch „Reduction", so ist doch auch das Princip der Kreistheilung, wie wir gesehen, in die verschiedensten Formen gegossen worden. — Geradezu bedeutende Arbeiten sind die von Dirichlet und Cauchy, in denen das berühmte Vorzeichen von $y_1-y_2$ bestimmt wird.

Zum ersten Male — wir kommen darauf in den Schlussbemerkungen zurück — ist der Beweis von Gauss mit Hilfe der Periodencongruenzen geliefert worden: die Möglichkeit, die Lösbarkeit oder Unlösbarkeit der Congruenz $y^2\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}p \mod q$ auf zweifache Weise auszudrücken, führte zum Ziele. 1811 veröffentlichte er ferner seine berühmte „Summatio quarund. serier. sing. etc.", welche den vierten Beweis enthält, der sich stützt

auf $G\left(\frac{pi}{q}\right)=\left(\frac{p}{q}\right)G\left(\frac{i}{q}\right)=\left(\frac{p}{q}\right)(y_1-y_2)$; 1818 bereits den sechsten Beweis, der nicht von $y_1-y_2$, sondern von $(y_1-y_2)^2$ abhängt. Jacobi, Cauchy und Eisenstein vereinfachten diese letzteren Darlegungen dadurch, dass sie der bei Gauss beliebigen Variabelen $x$ specielle Werthe beilegten. — Liouville führte an Stelle des „Princips der Kreistheilung" das „Princip der Reduction" ein und zeigte dadurch wiederum, wie innig die verschiedenen Zweige der Zahlentheorie unter einander verwandt sind. Eisenstein und später Lebesgue weisen nach, dass die Coefficienten in der Entwickelung von $\left\{\sum\left(\frac{\lambda}{p}\right)x^\lambda\right\}^\mu$ resp. $\{\Sigma x^{\lambda^2}\}^q$, $(\lambda=1\ldots p-1)$ nach $x$ gewisse zahlentheoretische Eigenschaften haben, welche zur Herleitung des Reciprocitätsgesetzes geeignet sind.

In der genialen Summatio Gauss' jedoch, welche die so schwierige Bestimmung des Vorzeichens der Quadratwurzel in $y_1-y_2=\pm\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}$ gab, war noch ein dunkler Punkt insofern, als jene Bestimmung, unter arithmetischen Operationen verdeckt, nicht die klare Quelle erkennen lässt, aus der sie fliesst. Mannigfache Versuche wurden gemacht, diese Quelle zu finden. Dirichlet gelang ein bedeutender Schritt vorwärts, doch scheint er selbst die Wichtigkeit und Tragweite seiner Arbeit noch nicht völlig erkannt zu haben. Cauchy gebührt das Verdienst, uns gelehrt zu haben, dass das Vorzeichen jener Wurzel bei der Transformation von Thetareihen „in Evidenz tritt" — wie sich Kronecker ausgedrückt, welcher in lichtvoller, eleganter Weise die Dirichlet'schen und Cauchy'schen Abhandlungen bespricht. Die Thatsache aber, dass jenes Vorzeichen von $y_1-y_2=G$ seinen Ursprung hat in der Theorie der Thetareihen, ist wieder ein Beleg dafür, dass die höhere Arithmetik mit den verschiedenartigsten Gebieten der Mathematik in Connex steht.

## V. Capitel.

### Ueber die Beweise, welche sich auf Sätze aus der Theorie der quadratischen Formen stützen.

1. Anlangend den Beweis von Gauss, so ist dessen Hauptnerv, wie Kummer[1]) sagt, die Thatsache, dass die Anzahl der wirklich vorhandenen Genera höchstens halb so gross ist, als die Anzahl der angebbaren. Gauss zeigt nun, dass, wenn das Reciprocitätsgesetz nicht statt hätte, jene Anzahl der wirklich existirenden Geschlechter grösser sein müsste, als die Hälfte der Anzahl der angebbaren. — Gauss unterscheidet bei seinem Beweise vier verschiedene Fälle, die sich aber bei passender Bezeichnung, wie

1) Abhandl. d. Berl. Akad. 1859.

Dirichlet[1]) gezeigt hat, auf zwei reduciren lassen. Wir sind auch hier dem Vorgange Dirichlet's gefolgt.

2. Der erste Beweis von Kummer ferner beruht im Wesentlichen auf Eigenschaften der Pell'schen Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$, woraus die folgende Gleichung sich ableitet:

$$\text{K)} \qquad 1 = m\varkappa^2 - m\lambda^2 \quad \begin{cases} mm' = D, \\ 2\varkappa\lambda = u. \end{cases}$$

Diese Gleichung liefert die Relationen:

$$\text{K}') \qquad \left(\frac{m}{m'}\right) = \left(\frac{-m'}{m}\right) = 1.$$

Zur Ableitung des Gesetzes lässt nun Kummer $D$ verschiedene Werthe annehmen. Sind $p$ und $p'$ Primzahlen von der Form $4n+3$, $q$ und $q'$ solche von der Form $4n+1$, so setzt Kummer:

$$\text{I)} \quad D = pp', \qquad \text{II)} \quad D = pp'q, \qquad \text{III)} \quad D = pp'qq'.$$

Im ersten Falle kann $D$ auf 4, im zweiten auf 8, im dritten auf 16 verschiedene Weisen in zwei Factoren zerfällt werden. Kummer schliesst nun zunächst die Fälle der Zerlegung aus, in denen $m$ resp. $m'$ gleich Eins werden, so dass 2 resp. 6 resp. 14 Zerlegungen von $D$ restiren. Nun nimmt er an im zweiten Falle, $p'$ sei so wählbar, dass

$$\left(\frac{p'}{p}\right) = -1, \quad \left(\frac{p'}{q}\right) = -1$$

sei, im dritten Falle, $p$ und $p'$ seien so wählbar, dass

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{p'}{q'}\right) = -1, \quad \left(\frac{p}{q'}\right) = \left(\frac{p'}{q}\right) = -1$$

seien. Die Zulässigkeit dieser Annahme ist aber von Dirichlet nachgewiesen worden, wie bereits bemerkt wurde.

Der zweite Beweis von Kummer gründet sich auf das Lemma, dass, wenn eine Primzahl $r$ darstellbar ist durch eine quadratische Form von der positiven oder negativen Determinante $q \equiv 1 \; mod\, 4$, welche die Hauptform nicht ist, es stets eine ungerade Potenz von $r$ giebt, welche durch die Hauptform darstellbar ist. In Zeichen:

$$r^{2\lambda+1} = x^2 - qy^2.$$

Hieraus erhält man durch Unterscheidung von

$$q = -p \equiv 1 \; mod\, 4, \quad q = +p \equiv 1 \; mod\, 4$$

und dadurch, dass man $r$ gleich $4n+1$, $4n+3$ setzt, das Reciprocitätsgesetz.

1) Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie.

## Schlussbemerkungen.

Im Folgenden wollen wir noch einige historische Anmerkungen machen über die im ersten Abschnitt zusammengestellten Beweise.

Die chronologische Reihenfolge derselben ist nachstehende. (Dabei bedeutet: *J* Beweis durch Induction, *R* Beweis durch Reduction, *K* Beweis durch Kreistheilung, *FTh* Beweis durch Functionentheorie, *F* Beweis durch Formenlehre.)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I. | 1. Beweis v. Gauss | *J* | 1796 | XIII. | 1. Bew. v. Lebesgue | *K* | 1847 |
| II. | 2. Beweis v. Gauss | *F* | 1801 | XIV. | Beweis v. Genocchi | *R* | 1852 |
| III. | 7. und 8. Beweis v. Gauss (Lebesgue) | *K* | ? | | 2. Bew. v. Lebesgue (III) | *K* | 1860 |
| IV. | 3. Beweis v. Gauss | *R* | 1808 | XV. | 1. Beweis v. Kummer | *F* | 1861 |
| V. | 4. Beweis v. Gauss | *K* | 1811 | XVI. | 2. Beweis v. Kummer | *F* | 1861 |
| VI. | 5. Beweis v. Gauss | *R* | 1818 | XVII. | Beweis v. Stern | *R* | 1870 |
| VII. | 6. Beweis v. Gauss | *K* | 1818 | XVIII. | Beweis v. Zeller | *R* | 1872 |
| VIII. | Beweis v. Cauchy | *K* | 1829 | XIX. | Beweis v. Kronecker | *R* | 1876 |
| | Bew. v. Jacobi (VIII) | *K* | 1830 | XX. | Beweis v. Bouniakowsky | *R* | 1876 |
| | 1. Beweis v. Eisenstein (VIII) | *K* | 1844 | XXI. | Beweis v. Schering | *R* | 1879 |
| IX. | 2. Bew. v. Eisenstein | *K* | 1844 | XXII. | Beweis v. Petersen | *R* | 1879 |
| X. | 3. Bew. v. Eisenstein | *R* | 1844 | XXIII. | Beweis v. Voigt | *R* | 1880 |
| XI. | 4. Bew. v. Eisenstein | *FTh* | 1845 | XXIV. | Beweis v. Busche | *R* | 1883 |
| XII. | Beweis v. Liouville | *K* | 1847 | XXV. | Beweis v. Pepin[1]) | . | . |

Die im I. Capitel des ersten Abschnittes gegebene Einleitung überhebt mich hier der Mühe, auf die Streitfrage, die Priorität der Aufstellung des Reciprocitätsgesetzes betreffend, einzugehen. Bemerken will ich nur noch, dass sich Legendre in einem Briefe an Jacobi[2]) darüber beschwert, dass Gauss für sich die Auffindung des Reciprocitätsgesetzes in Anspruch nähme.[3]) Wie wir aber gesehen haben, war weder Gauss noch Legendre der Entdecker jenes Gesetzes; vielmehr gebührt Euler dieses Verdienst.

In Bezug auf die chronologische Reihenfolge der Gauss'schen Beweise halte ich einige Bemerkungen für geboten. Kronecker[4]) nimmt an, dass die Beweise in der folgenden Reihenfolge entstanden sind:

1., 2., 4., 6., 3., 5.

---

1) Atti della Acc. Pontif. dei Nuovi Lincei, XXXI, war mir leider nicht zugänglich.
2) Crelle LXXX, S. 217, oder Jacobi's Werke II, S. 151.
3) Disqu. arithm., Art. 151.
4) Berl. Mon.-Ber. 1876, S. 272.

Dagegen ist Mancherlei einzuhalten. Die von Gauss in den Disqu. Arithm. versprochenen „Duas alias demonstrationes" sind nicht der vierte und sechste, wie Kronecker annimmt, sondern zwei Beweise, die gar nicht bei Lebzeiten Gauss' gedruckt worden sind. Sie befinden sich im Nachlass.[1]). Der eine ist der mitgetheilte siebente Beweis, der andere (der achte) ist diesem so ähnlich, dass er nicht als selbständiger Beweis aufgezählt worden ist. Gauss[2]) sagt selbst von dem siebenten Beweis: *„Haec igitur est tertia theorematis fundamentalis cap. IV completa demonstratio."* Weiter nennt er in der Anzeige seiner „Theorematis arith. dem. nov."[3]) den dritten Beweis (den ersten durch Reduction) den fünften Beweis, so dass die Reihenfolge sich so gestaltet:

1., 2., 7. (8.), 3., 4., 5., 6.

Wahrscheinlich hat Gauss den siebenten und achten Beweis nicht veröffentlicht, weil er die Fortsetzung der Disquisitiones beabsichtigte. Und in der That würde die Lehre von den Periodencongruenzen (Kreistheilung), auf die sich der siebente und achte Beweis stützt, einen Theil dieser Fortsetzung ausgemacht haben. So kam es, dass nach ziemlich 60 Jahren Lebesgue denselben Beweis, den schon Gauss kannte, von Neuem fand.[4])

Noch zu erwähnen ist die Priorität des Beweises von Cauchy gegenüber den Beweisen von Jacobi und Eisenstein. Alle drei Autoren sind selbständig zu ihren Beweisen gekommen, denn der Vorwurf Jacobi's[5]), Eisenstein[6]) habe seinen Beweis aus Jacobi's Vorlesungen entnommen, ist durch die Entgegnung Eisenstein's[7]) als widerlegt anzusehen.

Zum ersten Male ist der Beweis von Cauchy-Jacobi-Eisenstein 1829 im Septemberheft des Bulletin de Férussac (math. Abth.) abgedruckt. Jacobi hat seine Arbeit Legendre mitgetheilt, der sie in die 1830 erschienene dritte Auflage seiner Théorie des nombres aufgenommen hat. Legendre sagt von diesem Jacobi'schen Beweise[8]): *„C'est la plus simple entre toutes les démonstrations connues de cette proposition fondamentale."* Im Uebrigen erwähnt Legendre Jacobi auch nicht.

Schauen wir nochmals auf unsere Beweise zurück, so sehen wir, liegen die Principien derselben keimend schon in den Gauss'schen Beweisen. Es muss unsere höchste Bewunderung erregen, wenn wir uns vergegen-

---

1) Gauss' Werke II, S. 233.
2) Gauss' Werke II, S. 234.
3) Gauss' Werke II, S. 151.
4) Aus dem Vorstehenden geht auch hervor, warum gewisse Beweise in der Tabelle S. 274 keine Nummern haben.
5) Crelle J. XXX, S. 172.
6) Crelle J. XXVIII, S. 41.
7) Crelle J. XXXV.
8) Table des matières, S. XIII.

wärtigen, was Gauss in 20 Jahren in der Arithmetik allein geleistet hat. Die verschiedensten Gebiete der Mathematik sehen wir durch ihn verbunden: Ungeahnte Wege, man denke nur an die Kreistheilung, hat er auf diesem Felde aufgefunden, gebahnt und geebnet; Brücken über Abgründe geschlagen, welche verschiedene mathematische Disciplinen so schroff trennten, dass vor ihm Niemand an eine Verbindung der getrennten Theile denken mochte, noch konnte. Und der unermüdliche Pionier fand treffliche Nachfolger. Zunächst wurde sein sechster, der Zeit nach letzter Beweis fast zu gleicher Zeit von Cauchy, Jacobi und Eisenstein vereinfacht. 50 Jahre kaum nach dem Erscheinen des ersten Beweises war auch der dritte und fünfte Beweis in eleganter geometrischer Fassung dem Publikum vorgelegt, war das Princip der Kreistheilung in eine andere Form gegossen und hatte das Princip der Reduction eine bedeutende functionentheoretische Erweiterung erfahren, so dass das quadratische, cubische und biquadratische Gesetz aus einer Quelle floss. Dies alles that einer, Eisenstein. — 1847 zeigte Liouville die Verwandtschaft der Beweise durch Reduction und Kreistheilung; in demselben Jahre fand Lebesgue einen dem Eisenstein'schen ähnlichen Beweis durch Kreistheilung, 10 Jahre später den unbekannten siebenten Gauss'schen Beweis. 1852 machte Genocchi das Legendre'sche Symbol (von Jacobi mittlerweile bedeutend verallgemeinert) abhängig von der Differenz der Vorzeichen gewisser algebraischer Summen.

Bis jetzt hatten die Mathematiker, mit Ausnahme Eisenstein's, nur den Beweis für die quadratische Reciprocitätsformel erbracht. Da veröffentlichte Kummer 1861 zwei Beweise des quadratischen Gesetzes, die sich verallgemeinern liessen für $n^{\text{te}}$ Potenzreste. Mit Hilfe der Theorie der Formen gelang die grosse That. Kummer's Arbeit bedeutet einen Markstein in der Entwickelung der Zahlentheorie.

Eine zehnjährige Pause trat ein: das Interesse an dem Reciprocitätsgesetz schien erkaltet zu sein; da kam in den siebziger Jahren ein grosser Aufschwung. Sieben Beweise sind in dieser Schrift mitgetheilt, die in einem Jahrzehnt (von 1870—1880) entstanden sind. Merkwürdigerweise liegt sämmtlichen sieben Beweisen das Princip der Reduction zu Grunde. Wollte man vielleicht ans diesem das allgemeine Gesetz herleiten? Stern geht auf den fünften Gauss'schen Beweis zurück und findet eine wichtige Verwandtschaft zwischen den Gliedern der halben Restsysteme $a_k p \bmod q$, $b_h q \bmod p$ $\left(k=1, \dots \frac{q-1}{2},\ h=1, \dots \frac{p-1}{2}\right)$. Zeller und Petersen vervollständigten diese Darlegungen. Bouniakowsky findet eine merkwürdige Zerlegung der Zahl $\mu$ resp. $\nu$. Schering weist nach, dass das $\mu$ in leicht angebbarer Weise von den Vorzeichen gewisser algebraischer Ausdrücke abhängt, die ähnlich denen Genocchi's gebaut sind. Kronecker, der schon 1876 die Vertauschbarkeit des Princips der Induction mit dem der

Reduction gelehrt hatte, stellte das Symbol $\left(\frac{p}{q}\right)$ als das Vorzeichen eines Productes dar, dessen Factoren Genocchi-Schering'sche Ausdrücke sind, und zeigt auch ferner, wie Gauss'sche Betrachtungen über Grössen $[a]$, von denen der dritte Gauss'sche Beweis abhängt, zu der höchst eleganten Formel

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \text{Vorz.} \prod \left(\frac{h}{p} - \frac{k}{q}\right) \quad \left[h = 1, \ldots \frac{p-1}{2}, \quad k = 1, \ldots \frac{q-1}{2}\right]$$

leiten. Voigt benutzte die Methode des dritten Gauss'schen Beweises, macht aber den Beweis des Reciprocitätsgesetzes abhängig von der Anzahl der Zahlen $h$ in:

$$kp = hq + r, \quad r > \frac{q}{2}$$

bei vorgegebenem $k$. Busche endlich vereinfachte den Bouniakowsky-schen Beweis durch Anwendung eines sehr eleganten Hilfssatzes, nach welchem das Reciprocitätsgesetz allgemein gilt, wenn es für specielle Fälle sich erweisen lässt.

Zum Schlusse sei nochmals erwähnt, dass es Cauchy gelang, das aus der „Summatio“ her berühmte Vorzeichen von $\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}$ aus der Transformation von Thetareihen herzuleiten.

# Recensionen.

## Bemerkungen zur Recension des Herrn Professor Kurz

über folgende Schriften:

WEYRAUCH, **Theorie elastischer Körper,** 1884;
—, **Aufgaben zur Theorie elastischer Körper,** 1885;
—, **Das Princip von der Erhaltung der Energie seit Robert Meyer,** 1885.

Herr Kurz beginnt mit der Behauptung, ich habe mich mit seiner Absicht, die Besprechung der „Theorie" bis zum Erscheinen der „Aufgaben" zu verschieben, brieflich einverstanden erklärt. Da hierbei zu meiner Ueberraschung auf eine vom Recensenten eingeleitete Privatcorrespondenz Bezug genommen ist, so wird auch mir gestattet sein, bei Richtigstellung des Sachverhalts davon Gebrauch zu machen. Herr Professor Kurz schrieb mir am 17. December 1884:

> „Wie ich mit Freuden die Frage des Herrn Professors Cantor bejahte, ob ich eine Besprechung Ihrer Theorie elastischer Körper übernehmen wollte, so wuchsen die Sorgen beim Durchlesen derselben, ob ich der übernommenen Aufgabe gewachsen sei. Ich hatte anfänglich geglaubt, im August, den ich grösstentheils hier (in Augsburg) verbrachte, die Durchlesung vollenden zu können; aber erst im October und bis jetzt habe ich dieselbe nothdürftig neben meinen anderen Obliegenheiten zu Ende gebracht, wobei mich auch noch eine diphtheritische Anwandlung unterbrach.
>
> So fasste ich denn seit einiger Zeit den Entschluss, Sie um einige Notizen und Winke angehen zu wollen über diejenigen Punkte, welche Sie zu einer gerechten Würdigung Ihres Buches als besonders gehörig betrachten, und glaube, dass ich mit solcher Unterstützung bis Neujahr meiner Aufgabe mich entledigen könnte, so dass die Besprechung noch im ersten Hefte des nächsten Jahres erschiene."

Ich beschränkte meine Antwort auf einige (in der Recension zum Theil wiedergegebene) allgemeine Bemerkungen über fragliche Arbeit, wies auf die bereits erschienenen Recensionen hin und stellte meinerseits Herrn Kurz anheim, die Besprechung bis zum Erscheinen der Aufgaben hinauszuschieben. Von dieser Anheimgabe hat Herr Professor Kurz laut Schreiben vom 24. December 1884 Gebrauch gemacht.

Bezüglich der Schwierigkeit des Studiums will ich mit dem Recensenten nicht streiten, über solche Dinge pflegen die Meinungen verschieden zu sein.

Im Gegensatze zu Herrn Kurz findet Herr Professor Günther-Ansbach, dass mässige Kenntnisse in der Infinitesimalrechnung zum Verständnisse hinreichen. Uebrigens giebt Herr Kurz zu, dass die „Theorie“ dem Studium weniger Schwierigkeiten als andere Werke ähnlicher Art bereite.

Die Bemerkung des Recensenten, dass in § 1 die bekannte Beschleunigung „specifische Massenkraft“ genannt sei, ist unrichtig. Herr Kurz hat übersehen, dass auch Oberflächenkräfte Beschleunigungen erzeugen können (vergl. Grashof's Hydraulik, 1874, S. 4; Kirchhoff's Mechanik, 1877, Vorlesung 11; Weyrauch's Theorie elastischer Körper, 1884, S. 4, 25 u. s. w.).

Herr Professor Kurz bemerkt ferner, dass in § 2 „der elastischen Nachwirkung mit acht Zeilen gedacht sei“. Bekanntlich hat jener Begriff bei der allgemeinen Behandlung elastischer Körper vorläufig überhaupt noch keine Verwendung gefunden (vergl. die einschlagenden Werke von Lamé, Beer, Clebsch, Saint-Venant, Grashof, Winkler, Kirchhoff, Klein, Castigliano u. s. w.), so dass auch die acht Zeilen noch fehlen konnten.

In § 5 soll „schon Manches dem mündlichen Unterricht oder sonst zuviel dem Privatverständnisse des Studenten (im dritten Semester) überlassen“ sein. Hierzu sei bemerkt, dass die Theorie weder in erster Linie für Studenten, noch gar für solche im dritten Semester bestimmt ist. Das Wesentliche liegt in dem der Sache oder Darstellung nach Neuen, wie andere Recensionen (von Grashof, Ritter, Wittmann) auch anerkannt haben. Wäre übrigens selbst bezüglich der Studenten im dritten Semester die Bemerkung des Herrn Kurz richtig, was ich bestreite, so würde sie dadurch an Gewicht verlieren, dass die in § 5 behandelten „Drehungen“ neben den „Gleitungen“ vollständig entbehrlich sind und thatsächlich in obigen Schriften keine Verwendung gefunden haben.

Die Besprechung der „Aufgaben“ beschränkt sich auf einige Bemerkungen zum Inhaltsverzeichnisse. Wenn es dabei heisst, dass zu jeder Aufgabe die Nummer des Paragraphen angegeben sei, welcher zur Lösung nachgeschlagen werden soll, so ist das wieder nicht ganz richtig. Ich habe nur angeführt, nach welchem Paragraphen die betreffende Aufgabe eingeschaltet gedacht war, ohne dass die gegebene Reihenfolge eingehalten zu werden braucht.

Was Herr Professor Kurz schliesslich in Bezug auf die dritte obiger Schriften aussagt, beruht auf einer Verwechselung. Ich soll nach Robert Mayer Fallkraft, Bewegung (!), Wärme (!), Magnetismus etc. als Kraftformen aufführen, wogegen Herr Kurz, welcher vorstehende Ausrufungszeichen anbringt, Kraft nur als Masse mal Beschleunigung gelten lassen will. In Wahrheit handelt es sich an der betreffenden Stelle um eine Inhaltsangabe von Schriften Robert Mayer's, welche noch dazu durch folgende Worte eingeleitet ist: „Will man die Frage (nach der Priorität Mayer's)

prüfen, so ist zu beachten, dass Mayer mit Anderen Kraft nennt, was man heute, einen Ausdruck Thomas Young's adoptirend, als Energie bezeichnet." Da im ganzen übrigen Verlaufe der Schrift (ausserhalb II) der Mayer'sche und Helmholtz'sche „Begriff Kraft" Energie oder Arbeitsfähigkeit genannt ist, so erscheint kaum begreiflich, wie die Verwechselung bestehen bleiben konnte.

Der Unterzeichnete bedauert, die Geduld der Leser etwas lange in Anspruch genommen zu haben. Allein es konnte ihm nicht gleichgiltig sein, an hervorragender Stelle über drei seiner Schriften, welche das Resultat anstrengender Arbeit bilden, ohne jedes Eingehen auf den wesentlichen Inhalt in einer Weise abgeurtheilt zu sehen, welche mindestens der nöthigen Vorsicht ermangelte.

Stuttgart, August 1885. J. J. WEYRAUCH.

---

**Bibliotheca mathematica,** herausgegeben von GUSTAF ENESTRÖM. 1884. Stockholm, F. & G. Beyer. Berlin, Mayer & Müller. Paris, A. Hermann.

Eine neue Zeitschrift, welche in vierteljährlichen Heften erscheint und deren erster Jahrgang 62 je zweispaltige Seiten umfasst. Die Zeitschrift ersetzt alles Das, was wir durch unsere jedem Hefte dieser Zeitschrift beigegebenen Bibliographien und durch unsere beiden alljährlich erscheinenden Abhandlungsregister unseren Lesern zu bieten wünschen. Ein wesentlicher Unterschied besteht nur darin, dass Herr Eneström Bücher und Abhandlungen gemischt, und zwar nach der alphabetischen Reihenfolge der Namen der Verfasser angiebt. Ausserdem findet sich in jedem Hefte eine recht dankenswerthe geschichtliche Notiz aus der Feder des Herausgebers: 1. Notice sur un mémoire de Chr. Goldbach, relatif à la sommation des séries, publié à Stockholm en 1718; 2. Notice sur un nouvelle édition de Diofantos, préparée par M. Paul Tannery; 3. Notice sur les versions latines des éléments d'Euclide, publiées en Suède; 4. Notice sur les premières tables de logarithmes publiées en Suède.

CANTOR.

---

**Saggio di Tavole dei logaritmi quadratici** del Conte ANTONINO DI PRAMPERO. Udine 1885, G. B. Doretti e Soci. IX, 53 pag.

Unter dem quadratischen Logarithmus der absoluten Zahl $N$, oder unter $L_q.N=x$ versteht Herr Prampero diejenige Zahl, welche der Gleichung $N=(a)^{2^x}$ genügt, wo $a>1$ aber sonst beliebig gewählt wird. Soll nun die $E^{\text{te}}$ Potenz oder die $E^{\text{te}}$ Wurzel aus $N$ gesucht werden, so ist offenbar im ersteren Falle $N^E=a^{E.2^x}$, und sofern $E=2^y$ $\left(\text{oder } y=\frac{\log E}{\log 2}\right)$, ist

auch $N^E = (\alpha)^{2^y \cdot 2^x} = (\alpha)^{2^{x+y}}$ oder $L_q.(N^E) = x + y = L_q.N + \frac{\log E}{\log 2}$. Im zweiten Falle ist $\sqrt[E]{N} = \alpha^{\frac{1}{E} \cdot 2^x} = (\alpha)^{2^{-y} \cdot 2^x} = (\alpha)^{2^{x-y}}$ oder $L_q.(\sqrt[E]{N}) = x - y = L_q.N - \frac{\log E}{\log 2}$. Man hat also nur den von der Zahl $E$ abhängigen Quotienten $\frac{\log E}{\log 2}$ zu berechnen, um zu jeder Zahl $N$ sowohl $L_q.N^E$ als $L_q.\sqrt[E]{N}$ durch eine einfache Addition beziehungsweise Subtraction zu erhalten. Bei $E = 2$ ist jener Quotient offenbar 1, bei $E = 3$ ist er 1,584962, bei $E = 4$ ist er 2 u. s. w. Mithin $L_q.(N^2) = L_q.N + 1$, $L_q.(\sqrt{N}) = L_q.N - 1$; $L_q.(N^3) = L_q.N + 1{,}584962$, $L_q.(\sqrt[3]{N}) = L_q.N - 1{,}584962$ u. s. w. Lohnt dieser Vortheil die Berechnung einer Tabelle der quadratischen Logarithmen, mittels deren man, unter Anwendung der nöthigen Interpolationen, zu jeder Zahl den quadratischen Logarithmus, zu jedem quadratischen Logarithmus die zugehörige Zahl finden kann? Der Verfasser hat diese Frage offenbar bejaht und derartige Tafeln hergestellt, welche in höchst eleganter Ausstattung durch den Druck vervielfältigt wurden.

CANTOR.

---

# Bibliographie

vom 1. September bis 31. October 1885.

---

### Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Classe der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften. Jahrgang 1885, 3. Heft. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, mathemat.-naturwissenschaftl. Classe, Abtheil. II. 91. Bd., 3. Heft. Wien, Gerold. 10 Mk.

Publicationen des astrophysikalischen Observatoriums in Potsdam. Nr. 16. Leipzig, Engelmann. 4 Mk.

——, 4. Bd. 1. Thl., herausgeg. von C. VOGEL. Ebendas. 17 Mk.

Jahrbücher der königl. ungar. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus, herausgeg. von G. SCHENZL. 13. Bd. Jahrg. 1883. Budapest, Kilian. 10 Mk.

Beobachtungen im astrophysikalischen Observatorium zu O-Gyalla, herausgeg. von N. v. KONKOLY. 7. Bd. Jahrg. 1884. Halle, Schmidt. 10 Mk.

Journal für reine und angewandte Mathematik. (Crelle.) Herausgeg. von L. Kronecker und K. Weierstrass. 99. Bd. 1. Heft. Berlin, G. Reimer. compl. 12 Mk.

Acta mathematica, herausgegeben von Mittag-Leffler. 7. Bd. 1. Heft. Berlin, Mayer & Müller. compl. 12 Mk.

Tageblatt der 58. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in Strassburg. 1885. Strassburg, Trübner. 8 Mk.

## Geschichte der Mathematik und Physik.

Marie, M., Histoire des sciences mathématiques et physiques. Vol. VII. Paris, Gauthier-Villars. 6 fr.

## Reine Mathematik.

Prym, F., Neue Theorie der ultraelliptischen Functionen. 2. Ausg. Berlin, Mayer & Müller. 3 Mk. 60 Pf.

Hermite, Ch., Sur quelques applications des fonctions elliptiques. Paris, Gauthier-Villars. 7 fr. 50 c.

Beau, O., Analytische Untersuchungen über trigonometrische Reihen und Fourier'sche Integrale. 2. Aufl. Halle, Nebert. 5 Mk. 50 Pf.

Cauchy, A., Algebraische Analysis, deutsch herausgegeben von Itzigsohn. Berlin, Springer. 9 Mk.

Gegenbauer, L., Zur Theorie der Determinanten höheren Ranges. (Akad.) Wien, Gerold. 60 Pf.

——, Zur Theorie der aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten complexen Zahlen. Ebendas. 1 Mk. 70 Pf.

——, Ueber die Darstellung der ganzen Zahlen durch binäre quadratische Formen mit negativer Discriminante. Ebendas. 50 Pf.

Geigenmüller, R., Elemente der höheren Mathematik. II, Differentialrechnung. Mittweida, polytechn. Buchhdlg. 2 Mk.

Mertens, F., Einfache Bestimmung des Potentials eines homogenen Ellipsoids. (Akad.) Wien, Gerold. 15 Pf.

Herz, N., Entwickelung der Differentialquotienten der geocentrischen Coordinaten nach zwei geocentrischen Distanzen in elliptischer Bahn. Ebendas. 60 Pf.

Schubert, H., System der Arithmetik u. Algebra. Potsdam, Stein. 1 Mk. 80 Pf.

Funcke, H., Die analytische und die projectivische Geometrie der Ebene. Ebendas. 1 Mk. 40 Pf.

Spieker, Th., Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Ebendas. 1 Mk. 40 Pf.

Pelz, C., Bemerkung zur Axenbestimmung der Kegelflächen zweiten Grades. (Akad.) Wien, Gerold. 60 Pf.

Killing, W., Die Nicht-Euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung. Leipzig, Teubner. 6 Mk. 80 Pf.

## Angewandte Mathematik.

FINGER, J., Elemente der reinen Mechanik. 5. Lief. Wien, Hölder. 3 Mk. 20 Pf.

OPPENHEIM, S., Ueber die Rotation und Präcession eines flüssigen Sphäroids. (Akad.) Wien, Gerold. 50 Pf.

KUTTER, W., Die Bewegung des Wassers in Kanälen und Flüssen. Berlin, Parey. 7 Mk.

JORDAN, W., Grundzüge der astronomischen Zeit- und Ortsbestimmung. Berlin, Springer. 10 Mk.

HERZ, N., Bahnbestimmung des Planeten Kriemhild (242). (Akad.) Wien, Gerold. 35 Pf.

OPPENHEIM, S., Bahnbestimmung des Kometen VIII, 1881. Ebendas. 50 Pf.

BREDICHIN, TH., Révision des valeurs numériques de la force répulsive. Leipzig, Voss. 1 Mk. 20 Pf.

STRUVE, O., Tabulae quantitatum Besselianarum pro annis 1885 ad 1889 computatae. Ebendas. 2 Mk.

## Physik und Meteorologie.

KETTELER, E., Theoretische Optik, gegründet auf das Bessel-Sellmeier'sche Princip. Braunschweig, Vieweg. 14 Mk.

HEPPERGER, J. v., Ueber Krümmungsvermögen und Dispersion von Prismen. (Akad.) Wien, Gerold. 80 Pf.

MACH, E. u. J. ARBES. Einige Versuche über totale Reflexion und anomale Dispersion. Ebendas. 30 Pf.

CHEVALLIER et MÜNTZ, Problèmes de physique. Paris, Gauthier-Villars. 6 fr.

# Mathematisches Abhandlungsregister.

## 1884.

### Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December.

## A.

**Abbildung.**

499. Geometrische Construction der Abbildung des Kreisringes auf ein Rechteck. E. Study. Crelle XCVII, 13.
500. On the orthomorphosis of the circle into the parabola. Cayley. Quart. Journ. math. XX, 213.

**Abel'sche Transcendenten.**

501. Sur la théorie des intégrales abéliennes. E. Goursat. Compt. rend. XCVII, 1281.
502. Ueber die Reduction einer bestimmten Classe Abel'scher Integrale 3. Ranges auf elliptische Integrale. S. Kowalevski. Acta math. IV, 393.

**Akustik.**

503. Ueber Lissajou'sche Curven. Himstedt. Grun. Archiv LXX, 337.

**Analytische Geometrie der Ebene.**

504. Coordonnées parallèles et coordonnées axiales. M. d'Ocagne. N. ann. math. XLIII, 410, 456, 516, 545.
505. Sur un mode de détermination des courbes planes. M. d'Ocagne. N. ann. math. XLII, 189; XLIII, 49. [Vergl. Bd. XXVIII, Nr. 419.]
506. Sur un système particulier de coordonnées curvilignes. E. Habich. N. ann. math. XLIII, 353.
507. Emploi, dans la géométrie trilinéaire, des coordonnées des points circulaires. H. Faure. N. ann. math. XLIII, 140.
508. Ueber ein Curvographon. E. Pirani. Grun. Archiv LXXI, 113.
509. Beziehung zweier Geraden in der Ebene auf einander. E. Hain. Grun. Archiv LXXI, 94.
510. Zur Polaritätstheorie des Dreiseits. E. Hain. Grun. Archiv LXXI, 220.
511. Eigenschaften der Punkte mit reciproken Dreieckscoordinaten und deren Anwendung auf das Dreieck. M. Greiner. Grun. Archiv LXXI, 130.
512. Die $n$- und $n+1$-Theilung des Winkels und Kreises. A. van der Grinten. Grun. Archiv LXX, 393.
513. Die Sectionscurven. E. Oekinghaus. Grun. Archiv LXXI, 87.
514. Trouver les trajectoires orthogonales d'une droite de longueur constante entre deux axes rectangulaires. E. Fauquembergue. N. ann. math. XLIII, 438.
515. Engendrement de deux courbes parallèles. M. d'Ocagne. N. ann. math. XLII, 425.
516. Ueber eine gewisse Curve des dritten Grades. O. Hermes. Crelle XCVII, 177.
517. Eigenschaften der Lemniskate und ihre Anwendung auf kubische Gleichungen, parabolische Bewegungen und bipolare Anziehungen. E. Oekinghaus. Grun Archiv LXX, 113.
518. Propriétés d'une courbe de poursuite. E. Césaro. N. ann. math. XLII, 85.
519. Quelques propriétés d'une classe de courbes spirales. Laquière. N. ann. math. XLII, 118.

Vergl. Akustik. Ellipse. Hyperbel. Kegelschnitte. Kreis. Parabel.

**Analytische Geometrie des Raumes.**

520. Eine Curve aus einer Beziehung zwischen den Winkeln, welche die Tangente, Hauptnormale und Binormale mit festen Geraden bilden, zu bestimmen. R. Hoppe. Grun. Archiv LXXI, 46.
521. Théorème sur les surfaces développables. E. Cesaro. N. ann. math. XLII, 129, 266.
522. Sur l'angle des lits oblique et normal de la vis Saint-Gilles. E. Lebon. N. ann. math. XLIII, 40.

Vergl. Ellipsoid. Hyperboloid. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung. Paraboloid.

**Astronomie.**

523. Neue Methode zur Berechnung der Excentricität bei astronomischen Instrumenten und Uhren. F. C. Lukas. Grun. Archiv LXX, 268.
524. Sur une démonstration nouvelle du théorème de Lambert. N. Joukovsky. N. ann. math. XLIII, 90. — E. Catalan ibid. 506.
525. Sur une formule de Hansen. F. Tisserand. Compt. rend. XCVII, 815, 880. — P. Appell ibid. 1036. — R. Radau ibid 1130, 1275. — O. Callandreau ibid. 1187.
526. Sur le calcul des perturbations. A. de Gasparis. Compt. rend. XCVII, 738.
527. Sur un développement particulier de la fonction perturbatrice. O. Backlund. Compt. rend. XCVII, 1470. — R. Radau ibid. 1548.
528. Sur quelques méthodes pour la détermination des positions des étoiles circompolaires. O. Callandreau. Compt. rend. XCVII, 561.
529. Distance de la terre à la lune. C. Bertrand. N. ann. math. XLIII, 126.
530. Étant données les durées des quatre saisons de l'année astronomique, trouver l'excentricité de l'orbite de la terre. E. Fauquembergue. N. ann. math. XLII, 413.

Vergl. Chronologie. Mechanik 771, 772.

## B.

**Bernoulli'sche Zahlen.**

531. Beiträge zu der Kenntniss der Bernoulli'schen Zahlen. A. Lipschitz. Crelle XCVI, 1.

Vergl. Reihen 852.

**Bestimmte Integrale.**

532. Démonstration du théorème de Cauchy. E. Goursat. Acta math. IV, 197.
533. Sur une méthode capable de fournir une valeur approchée de l'intégrale $\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx$. G. Gourier. Compt. rend. XCVII, 79.
534. Sur une valeur approchée de l'intégrale $\int\limits_{0}^{\infty} \varphi(x).e^{-x}.dx$. R. Radau. Compt. rend. XCVII, 157.
535. Sur l'évaluation approchée des intégrales. Stieltjes. Compt. rend. XCVII, 740, 798.
536. Sur une classe d'intégrales doubles. E. Goursat. Acta math. V, 97. [Vergl. Nr. 48.]

Vergl. Gammafunctionen.

## C.

**Chronologie.**

537. Changements produits sur la durée de l'année julienne par les variations des quantités dont dépend cette durée. A. Gaillot. Compt. rend. XCVII, 151, 564. — E. J. Stone ibid. 484.

Vergl. Astronomie 530.

**Combinatorik.**

538. Die Umkehrung des Grundgedankens von Hindenburg's combinatorischer Analysis. F. Roth. Grun. Archiv LXX, 427.
539. Sur les permutations de $n$ objets et sur leur classement. J. Bourget. N. ann. math. XLII, 433.
540. Sur le nombre des permutations de $n$ éléments qui présentent $s$ séquences. Dés. André. Compt. rend. XCVII, 1356.
541. Eine combinatorische Definition der Zahl $e$. Th. Sanio. Grun. Archiv LXX, 224; LXXI, 105. — Lampe ibid. LXX, 439. — P. Seelhoff ibid. LXXI, 97, 102. — J. Hermes ibid. LXXI, 103.

Vergl. Differentialquotient 564. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

**Cylinderfunctionen.**

542. Bessel's functions of the second order. C. V. Coates. Quart. Journ. math. XX, 250.

## D.

**Determinanten.**

543. Généralisation du théorème de Jacobi sur les déterminants partiels du système adjoint. Em. Barbier. Compt. rend. XCVII, 82. [Vergl. Nr. 64.]

**Differentialgleichungen.**

544. Ueber Projectivität und partielle Differentialgleichungen in der Geometrie. Th. Sanio. Grun. Archiv LXXI, 225.
545. Sur les multiplicateurs des équations différentielles linéaires. Halphen. Compt. rend. XCVII, 1408, 1541.
546. Sur un moyen de déterminer le facteur d'intégrabilité. W. Maximovitch. Compt. rend. XCVII, 1544.
547. Ueber die Irreductibilität der linearen Differentialgleichungen. L. Königsberger. Crelle XCVI, 123.
548. Uebersicht über die Thomé'schen Abhandlungen über lineare Differentialgleichungen in Crelle LXXIV bis XCV. L. W. Thomé. Crelle XCVI, 185.
549. Sur l'intégration algébrique des équations linéaires. H. Poincaré. Compt. rend. XCVII, 984, 1189.
550. Sur certaines équations différentielles linéaires. A. Steen. Acta math. III, 277.
551. Sur un cas particulier de résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants. M. d'Ocagne. N. ann. math. XLIII, 138.
552. Sur une classe d'équations linéaires du quatrième ordre. E. Goursat. Compt. rend. XCVII, 31.
553. Sur quelques équations linéaires du quatrième ordre. Halphen. Compt. rend. XCVII, 247.
554. On differential equations which belong to the class $\frac{dx}{(U_x)^{\frac{2}{n}}}+\frac{dy}{(U_y)^{\frac{2}{n}}}+\ldots=0$, where $U_x\equiv(a,b,c,d,e,\ldots)(x,1)^n$. R. Russell. Quart. Journ. math. XX, 179.
555. On the differential equation $\frac{dx}{\sqrt{U_x}}+\frac{dy}{\sqrt{U_y}}+\frac{dz}{\sqrt{U_z}}+\frac{dw}{\sqrt{U_w}}=0$, where $U_x=(a,b,c,d,e)(x,-1)^4$. R. Russell. Quart. Journ. math. XX, 265.
556. Sur une équation différentielle du second ordre. De Sparre. Acta math. III, 105, 289.
557. Intégrer l'équation $x(1-x)y''-(1-2x)y'+(1-3x+x^2)y=-x^2(1-x)^2$. F. Borletti. N. ann. math. XLII, 426.
558. Integration von $y^{IV}=xy'-y$. S. Spitzer. Grun. Archiv LXXI, 90.
559. De l'intégration d'une classe de systèmes d'équations simultanées, linéaires et du premier ordre. Ibach. N. ann. math. XLIII, 172. — P. Tardy ibid. 257. — J. Juhel-Rénoy ibid. 262. — E. Catalan ibid. 263.
560. Sur une transformation des équations aux dérivées partielles du second ordre, à deux variables indépendantes, et sur quelques intégrations qui s'en déduisent. R. Liouville. Compt. rend. XCVII, 836, 1122.
561. Sur l'intégration d'une certaine classe d'équations différentielles partielles du second ordre à deux variables indépendantes. A. Picart. Compt. rend. XCVII, 305.
562. Integration einiger partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung. J. Vályi. Grun. Archiv LXX, 219; LXXI, 109.
563. Sur les équations linéaires aux dérivées partielles, à deux variables indépendantes, du deuxième et du troisième ordre. A. Picart. N. ann. math. XLII. 34.

Vergl. Functionen. Invariantentheorie 711. Potential.

**Differentialquotienten.**

564. Grundzüge zu einer combinatorischen Darstellung der höheren Differentialquotienten zusammengesetzter Functionen. J. Vollers. Grun. Archiv LXXI, 64.
565. Sur le calcul des dérivées à indices quelconques. H. Laurent. N. ann. math. XLIII, 240.

Vergl Taylor's Reihe.

## E.

### Elasticität.



### Elektricität.



### Elimination.



### Ellipse.

592. Propriété de l'ellipse accompagnée de sa développée. J. Chambon. N. ann. math. XLII, 477.
593. Sur deux ellipses concentriques. Lez. N. ann. math. XLII, 325.
Vergl. Hyperbel 702, 703.

**Ellipsoid.**

594. On donne un ellipsoïde et un point $A$, on mène par ce point une sécante variable $D$; soit $D_1$ la droite conjuguée de $D$ par rapport à l'ellipsoïde. Trouver le lieu de la projection $M$ du point $A$ sur la droite $D_1$. Moret-Blanc. N. ann. math. XLII, 376.
595. Problème sur l'ellipsoide. Ch. Brisse. N. ann. math. XLIII, 323.

**Elliptische Transcendenten.**

596. Complex multiplication of elliptic functions. G. H. Stuart. Quart. Journ. math. XX, 18, 221.
597. Sur la transformation des fonctions elliptiques. M. Krause. Acta math. III, 93.
598. Sur un point de la théorie des fonctions elliptiques. R. Lipschitz. Compt. rend. XCVII, 1411. — Hermite ibid. 1414.
599. On the quantities $K, E, J, G, K', E', J', G'$ in elliptic functions. J. W. L. Glaisher. Quart. Journ. math. XX, 313.
600. Elliptische Integralfunctionen und ihre geometrische, analytische und dynamische Bedeutung. E. Oekinghaus. Grun. Archiv LXXI, 337.
601. Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen. H. Schroeter. Acta math. V, 205.
602. Beiträge zur Anwendung der Dreitheilung der elliptischen Functionen auf die Theorie der Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung. L. Heinze. Grun. Archiv LXX, 1.
603. Sur l'usage des produits infinis dans la théorie des fonctions elliptiques. Ch. Hermite. Acta math. IV, 193. — R. Lipschitz ibid. 194.
Vergl. Abel'sche Transcendenten 502. Sphärik 865. Zahlentheorie 904.

## F.

**Factorenfolge.**

604. Darstellung der Zahl $e$ als unendliches Product. J. Hermes. Grun. Archiv LXXI, 103.
605. Démonstration élémentaire de la formule de Stirling. E. Cesaro. N. ann. math. XLII, 43.
Vergl. Elliptische Transcendenten 603. Gammafunctionen 631, 632.

**Formen.**

606. Sur la formation des déterminants irréguliers. Jos. Perott. Crelle XCVI, 327. [Vergl. Nr. 145.]
607. Sur les formes binaires indéfinies à indéterminées conjuguées. E. Picard. Compt. rend. XCVII, 745.
608. Sur les formes quadratiques ternaires indéfinies à indéterminées conjuguées et sur les groupes discontinus correspondants. E. Picard. Compt. rend. XCVII, 845.
609. Sur la réproduction des formes. H. Poincaré. Compt. rend. XCVII, 949.
Vergl. Invariantentheorie.

**Functionen.**

610. Ueber Tiefgrössen mit gebrochenem Index. P. Lindner. Grun. Archiv LXX, 96.
611. Ueber die einer beliebigen Differentialgleichung erster Ordnung angehörigen selbstständigen Transcendenten. L. Königsberger. Acta math. III, 1.
612. Ueber die Grundlagen der Theorie der Jacobi'schen Functionen. G. Frobenius. Crelle XCVII, 16, 188.
613. Allgemeine Untersuchungen über Rectification der Curven. L. Scheeffer. Acta math. V, 49.
614. Zur Theorie der stetigen Functionen einer reellen Veränderlichen. L. Scheeffer. Acta math. V, 183, 279.
615. Beweis und Erweiterung eines algebraisch-functionentheoretischen Satzes des Herrn Weierstrass. M. Nöther. Crelle XCVII, 224.
616. Ueber den Zusammenhang der Werthe einer algebraischen Function. C. Runge. Crelle XCVII, 337.
617. Démonstration nouvelle du théorème de Laurent. G. Mittag-Leffler. Acta math. IV, 80.

618. Beweis des Laurent'schen Satzes. L. Scheeffer. Acta math. IV, 375.
619. Sur les groupes Kleinéens. H. Poincaré. Acta math. III, 49.
620. Sur les groupes des équations linéaires. H. Poincaré. Acta math. IV, 201.
621. Sur les fonctions zétafuchsiennes. H. Poincaré. Acta math. V, 209.
622. Sur les formes quadratiques ternaires indéfinies à indéterminées conjuguées et sur les fonctions hyperfuchsiennes correspondantes. Em. Picard. Acta math. V, 121. [Vergl. Bd. XXIX, Nr. 169.]
623. Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendante. G. Mittag-Leffler. Acta math. IV, 1.
624. Décomposition en éléments simples des fonctions doublement périodiques de troisième espèce. Appell. Compt. rend. XCVII, 1419.
625. Sur le genre d'une relation algébrique entre deux fonctions uniformes d'un point analytique $(x, y)$. E. Goursat. Compt. rend. XCVII, 1048.
626. Représentation des fonctions d'une ou de plusieurs variables, entre de certaines limites de ces variables, par des series. A. Picart. N. ann. math. XLII, 109.
627. Sur les fonctions de deux variables indépendantes, restant invariables par les substitutions d'un groupe discontinu. E. Picard. Compt. rend. XCVII, 1045.
628. Sur un théorème de Riemann relatif aux fonctions de $n$ variables indépendantes admettant $2n$ systèmes de périodes. H. Poincaré & E. Picard. Compt. rend. XCVII, 1284.

Vergl. Abbildung. Abel'sche Transcendenten. Bernoulli'sche Zahlen. Bestimmte Integrale. Cylinderfunctionen. Differentialgleichungen. Differentialquotienten. Elliptische Transcendenten. Factorenfolge. Gammafunctionen. Integration (unbestimmte). Kettenbrüche. Potential. Quaternionen. Reihen. Rectification. Taylor's Reihe. Thetafunctionen. Ultraelliptische Transcendenten. Umkehrungsproblem. Variationsrechnung.

## G.

### Gammafunctionen.

629. Zur Theorie der Functionen $\Gamma(z)$, $P(z)$, $Q(z)$. L. Scheeffer. Crelle XCVII, 230.
630. Eine Verallgemeinerung der Gleichung $\Gamma(1+x).\Gamma(1-x)=\frac{\pi x}{\sin \pi x}$. H. Mellin. Acta math. III, 102.
631. Ueber gewisse durch die Gammafunction ausdrückbare unendliche Producte. H. Mellin. Acta math. III, 322.
632. $\left[\frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})}\right]^2 = 8.\frac{8}{9}.\frac{24}{25}.\frac{48}{49}.\frac{80}{81}\ldots$ L. B. N. ann. math. XLII, 429.

Vergl. Factorenfolge 605.

### Geodäsie.

633. Proposition sur une question de mécanique relative à la figure de la terre. E. Brassinne. Compt. rend. XCVII, 637. [Vergl. Nr. 693.]

### Geometrie (abzählende).

634. Sur les pentaèdres complets inscrits à une surface cubique. H. G. Zeuthen. Acta math. V, 203.
635. Einige Anzahlen für Kegelflächen. H. Krey. Acta math. V, 83.

### Geometrie (descriptive).

636. Sur la ponctuation. J. Caron. N. ann. math. XLII, 161.
637. Zur perspectivischen Projection. E. Hain. Grun. Archiv LXX, 281.
638. Beleuchtungsconstructionen für Flächen, deren zu einer Axe normale Schnitte ähnlich und ähnlichliegend sind, bei orthogonaler und bei perspectivischer Darstellung. J. Bazala. Grun. Archiv LXXI, 266.
639. Construction des points doubles en projection dans l'intersection de deux surfaces du second degré. L. Lefèvre. N. ann. math. XLIII, 5.
640. Construction des tangentes au point double de la section du tore par son plan tangent. Doucet. N. ann. math. XLIII, 430.

### Geometrie (höhere).

641. Theorie der trilinearen Verwandtschaft ebener Systeme. G. Hauck. Crelle XCVII, 261. [Vergl. Nr. 207.]
642. Mehrfache Collineation von zwei Dreiecken. J. Vályi. Grun. Archiv LXX, 105. — R. Hoppe ibid. 334.

643. Sur les anticaustiques par réflexion de la parabole, les rayons incidents étant parallèles. Laguerre. N. ann. math. XLII, 16.
644. Sur quelques propriétés des cycles. Laguerre. N. ann. math. XLII, 65.
645. Sur les courbes de directions de la troisième classe. Laguerre. N. ann. math. XLII, 97.
646. Sur la transformation par semi-droites réciproques. M. d'Ocagne. N. ann. math. XLII, 249.
647. Semi-droites réciproques parallèles a l'axe de transformation. M. d'Ocagne. N. ann. math. XLIII, 23.
648. Sur les quadrilatères qui ont leurs six sommets sur une cubique. Weill. N. ann. math. XLIII, 401.
649. Sur les cubiques gauches passant par sinq points donnés. G. Koenigs. N. ann. math. XLII, 301; XLIII, 47.
650. Sur quelques courbes enveloppes. Weill. N. ann. math. XLIII, 376.
651. Recherche d'une courbe plane possédant un lieu géométrique de poles principaux d'inversion. G. Fouret. N. ann. math. XLII, 259.
652. Sur un mode de génération des ovales de Descartes proposé par Chasles. M. d'Ocagne. Compt. rend. XCVII, 1424.
653. On plane curves of the fourth class with a triple and a single focus. H. M. Jeffery. Quart. Journ. math. XX, 273.
654. Das Strahlensystem vierter Ordnung zweiter Classe. W. Stahl. Crelle XCVII, 146.
655. Das allgemeine räumliche Nullsystem zweiten Grades. Ad. Ameseder. Crelle XCVII, 62.

Vergl. Differentialgleichungen 544. Elliptische Transcendenten 602. Gleichungen 680, 681. Kegelschnitte. Maxima und Minima. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung. Singularitäten.

**Geometrie (kinématische).**

656. Théorème de cinématique. E. Dewulf. N. ann. math. XLII, 297.
657. Sur une question de cinématique. L. Jacob. N. ann. math. XLIII, 29.
658. Sur l'enveloppe de certaines droites variables. M. d'Ocagne. N. ann. math. XLII, 252.
659. Dans quels cas certaines surfaces sont-elles développables? E. Cesaro. N. ann. math. XLIII, 434.

**Geometrie (der Lage).**

660. Zur Theorie der Raumcurven vierter Ordnung erster Art. Milinowski. Crelle XCVII, 277.
661. Beitrag zur Geometrie der Lage. L. Klug. Grun. Archiv LXX, 446.
662. Zwei Sätze über Linienschnitte. Fr. Hofmann. Grun. Archiv LXX, 443.

**Geschichte der Mathematik.**

663. Geschichte der Factorentafeln. P. Seelhoff. Grun. Archiv LXX, 413.
664. Mort de Mr. Maillard de la Gournerie † 25. Juin 1883. E. Blanchard. Compt. rend. XCVII, 5. — J. Bertrand ibid. 6.
665. Mort de Victor Puiseux † 9. Sept. 1883. E. Blanchard. Compt. rend. XCVII, 655. — J. Bertrand ibid. 655.
666. Mort de J. A. F. Plateau † 15. Sept. 1883. Faye. Compt. rend. XCVII, 687.
667. Mort de Louis Breguet † 26. Oct. 1883. E. Blanchard. Compt. rend. XCVII, 927. — Janssen ibid. 967. — Cloué ibid. 971.
668. Mort d'Yvon Villarceau † 23. Déc. 1883. E. Blanchard. Compt. rend. XCVII, 1453. — Perrier ibid. 1454. — Faye ibid. 1459. — Tisserand ibid. 1460.

**Gleichungen.**

669. Démonstration nouvelle du théorème fondamental de la théorie des équations algébriques. H. Dutordoir. Compt. rend. XCVII, 742.
670. Démonstration du théorème de d'Alembert. Walecki. N. ann. math. XLII, 241.
671. Sur le calcul des fonctions symétriques des racines d'une équation. Ch. Biehler. N. ann. math. XLIII, 218.
672. A new theorem in symmetric functions. P. A. Mac Mahon. Quart. Journ. math. XX, 365.
673. Note on Sylvester's canonical form of binary quantics of the degree $2n-1$. W. Booth. Quart. Journ. math. XX, 270.
674. On the trinomial unilateral quadratic equation in matrices of the second order. J. J. Sylvester. Quart. Journ. math. XX, 305.
675. Sur la règle des signes. H. Poincaré. Compt. rend. XCVII, 1418.

676. Sur la réduction des équations. A. E. Pellet. Compt. rend. XCVII, 85.
677. Sur la transformation des équations. Ch. Biehler. N. ann. math. XLIII, 209.
678. Problème sur les aiguilles du cadran d'une montre. Moret-Blanc. N. ann. math. XLII, 523. — C. A. Laisant ibid. XLIII, 383.
679. Quelques formules relatives à l'équation complète du troisième degré. C. Margerie. N. ann. math. XLIII, 32.
680. Geometrische Untersuchungen über kubische und höhere Curven und Gleichungen. E. Oekinghaus. Grun. Archiv LXX, 370.
681. Mechanisch-graphische Lösung der kubischen und biquadratischen Gleichungen. C. Bartl. Grun. Archiv LXXI, 1.
682. Sur le discriminant de l'équation du quatrième degré. Weill. N. ann. math. XLII, 265.
683. Trigonometrische Auflösung biquadratischer Gleichungen in geometrischer Darstellung. E. Oekinghaus. Grun. Archiv LXX, 133.
684. Équation aux carrés des différences de l'équation générale du quatrième degré. Forestier. N. ann. math. XLII, 209.
685. Décomposition d'un certain polynôme du quatrième degré en deux facteurs du second degré. N. Goffart. N. ann. math. XLIII, 442. — H. Plamenevsky ibid. 530.
686. Sur la substitution $x=\frac{\alpha y+\beta}{\gamma y+\delta}$ dans une équation de degré pair $2m$, pouvant se partager en $m$ groupes de deux racines $x_1$, $x_2$ satisfaisant à la relation $a x_1 x_2 + b(x_1+x_2)+c=0$. E. Fauquembergue. N. ann. math. XLIII, 386.
687. Sur quelques points de la théorie des équations numériques. E. Laguerre. Acta math. IV, 97.
688. Sur l'approximation des racines des équations algébriques. Laguerre. N. ann. math. XLIII, 113.
689. Calcul à $\frac{1}{10^n}$ près des racines incommensurables d'une équation numérique dont toutes les racines sont réelles. C. Margerie. N. ann. math. XLIII, 38.
690. Die Auflösung dreigliedriger Gleichungen nach Gauss. A. M. Nell. Grun. Archiv LXXI, 311.
691. Résolution de deux équations du 4e degré ayant deux racines communes. N. ann. math. XLIII, 348.
692. Ueber lineare Gleichungen. C. Prediger. Grun. Archiv LXX, 319.
Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 517. Elimination. Reihen 852.

## H.

### Hydrodynamik.

693. Application d'une proposition de mécanique à un problème relatif à la figure de la terre. E. Brassinne. Compt. rend. XCVII, 1137. [Vergl. Nr. 633.]
694. Recherches hydrodynamiques. C. A. Bjerknes. Acta math. IV, 121.
695. On hydro-kinetic symmetry. J. Larmor. Quart. Journ. math. XX, 261.
696. Des vitesses que prennent, dans l'intérieur d'un vase, les divers éléments d'un liquide pendant son écoulement par un orifice inférieur, et des moyens simples qui peuvent être employés pour déterminer très approximativement les restes numériques de séries doubles peu convergentes. De Saint-Venant & Flamant. Compt. rend. XCVII, 1027, 1105.
697. On the motion of spherical and ellipsoidal bodies in fluid media. K. Pearson. Quart. Journ. math. XX, 60, 184.
698. On the motion of a liquid in and about certain quartic and other cylinders. A. B. Basset. Quart. Journ. math. XX, 234.

### Hyperbel.

699. Propriétés de l'hyperbole. C. Chateau. N. ann. math. XLII, 133. — L. Chauchat ibid. 136.
700. Trouver le lieu des foyers d'une hyperbole dont on connait un sommet et une asymptote. Sequestre. N. ann. math. XLIII, 318. — Gerono ibid. 319.
701. Lieu géométrique du point d'intersection d'une asymptote de l'hyperbole avec une directrice, le foyer correspondant décrivant une ligne droite donnée. H. Cartier. N. ann. math. XLII, 420. — Gerono ibid. 421.
702. Sur une hyperbole tangente aux axes d'une ellipse, les asymptotes de l'hyperbole étant tangentes à l'ellipse. Juhel-Rénoy. N. ann. math. XLIII, 392.

703. Hyperbole lieu des points de contact de toutes les ellipses confocales avec des droites parallèles à une direction donnée. Goffart. N. ann. math. XLII, 358.

704. L'angle de deux hyperboles équilatères concentriques est double de l'angle de leurs asymptotes. Giat. N. ann. math. XLII, 332.

Vergl. Ellipse 590. Hyperboloid.

**Hyperboloid.**

705. Anwendung der Eigenschaften des einmanteligen Rotationshyperboloides zur Lösung einiger Aufgaben über die Hyperbel. W. J. Hübner. Grun. Archiv LXX, 435.

## I.

**Integration (unbestimmte).**

706. Valeur d'une intégrale contenant la racine carrée d'un polynôme du degré $n$. Ch. Chabanel. N. ann. math. XLII, 378.

707. Valeur de deux intégrales contenant la racine carrée du polynome $nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \ldots + 2x + 1$. Rebuffel. N. ann. math. XLII, 374.

**Interpolation.**

708. Einfache Methode, beim Interpoliren die zweiten Differenzen in Rechnung zu ziehen. Nell. Grun. Archiv LXX, 302.

**Invariantentheorie.**

709. On a theorem relating to semiinvariants. Cayley. Quart Journ. math. XX, 212.

710. Operations in the theory of semiinvariants. P. A. Mac Mahon. Quart. Journ. math. XX, 362.

711. Sur les invariants des équations différentielles linéaires du quatrième ordre. G. H. Halphen. Acta math. III, 325.

712. Sur le système complet des combinants de deux formes binaires biquadratiques. C. Stephanos. Compt. rend. XCVII, 27.

Vergl. Formen.

## K.

**Kegelschnitte.**

713. Ueber die Bestimmung der Unterscheidungscharaktere für die Kegelschnitte, wenn die Gleichungen derselben in trimetrischen Liniencoordinaten gegeben sind. A. Ehlert. Grun. Archiv LXXI, 51.

714. Zur elementargeometrischen Kegelschnittslehre. K. Lauermann. Grun. Archiv LXXI, 126.

715. Sur les triangles conjugués à une conique et sur les tétraèdres conjugués à une quadrique. Humbert. N. ann. math. XLII, 167.

716. Eine Verallgemeinerung der Sätze von Pascal und Brianchon und das Problem von Castillon. B. Sporer. Grun. Archiv LXXI, 333.

717. Démonstration et conséquences du théorème que deux coniques quelconques sont polaires réciproques. G. Tarry. N. ann. math. XLIII, 270.

718. Réciprocité du centre d'une conique et d'un point d'un triangle inscrit. J. Richard. N. ann. math. XLIII, 490.

719. Relations entre les distances d'un foyer d'une conique à quatre points ou à quatre tangentes. X. Antomari. N. ann. math. XLII, 193, 337, 385.

720. Lieu des sommets de triangles circonscrits à une conique donnée. H. Faure. N. ann. math. XLIII, 144. [Vergl. Bd. XXVII, Nr. 68.]

721. Perspectivische Dreiecke, die einem Kegelschnitte einbeschrieben sind. L. Klug. Grun. Archiv LXXI, 292. [Vergl. Nr. 661.]

722. Cercle inscrit d'un triangle dont les sommets sont les foyers d'une conique donnée et un point donné de la même conique. N. ann. math. XLIII, 449.

723. Quadrilatères inscrits dans une conique le point de concours des diagonales étant fixe. M. d'Ocagne. N. ann. math. XLIII, 528.

724. Sur la condition pour qu'un polygone soit inscrit et circonscrit à deux coniques. Weill. N. ann. math. XLIII, 128.

725. Propriété des tangentes à une coniques menées de deux points situés sur l'axe des $x$ et équidistants de l'origine. Moret-Blanc. N. ann. math. XLII, 522. — Barisien ibid. XLIII, 441.

726. Conique engendrée par le point d'intersection de deux tangentes à une conique donnée. L. Kien. N. ann. math. XLII, 511.






727. Propriété d'une conique et de deux tangentes. N. Goffart. N. ann. math. XLII, 375.
728. En chaque point d'une conique on mène un diamètre et la normale. Trouver le lieu de l'intersection du diamètre et de la tangente à l'autre extrémité de la corde normale. Moret-Blanc. N. ann. math. XLII, 471.
729. Bestimmung der Osculationskreise der Kegelschnitte mit Hilfe von Eigenschaften der Sehnen, welche ein Kegelschnitt mit seinen Osculationskreisen gemein hat. Jos. Zimmermann. Grun. Archiv LXX, 30.
730. Ueber die Mittelpunkte der Sehnen, welche ein Kegelschnitt mit seinen Osculationskreisen gemein hat. Jos. Zimmermann. Grun. Archiv LXX, 38.
731. Coniques passant par les points d'intersection de deux circonférences et tangentes à toutes les deux. A. Hilaire. N. ann. math. XLII, 504. [Vergl. Bd. XXVIII, Nr. 618.]
732. Cordes parallèles aux tangentes menées d'un point à une conique. N. Goffart. N. ann. math. XLIII, 492.
733. Propriété des segments d'une droite passant par deux coniques homothétiques et leur sécante commune. E. Fauquembergue. N. ann. math. XLII, 324.
734. Sur les coniques qui coupent à angle droit une conique donnée. Weill. N. ann. math. XLIII, 320.
735. Théorèmes sur trois coniques d'un faisceau linéaire. Weill. N. ann. math. XLIII, 19.
736. Ueber einige Eigenschaften einer besonderen Kegelschnittschaar. C. Hossfeld. Grun. Archiv LXX, 253.
737. Einige Sätze über das Viereck und Kegelschnittbüschel. L. Klug. Grun. Archiv LXXI, 304.

Vergl. Ellipse. Hyperbel. Kreis. Parabel.

**Kettenbrüche.**

738. Sur un développement en fraction continue. L. Fuchs. Acta math. IV, 89. — Ch. Hermite ibid. 91.

Vergl. Optik 813.

**Kreis.**

739. Relation entre les distances deux à deux de quatre points du cercle ou de cinq points d'une sphère. H. Faure. N. ann. math. XLIII, 196.
740. Propriété des deux droites de Simson. N. Goffart. N. ann. math. XLIII, 397.
741. Cercle enveloppé par une droite. Colin. N. ann. math. XLII, 248.
742. Sur le cercle qui a pour diamètre une corde d'une conique à centre. Weill. N. ann. math. XLIII, 136. — Juhel-Rénoy ibid. 336.
743. Sur la circonférence des neuf points. E. Catalan. N. ann. math. XLII, 82.
744. Nouveau point situé sur le cercle des neuf points. V. de Strékalof. N. ann. math. XLII, 326.
745. Sur deux cercles tangents entre eux et touchant chacun une de deux droites fixes. Moret-Blanc. N. ann. math. XLIII, 542.
746. Sur les cercles tangents à trois cercles et les sphères tangentes à trois ou à quatre sphères. A. Pellet. N. ann. math. XLIII, 316.
747. Recherche des cercles coupant trois cercles donnés sous des angles déterminés. E. M. Laquière. N. ann. math. XLII, 272, 348.
748. A group of circles. R. Tucker. Quart. Journ. math. XX, 57.

## M.

**Magnetismus.**

749. Comparaison des hypothèses des fluides magnétiques et des courants moléculaires. P. Le Cordier. Compt. rend. XCVII, 478.
750. Sur l'induction. P. Le Cordier. Compt. rend. XCVII, 625.

**Mannichfaltigkeiten.**

751. De la puissance des ensembles parfaits de points. G. Cantor. Acta math. IV, 381.
752. Beweis eines Satzes aus der Mannichfaltigkeitslehre. E. Phragmén. Acta math. V, 47.

**Maxima und Minima.**

753. Bemerkungen und Zusätze zu Steiner's Aufsätzen über Maximum und Minimum. R. Sturm. Crelle XCVI, 36.

754. Ueber das Minimum des Inhalts eines Vierecks bei gegebenen Seiten. E. Lampe. Crelle XCVI, 78.
755. Würfel und reguläres Tetraeder als Maximum und Minimum. R. Sturm. Crelle XCVII, 1.
756. Ueber den Punkt kleinster Entfernungssumme von gegebenen Punkten. R. Sturm. Crelle XCVII, 49.
Vergl. Stereometrie 870.

**Mechanik.**

757. Le nouveau programme d'admission à l'école polytechnique relatif à la mécanique. N. ann. math. XLIII, 497.
758. Principien der Statik monocyklischer Systeme. H. v. Helmholtz. Crelle XCVII, 111, 317. — Kronecker ibid. 141.
759. Gleichgewicht eines über eine Fläche gespannten Fadens mit Berücksichtigung der Reibung. F. August. Grun. Archiv LXX, 225.
760. Application de la statique au calcul de divers éléments d'un triangle. A. de Saint-Germain. N. ann. math. XLIII, 37.
761. Einfacher Beweis der Existenz eines Mittelpunktes paralleler Kräfte. R. Hoppe. Grun. Archiv LXXI, 111.
762. Sur un nouveau cas intégrable du problème de l'élastique et l'une de ses applications. M. Lévy. Compt. rend. XCVII, 694.
763. Résistance d'un anneau à la flexion. J. Boussinesq. Compt. rend. XCVII, 843, 111. — M. Levy ibid. 979.
764. Sur le mouvement d'un point pesant. A. de Saint-Germain. N. ann. math. XLII, 542.
765. A general theorem concerning the motion of a solid body. J. W. Warren. Quart. Journ. math. XX, 13.
766. Bewegung eines schweren Punktes auf einem Rotationsparaboloid. Züge. Grun. Archiv LXX, 58.
767. Horizontal rotirende Kette. R. Hoppe. Grun. Archiv LXX, 90.
768. Sur le mouvement d'une charge roulante, le long d'une barre élastique horizontale appuyée à ses deux bouts et dont la masse est beaucoup plus petite que la sienne. J. Boussinesq. Compt. rend. XCVII, 897.
769. Remarques relatives au problème des deux chaines. H. Resal. Compt. rend. XCVII, 1289.
770. Sur la théorie des tautochrones. H. Resal. N. ann. math. XLII, 481.
771. Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps. H. Poincaré. Compt. rend. XCVII, 251.
772. Sur la forme des expressions des distances mutuelles, dans le problème des trois corps. A. Lindstedt. Compt. rend. XCVII, 1276, 1353.
773. Moment der gegenseitigen Anziehung der begrenzten Schenkel eines Winkels. R. Hoppe. Grun. Archiv LXX, 335.
774. Sur les droites qui ont des moments donnés par rapport à des droites fixes. C. Segre. Crelle XCVII, 95.
775. Les moments d'inertie polaires du triangle par rapport à ses points remarquables. G. Dostor. N. ann. math. XLII, 469.
776. Résistance vive ou dynamique des solides. Représentation graphique des lois du choc longitudinal, subi à une de ses extrémités par une tige ou barre prismatique assujettie à l'extrémité opposée. De Saint-Venant & Flamant. Compt. rend. XCVII, 127, 214, 281, 444.
777. Du choc longitudinal d'une barre prismatique, fixée à un bout et heurtée à l'autre. J. Boussinesq. Compt. rend. XCVII, 154.
778. Sur les déformations géométriques déterminées par l'écrasement d'un parallélépipède rectangle avec allongement dans une seule direction. Tresca. Compt. rend. XCVII, 928.
779. Étude sur les déformations et le développement de chaleur produits dans le forgeage par des pannes arrondies. Tresca. Compt. rend. XCVII, 515.
780. Die Cochleoïde. C. Falkenberg. Grun. Archiv LXX, 259.
781. Nouvelle remarque sur le système Peaucellier. M. d'Ocagne. N. ann. math. XLIII, 199. [Vergl. Bd. XXVII, Nr. 175 u. Bd. XXVIII, Nr. 654.]
782. Considérations théoriques sur les flotteurs remorqués en divergence. E. de Jonquières. Compt. rend. XCVII, 1175.
783. Sur une bascule, nouveau système de romaine à curseur automatique. A. Picart. Compt. rend. XCVII, 86, 252. [Vergl. Nr. 325.]
784. Sur le ricochet des projectiles sphériques à la surface de l'eau. E. de Jonquières. Compt. rend. XCVII, 1278.

785. Sur le fonctionnement d'une turbine. M. Deprez. Compt. rend. XCVII, 697.
Vergl. Akustik. Analytische Geometrie der Ebene 508, 517. Elasticität. Elektricität. Geodäsie. Hydrodynamik. Magnetismus. Optik. Pendel. Schwerpunkt. Wärmelehre.

**Mehrdimensionale Geometrie.**

786. Ausdehnung einiger elementarer Sätze über das ebene Dreieck auf Räume von beliebig vielen Dimensionen. R. Mehmke. Grun. Archiv LXX, 210.

## O.

**Oberflächen.**

787. Sur la génération des surfaces. J. S. & M. N. Vaněček. Compt. rend. XCVII, 1473, 1548.
788. Sur les surfaces du troisième ordre. C. Le Paige. Compt. rend. XCVII, 34, 158.
789. Sur les surfaces du troisième ordre. C. Le Paige. Acta math. III, 181.
790. Nouvelles recherches sur les surfaces du troisième ordre. C. Le Paige. Acta math. V, 195.
791. Lineare Constructionen zur Erzeugung der kubischen Fläche. H. Schroeter. Crelle XCVI, 282.
792. Sur un faisceau de surfaces d'ordre quelconque. A. Legoux. N. ann. math. XLII, 233; XLIII, 161.
793. Ueber Canalflächen. R. Hoppe. Grun. Archiv LXXI, 280.
794. Sur la surface des ondes. G. Darboux. Compt. rend. XCVII, 1039, 1133.
795. Sur une famille de surfaces développables passant par une courbe gauche donnée. L. Lévy. Compt. rend. XCVII, 986.
796. Sur la construction des plans tangents d'une surface de révolution qui passent par une droite donnée. Rouquet. N. ann. math. XLIII, 194.
797. Sur une famille de surfaces algébriques; considérations sur des surfaces orthogonales et homofocales. A. Legoux. Quart. Journ. math. XX, 1.
798. Sur les systèmes triples de surfaces orthogonales. Doucet. N. ann. math. XLIII, 315.
799. Sur l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre des systèmes orthogonaux. G. Darboux. Acta math. IV, 93.
800. Sur les cercles géodésiques. G. Ossian Bonnet. Compt. rend. XCVII, 1360.
801. Sur le système de coordonnées polaires géodésiques. G. Ossian Bonnet. Compt. rend. XCVII, 1422.
802. Sur les diverses courbures des lignes qu'on peut tracer sur une surface. Issoly. N. ann. math. XLIII, 522.
803. Krümmungslinien in den Nabelpunkten von Flächen. R. Hoppe. Grun. Archiv LXX, 289.
804. Ueber die Krümmung der Flächen. O. Böklen. Crelle XCVI, 152.
805. Sur les surfaces dont la courbure totale est constante. G. Darboux. Compt. rend. XCVII, 848.
806. Sur les surfaces à courbure constante. G. Darboux. Compt. rend. XCVII, 892, 946.
807. Zur Theorie der Flächen gerader Ordnung. Ed. Mahler. Grun. Archiv LXX, 313.
808. Ueber die Singularitätenflächen quadratischer Strahlencomplexe und ihre Haupttangentencurven. Th. Reye. Crelle XCVII, 242.
Vergl. Geometrie (abzählende).

**Oberflächen zweiter Ordnung.**

809. Théorie des surfaces du second ordre en coordonnées obliques. S. Gundelfinger. N. ann. math. XLIII, 7. [Vergl. Bd. XXVIII, Nr. 694.]
810. Sur le complexe formé par les axes d'une surface du second ordre. G. Koenigs. N. ann. math. XLII, 267.
811. Sur l'intersection de deux quadriques réglées. E. Lebon. N. ann. math. XLII, 47.
812. Ueber die Durchdringung gleichseitiger Rotationshyperboloide von parallelen Axen. W. Fiedler. Acta math. V, 331.
Vergl. Ellipsoid. Geometrie (descriptive) 639. Hyperboloid. Kegelschnitte 715. Paraboloid. Sphärik.

### Optik.

813. Formules générales des systèmes dioptriques centrés. Monoyer. Compt. rend. XCVII, 88.
814. Ueber optische Strahlensysteme. M. Blasendorff. Crelle XCVII, 172.
815. Ueber die Lage der Brennlinien eines unendlich dünnen Strahlenbündels gegen einander und gegen einen Hauptstrahl. L. Matthiessen. Acta math. IV, 177.
816. Construction géométrique des caustiques par réflexion. Laquière. N. ann. math. XLII, 74.
817. Rückblick auf eine Schattenfläche von Laplace. A. Wittstein. Grun. Archiv LXX, 239.
818. Zu einem Aufsatze von Dr. E. Maiss. A. Wangerin. Grun. Archiv LXX, 111. [Vergl. Bd. XXVII, Nr 204.]
819. Vitesse des ondes. Rayleigh. Compt. rend. XCVII, 567. — Guy ibid. 1476.
820. Sur la dispersion de la lumière. C. E. de Klercker. Compt. rend. XCVII, 707.
821. Détermination des constantes optiques d'un cristal biréfringent à une axe. L. Lévy. Compt. rend. XCVII, 1296.

Vergl. Geometrie (descriptive) 638. Geometrie (höhere) 643.

## P.

### Parabel.

822. Propriété des normales à une parabole. N. Goffart. N. ann. math. XLII, 331.
823. Sur les trois normales menées d'un point à une parabole. A. Chambeau. N. ann. math. XLII, 500.
824. Sur les trois cercles osculateurs d'une parabole qui touchent une tangente à cette courbe. Ch. Brisse. N. ann. math. XLIII, 388.
825. Contour polygonal inscrit dans une parabole. Moret-Blanc. N. ann. math. XLII, 322.
826. Propriété d'une parabole ayant une certaine droite pour directrice et un certain point pour sommet. E. Barisien. N. ann. math. XLII, 415.
827. Construire une parabole tangente à une circonférence donnée, connaissant l'axe et le paramètre de la parabole. Moret-Blanc. N. ann. math. XLIII, 394.
828. Paraboles tangentes à la fois deux droites rectangulaires et un cercle tangent à ces deux droites. E. Barisien. N. ann. math. XLIII, 535.
829. Théorème sur deux paraboles. L. Clément. N. ann. math. XLIII, 487.

Vergl. Geometrie (höhere) 643.

### Paraboloid.

830. Sur les lignes de courbure du paraboloïde équilatère. P. Barbarin. N. ann. math. XLIII, 97.

### Pendel.

831. Einfaches Pendel im Raume bei Anziehung von einem Punkte in endlicher Entfernung. R. Hoppe. Grun. Archiv LXX, 405.
832. Oscillationen eines Bifilarpendels. R. Hoppe. Grun. Archiv LXX, 188.

### Planimetrie.

833. The symmedian-point axis of an associated system of triangles. R. Tucker. Quart. Journ. math. XX, 167.
834. Sur la symédiane. M. d'Ocagne. N. ann. math. XLII, 450; XLIII, 25.
835. Sur les propriétés segmentaires du triangle. M. d'Ocagne. N. ann. math. XLII, 497. — De Saint-Germain ibid. XLIII, 302.
836. Propriété du centre du cercle circonscrit à un triangle en rapport avec le point d'intersection des trois hauteurs. E. Lemoine. N. ann. math. XLII, 525.
837. Point d'intersection de trois droites. M. Raclot. N. ann math. XLII, 478.
838. Théorème sur le triangle rectangle. Goffart. N. ann. math. XLII, 527.
839. Sind in einem geradlinigen Dreieck zwei Winkelhalbirende gleich, so liegen die halbirten Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks. P. Seelhoff. Grun. Archiv LXX, 223.
840. Aufgabe über das gleichschenklige Dreieck. H. Simon. Grun. Archiv LXXI, 222. [Vergl. Bd. XXVIII, Nr. 337.]
841. Trouver les côtés d'un triangle, la somme de leurs cubes étant donnée et supposant qu'ils soient multiples du rayon du cercle inscrit. N. ann. math. XLIII, 444.

842. Inhalt eines Parallelogramms, dessen Seiten Verbindungslinien der Eckpunkte eines Rechtecks mit gewissen Punkten seiner Seiten sind. Schnell. Grun. Archiv LXX, 197.
843. De quelques propriétés d'une famille de polygones que l'on peut former avec un polygone donné. L. F. Ibach. N. ann. math. XLII, 226.
Vergl. Kreis.

**Potential.**

844. Sur les fonctions de trois variables réelles satisfaisant à l'équation $\Delta F = 0$. P. Appell. Acta math. IV, 313.
Vergl. Elektricität.

## Q.

**Quaternionen.**

845. Sur les quantités formant un groupe de nonions analogues aux quaternions de Hamilton. J. Sylvester. Compt. rend. XCVII, 1336.

## R.

**Reihen.**

846. Sur les séries trigonométriques. H. Poincaré. Compt. rend. XCVII, 1471.
847. Sur la série de Lamé. Moret-Blanc N. ann. math. XLIII, 533.
848. Théorie élémentaire des séries récurrentes. M. d'Ocagne. N. ann. math. XLIII, 65
849. Sur quelques développements de $sin nx$ et de $cos nx$. E. Catalan. N. ann. math. XLII, 529.
850. Sur la formule $hu'_x = \Delta u_x - \frac{h}{2} \cdot \Delta u'_x + \frac{B_1 . h^2}{1.2} \cdot \Delta u''_x - \frac{B_2 . h^4}{1.2.3.4} \cdot \Delta u^{IV}_x + \ldots$ J. C. Malmsten. Acta math. V, 1.
851. Sur un algorithme algébrique. M. d'Ocagne. N. ann. math. XLVII, 220.
852. Algorithme isobarique E. Cesaro. N. ann. math. XLIII, 561.
853. Sur une communication de M. Tchébychew au congrès de Clermont-Ferrand en Août 1876. E. Cesaro. N. ann. math. XLIII, 513.
Vergl. Astronomie 527. Functionen 626.

**Rectification.**

854. Note sur l'impossibilité de la quadrature du cercle. E. Rouché. N. ann. math XLII, 5. [Vergl. Bd. XXIX, Nr. 411 u. 689.]
Vergl. Functionen 613.

## S.

**Schwerpunkt.**

855. Distances du centre de gravité aux points remarquables du triangle. G. Dostor. N. ann. math. XLII, 368.
856. Ueber die Lage des Schwerpunktes im Viereck. Stoll Grun. Archiv LXXI, 334.
857. Sur le centre de gravité d'un tétraèdre. Moret-Blanc. N. ann. math. XLIII. 484.

**Singularitäten.**

858. Sur la construction d'une courbe algébrique autour d'un de ses points. Ch. Biehler. N. ann. math. XLII, 354, 397. [Vergl. Bd. XXVII, Nr. 251.]
859. Sur la construction des courbes dont l'équation est donnée en coordonnées polaires. Ch. Biehler N. ann. math. XLIII, 367.
860. Généralisation d'un théorème relatif aux points d'inflexion des cubiques planes. A. Legoux. N. ann. math. XLII, 77.
861. Sur les courbes unicursales du quatrième ordre, dont on connait les trois points doubles et cinq points. A. Astor. N. ann. math. XLIII, 181.
862. Sur la courbe du quatrième degré à deux points doubles. Humbert. Compt. rend. XCVII, 1287.
863. Sur les courbes de genre un. Humbert. Compt. rend. XCVII, 989, 1042, 1136.
Vergl. Elliptische Transcendenten 602. Geometrie (descriptive) 639, 640. Oberflächen 808.

**Sphärik.**

864. Differential equations of spherical trigonometry. J. W. Warren. Quart. Journ math. XX, 170.
865. A transformation in elliptic integrals and its application to spherical trigonometry. R. Russell. Quart. Journ. math. XX, 378.

866. Ein Problem über berührende Kugeln. R. Hoppe. Grun. Archiv LXXI, 148.
867. Théorème sur trois cordes d'une sphère passant par un même point intérieur. H. Faure. N. ann. math. XLIII, 534.
868. Sphère passant par les pieds de quatre normales à un paraboloïde elliptique partant d'un même point. Fontené. N. ann. math. XLIII, 423.
Vergl. Kreis 746.

**Stereometrie.**

869. Sur l'existence de certains polyèdres. E. Cesaro. N. ann. math. XLII, 46.
870. Sur certaines plus courtes distances dans un tétraèdre. H. Brocard. N. ann. math. XLIII, 531.
871. Angle compris entre deux faces latérales d'une pyramide à base carrée. J. Richard. N. ann. math. XLIII, 493.

**Substitutionen.**

872. Quelques propriétés élémentaires des groupes plusieurs fois transitifs. E. Cesaro. N. ann. math. XLIII, 471.
873. Sur les groupes d'ordre fini, contenus dans le groupe des substitutions quadratiques homogènes à trois variables. L. Autonne. Compt. rend. XCVII, 567.

## T.

**Taylor's Reihe.**

874. Sur le théorème $f(x+h)-f(x)=h.f'(x+\theta h)$. J. Peano. N. ann. math. XLIII, 45, 252. — C. Jordan ibid. 47. — Ph. Gilbert ibid. 153, 475.

**Thetafunctionen.**

875. Zur Transformation der Thetafunctionen. Ferd. Müller. Grun. Archiv LXXI, 161.
876. Verallgemeinerung einer Relation der Jacobi'schen Functionen. R. Hoppe. Grun. Archiv LXX, 400.
877. Ein neuer Beweis für die Riemann'sche Thetaformel. F. Prym. Acta math. III, 201.
878. Ableitung einer allgemeinen Thetaformel. F. Prym. Acta math. III, 216.
879. Ueber die Verallgemeinerung der Riemann'schen Thetaformel. A. Krazer & F. Prym. Acta math. III, 240.
880. Ueber Gruppen von Thetacharakteristiken. G. Frobenius. Crelle XCVI, 80.
881. Ueber Thetafunctionen mehrerer Variabeln. G. Frobenius. Crelle XCVI, 100.
882. Ableitung des Weierstrass'schen Fundamentaltheorems für die Sigmafunction mehrerer Argumente aus den Kronecker'schen Relationen für Subdeterminanten symmetrischer Systeme. F. Caspary. Crelle XCVI, 182.
883. Zur Theorie der Thetafunctionen mehrerer Argumente. F. Caspary. Crelle XCVI, 324.
884. Ueber das Additionstheorem der Thetafunctionen mehrerer Argumente. F. Caspary. Crelle XCVII, 165.

**Trigonometrie.**

885. Sur quelques identités trigonométriques. G. Fouret. N. ann. math. XLII, 262.
886. Note de trigonométrie élémentaire. N. Goffart. N. ann. math. XLIII, 104.
887. Propriété de tout point intérieur à un triangle. N. Goffart. N. ann. math. XLIII, 443.
888. Diviser un triangle par des perpendiculaires tirées d'un point intérieur sur les côtés en trois quadrilatères équivalents. Laser. N. ann math. XLIII, 332.
889. Condition sous laquelle un triangle se trouve isoscèle. N Goffart. N. ann. math. XLII, 521.
890. Ein Dreieck zu construiren aus einem Winkel, der Winkelhalbirenden und der durch die Winkelspitze gehenden Mittellinie. P. Seelhoff. Grun. Arch. LXXI, 97.
891. Calculer un triangle connaissant deux côtés et sachant qu'il est équivalent au triangle équilatéral construit sur le troisième côté. Moret-Blanc. N. ann. math. XLII, 466.
892. Sur un triangle et quadrilatère équivalents. Moret-Blanc. N. ann math. XLIII, 494.
893. Calcul de l'angle entre le diamètre d'un cercle passant par un point donné et une sécante passant par le même point. Moret-Blanc. N. ann. math. XLII, 464.
Vergl. Gleichungen 683. Sphärik.

## U.

### Ultraelliptische Transcendenten.



### Umkehrungsproblem.



## V.

### Variationsrechnung.



## W.

### Wärmelehre.



### Wahrscheinlichkeitsrechnung.



## Z.

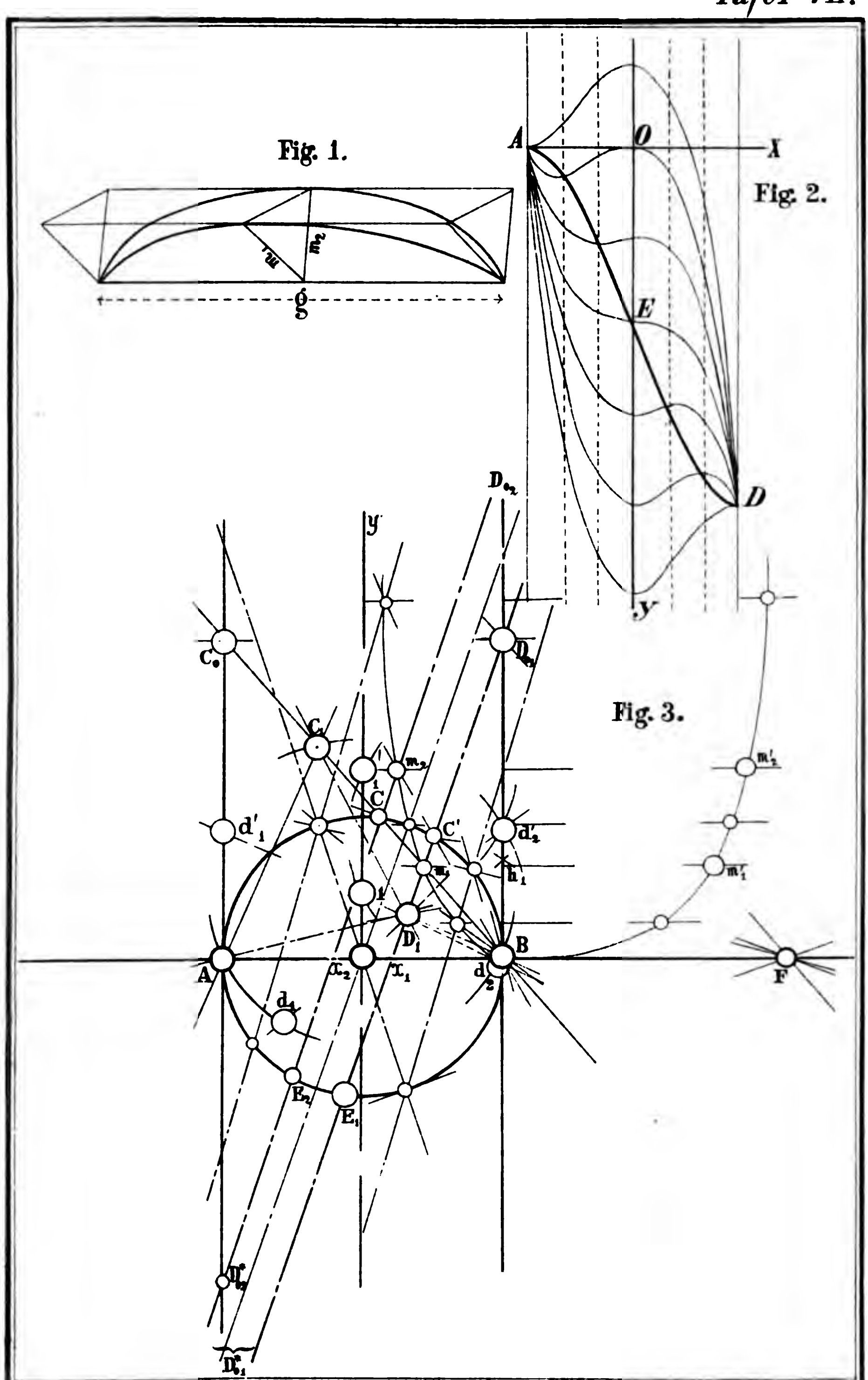
### Zahlentheorie.

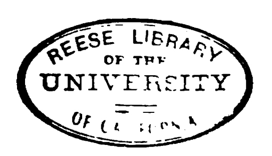
916. $a$, $x$, $y$ étant des nombres entiers chaque valeur de $x$ qui vérifie l'équation $(a^2+1)x^2 = y^2+1$, en dehors de $x=1$ et de $x=4a^2+1$, est la somme de trois carrés. E. Fauquembergue. N. ann. math. XLIII, 345.
917. La somme des puissances $4n$ de deux nombres entiers inégaux est une somme de quatre carrés, dont deux sont égaux entre eux. E. Catalan. N. ann. math XLIII, 347.
918. On the representations of a number as the sum of four uneven squares, and as the sum of two even and two uneven squares. J. W. L. Glaisher Quart. Journ. math. XX, 80
919. Sur la décomposition d'un nombre en cinq carrés. Stieltjes. Compt. rend. XCVII, 981.
920. Résoudre en nombres entiers l'équation $x^2+y^2=u^2+v^2+1$. E. Fauquembergue. N ann. math. XLIII, 346.
921. Sur quelques équations indéterminées. S. Réalis. N. ann. math. XLII, 289, 494, 535; XLIII, 305.
922. Insolubilité de l'équation $y^3 = x^2+(x+1)^2$ en nombres entiers à moins de $x=0$. A. Fauquembergue. N. ann. math. XLII, 430. — P. D. ibid. XLIII, 301.
923. Trouver les solutions entières de l'équation $x^3+x^2+x+1=v^2$. E. Fauquembergue. N. ann. math. XLIII, 538.
924. Involubilité de l'équation

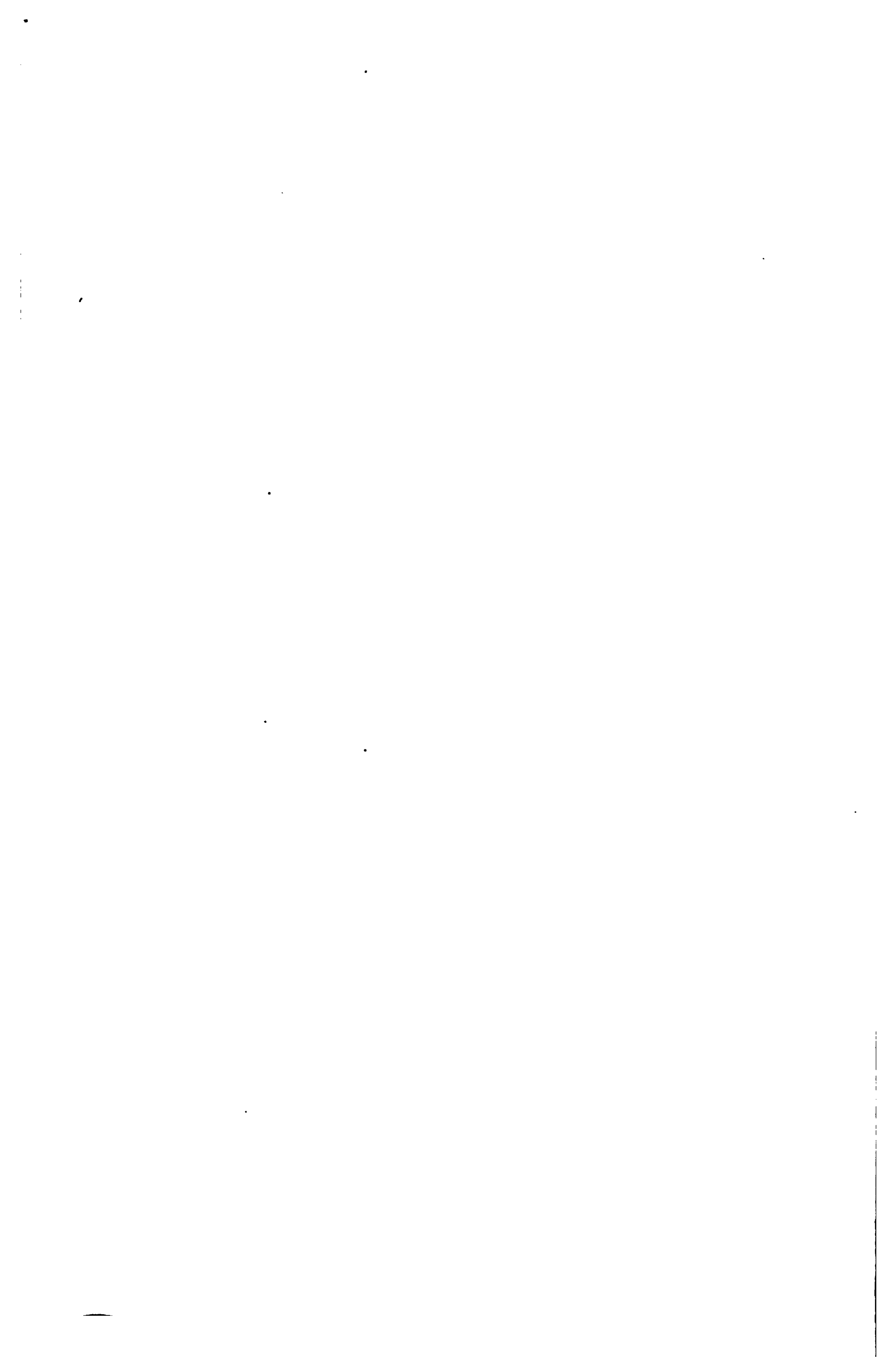
$$(2+\sqrt{3})^{2x+1}+(2-\sqrt{3})^{2x+1} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^{2y+1}-(1-\sqrt{2})^{2y+1}\right]$$

en nombres entiers au'res que $x=y=0$. E. Fauquembergue. N. ann. math. XLII, 372.
925. Propriété de la somme des $2a^{\text{èmes}}$ puissances des nombres $1, 2, \ldots p-1$ en prenant pour $p$ un nombre premier $> 3$. Moret-Blanc. N. ann. math. XLIII, 395.
926. On the divisors of numbers and products of factors. S. Roberts. Quart. Journ. math. XX, 370.
927. Somme de produits des nombres premiers à $N$ et non supérieurs à ce nombre. Moret-Blanc. N. ann. math. XLIII, 483.
928. Congruence de deux produits par rapport à un module premier. Ch. Chabanel N. ann. math. XLII, 427.
929. Zu Euler's Recursionsformel für die Divisorensummen. Chr. Zeller. Acta math. IV, 415.
930. Théorème sur les quotients des divisions d'un nombre donné par les nombres moindres consécutifs. Ch. Chabanel. N. ann. math. XLII, 474
931. Démonstration d'un théorème de Fermat. A. Genocchi. N. ann. math. XLII, 306.
932. Befreundete Zahlen. P. Seelhoff. Grun. Archiv LXX, 75.

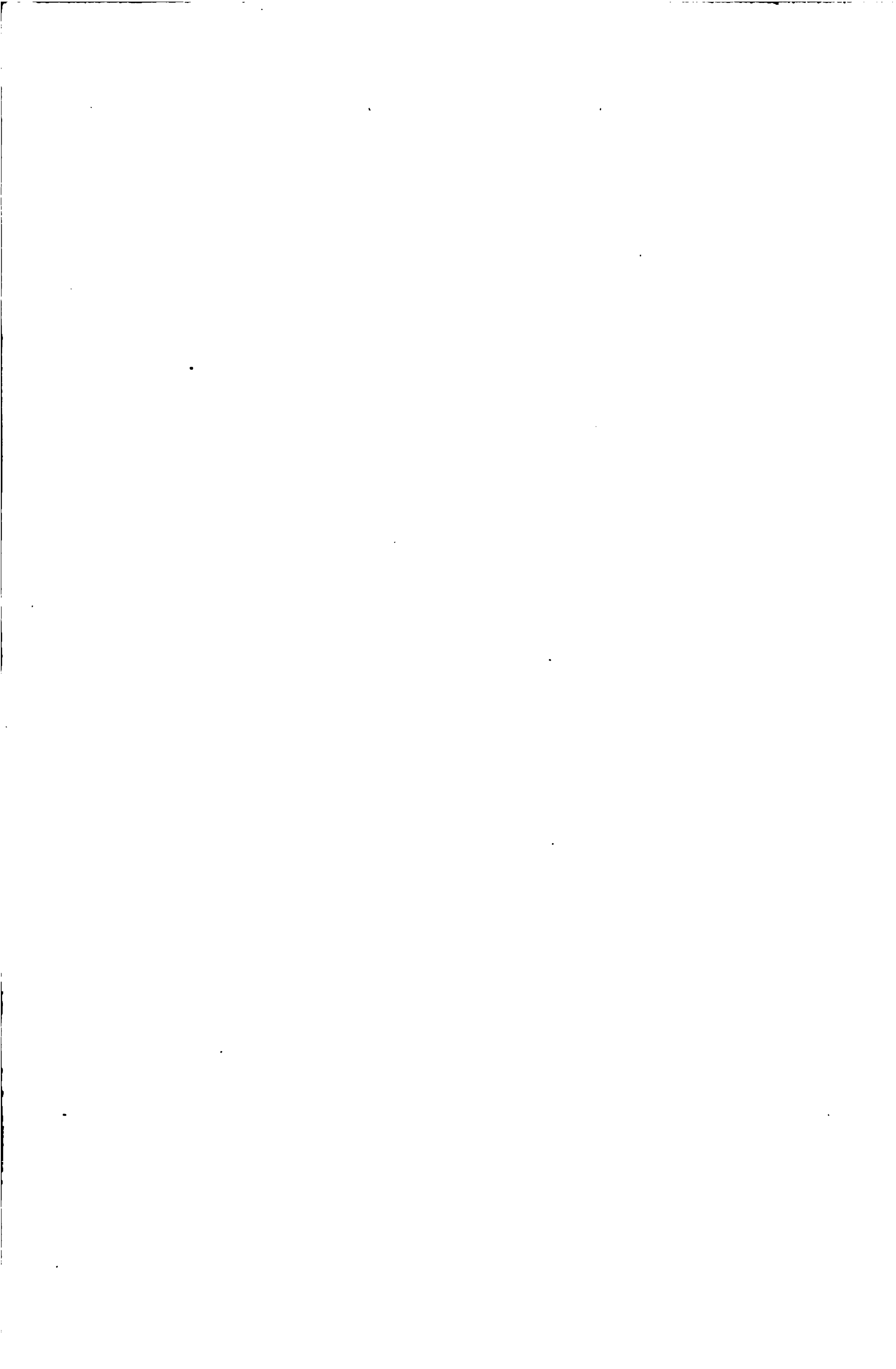
Vergl. Formen. Geschichte der Mathematik 663. Reihen 852.

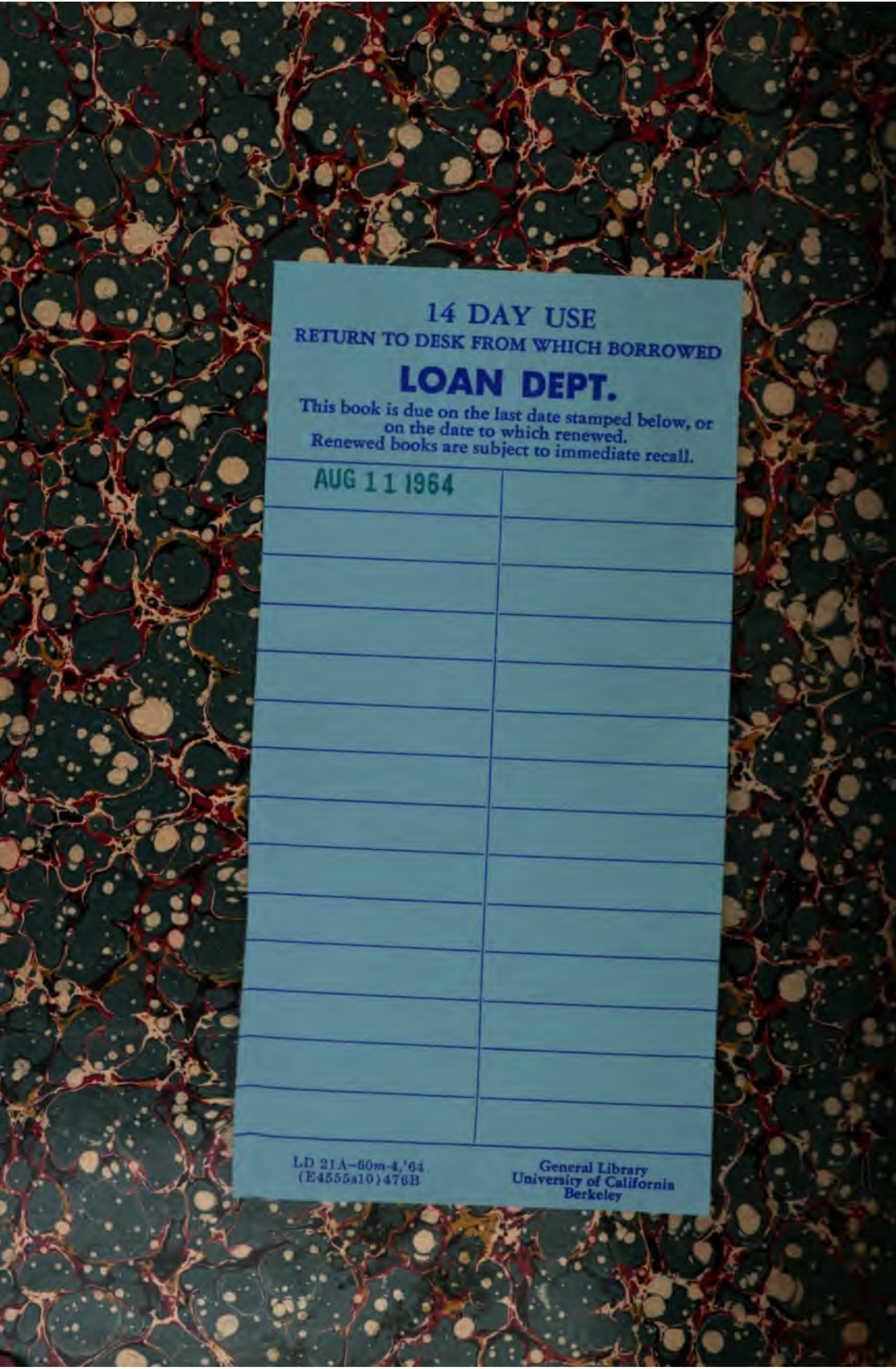

Fig. 1.
$m_1$
$m_2$
g
A
O
X
Fig. 2.
E
D
Y
Fig. 3.
y
$C_0$
$C_1$
C
C'
$d'_1$
$d'_2$
$m_2$
$m_1$
$h_1$
$D_1$
A
B
F
$x_2$
$x_1$
$d_2$
$d_4$
$E_2$
$E_1$
$m'_2$
$m'_1$

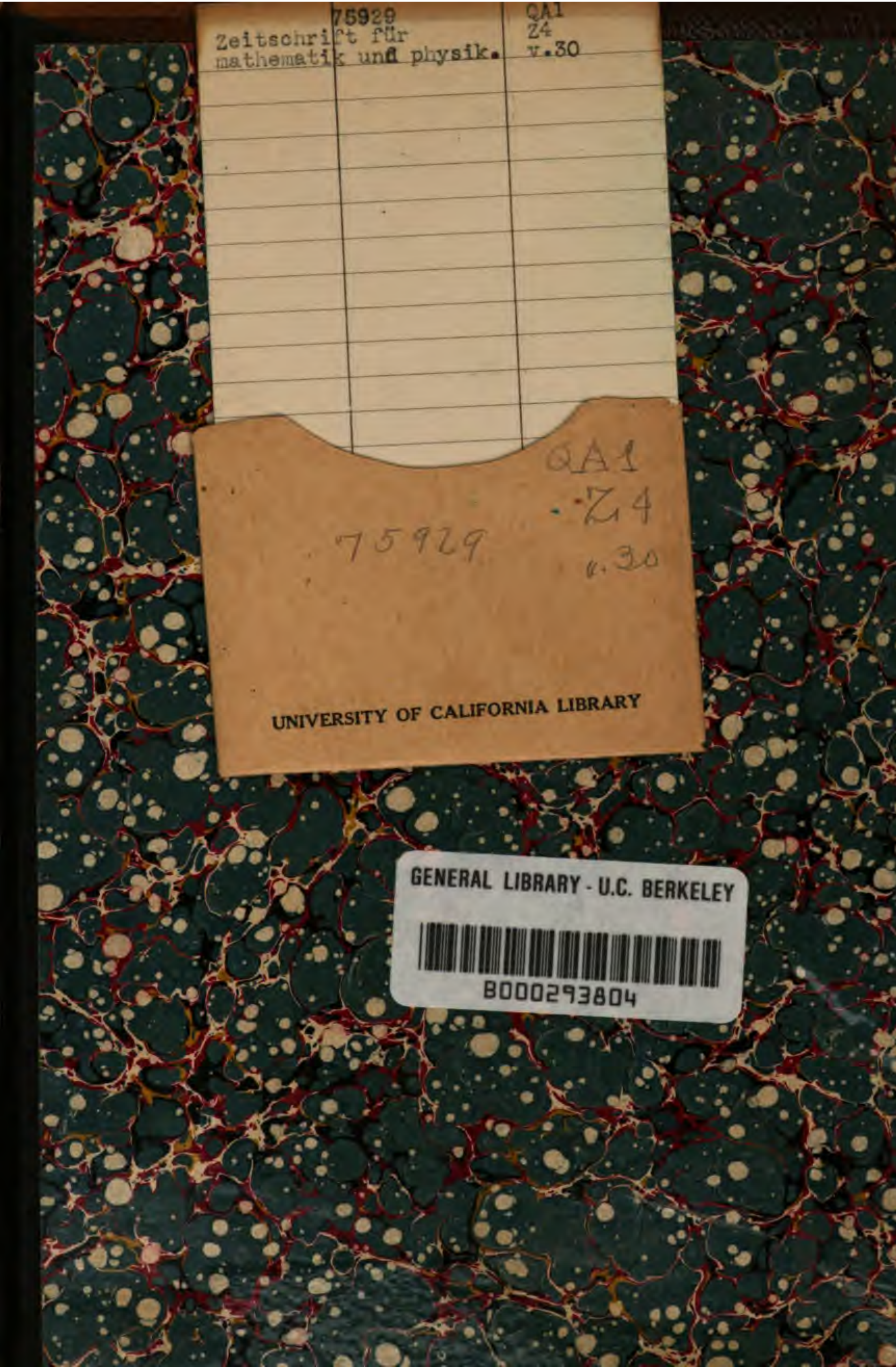

REESE LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY











75929
Zeitschrift für mathematik und physik.
QA1
Z4
v.30
QA1
Z4
75929
v.30
UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY
GENERAL LIBRARY - U.C. BERKELEY
B000293804